Masarykova univerzita

Marek Chrastina

Početní praktikum

Zbierka príkladov

31. januára 2012

Obsah

Predhovor **ii**

1 Derivácie funkcií jednej premennej **1**

2 Integrály funkcií jednej premennej **4**
2.1 Integrály racionálnych funkcií 6

3 Vektorový a maticový počet **7**

4 Obyčajné diferenciálne rovnice 1. rádu **11**

5 Obyčajné diferenciálne rovnice 2. rádu **15**

6 Krivkové integrály 1. a 2. druhu **17**

7 Skalárne a vektorové funkcie viacerých premenných. Kmeňová funkcia. Diferenciálne operátory. **20**

8 Kombinatorika **23**

9 Dvojné a trojné integrály **25**

10 Plošné integrály 1. a 2. druhu **28**

11 Integrálne vety **31**

12 Totálny diferenciál. Taylorov rozvoj **34**

13 Fourierove rady **36**

Použitá literatúra **37**

Dodatky **38**
Vzorce z goniometrie 39
Derivácie 40

Integrály 41
Maticový počet 43
Vektorový počet 45
Báza. Prechod medzi bázami 46
Kuchárske recepty k diferenciálnym rovniciam 47
Krivkové integrály 1. a 2. druhu 49
Krivky a plochy 51
Skalárne funkcie viacerých premenných 54
Diferenciálne operátory 55
Kombinatorika 57
Dvojné a trojné integrály 59
Plošné integrály 1. a 2. druhu 61
Integrálne vety 62
Totálny diferenciál. Taylorov rozvoj 63
Fourierove rady 66

Predslov

Znalosť matematiky, a to nielen tej vyššej, je nevyhnutným predpokladom pre úspešné štúdium fyziky. Početní praktikum je predmet koncipovaný ako rýchlokurz základov vyššej matematiky, orientovaný predovšetkým na praktickú stránku veci. Cieľom predmetu je jednak poskytnúť študentom aspoň hrubý orientačný výklad vybraných partií vyššej matematiky, ale predovšetkým nevyhnutnú výpočtovú prax.

Táto zbierka vznikla z príkladov riešených na cvičeniach, doplnená o ďalšie príklady k precvičovaniu. Dodatky v zbierke obsahujú základné vzorce a vzťahy, ktoré považujeme v zmysle výkladu za tabuľkové a postačujúce na riešenie úloh v zbierke. Textové časti dodatkov nemajú za cieľ rigoróznu presnosť, sú vedené v duchu nevyhnutného minima potrebného na aspoň hrubé pochopenie základných elementov danej témy.

Vezmime si príklad profesionálnych hokejistov. Ak chcú uspieť proti súperovi, je pre nich samozrejmé, že musia každodenne precvičovať svoju hráčsku techniku, hernú taktiku a telesnú kondíciu. To isté platí aj pre študentov, ktorí chcú úspešne zvládnuť písomky. Všeobecná predstava študentov, že to zvládnu i bez cvičenia v rátaní príkladov a bez neustáleho udržiavania svojho mozgu v stave činnom, je naprosto mimo zdravý rozum a nezakladá sa na skutočnej realite. Zbierka má preto slúžiť študentom ako pomocný študijný materiál. Nájdu v nej základné úlohy k precvičeniu jednotlivých výpočtových metód. Nenájdu však v nej riešenia ani výsledky, tie sú k dispozícii len k nahliadnutiu u autora zbierky. Chceme tým študentov pripraviť na realitu riešenia skutočných fyzikálnych úloh. Výsledok nie je vopred známy.

Ďakujem prof. RNDr. Michalovi Lencovi, Ph.D. a Mgr. Lenke Czudkovej, Ph.D. za cenné diskusie.

Kapitola 1

Derivácie funkcií jednej premennej

Vypočítajte prvé derivácie a výrazy upravte na jednoduchší tvar:

1. $\dfrac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$
2. $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}$
3. $\sqrt[13]{9+7\sqrt[5]{2x}}$
4. $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$
5. $\sqrt{x^2+1}-\ln\left(\dfrac{1}{x}+\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}\right)$
6. x^{x^x}
7. $x^{\sin^2 x}$
8. $x^{\mathrm{tg} x}$
9. $5^{x\log x}$
10. $x-\ln\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}+\mathrm{e}^{-x}\mathrm{arctg}\,\mathrm{e}^x$
11. $x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})-2\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})+2x$
12. $\dfrac{1}{\sin\mathrm{a}}\ln\dfrac{1+x}{1-x}-\mathrm{cotg}\,\mathrm{a}\cdot\ln\dfrac{1+x\cos\mathrm{a}}{1-x\cos\mathrm{a}}$, kde a je konštanta
13. $\sin(\cos^2 x)\cdot\cos(\sin^2 x)$
14. $\sqrt{1+\mathrm{tg}(x^2+x^{-2})}$

15. $\left(\dfrac{1-x^2}{2}\sin x - \dfrac{1+x^2}{2}\cos x\right)\mathrm{e}^{-x}$

16. $\dfrac{\sin x - x\cos x}{\cos x + x\sin x}$

17. $\mathrm{e}^{\mathrm{a}x}\cdot\dfrac{\mathrm{a}\sin\mathrm{b}x - \mathrm{b}\cos\mathrm{b}x}{\sqrt{a^2+b^2}}$, kde a,b sú konštanty

18. $x(\sin(\ln x) - \cos(\ln x))$

19. $\arcsin\left(\dfrac{\sin\mathrm{a}\sin x}{1-\cos\mathrm{a}\cos x}\right)$, kde a je konštanta

20. $\dfrac{\arccos x}{x} + \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}$

21. $x\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{1+x}} + \operatorname{arcotg}\sqrt{x} - \sqrt{x}$

22. $\dfrac{3-x}{2}\sqrt{1-2x-x^2} + 2\arcsin\dfrac{1+x}{\sqrt{2}}$

23. $x\arcsin\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

24. $\operatorname{arctg}\dfrac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$

25. $\log_7\dfrac{x^2-1}{x-1}$

26. $x^{\sin x} + \ln\cos\sqrt{\mathrm{e}^x+1}$

27. $\dfrac{1+x^2}{\sqrt[3]{x^4}\sin^7 x}$

28. Pomocou inverzných funkcií nájdite deriváciu funkcie $y = \sqrt[n]{x}$.

29. Pomocou inverzných funkcií nájdite deriváciu funkcie $y = \arcsin x$.

30. Pomocou inverzných funkcií nájdite deriváciu funkcie $y = \arccos x$.

31. Pomocou inverzných funkcií nájdite deriváciu funkcie $y = \operatorname{arctg} x$.

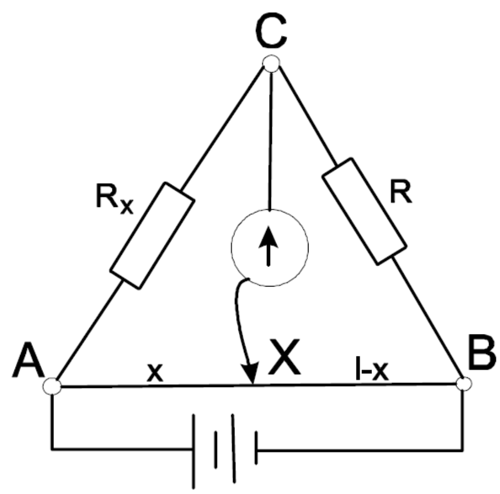
32. Pomocou inverzných funkcií nájdite deriváciu funkcie $y = \log_a x$.

33. Teleso mení svoju polohu podľa vzťahu $x(t) = 5t - 6t^2$. Nájdite závislosť rýchlosti a zrýchlenia na čase.

34. Nájdite silu, aká musí pôsobiť na teleso, aby sa pohybovalo po elipse konštantnou uhlovou rýchlosťou ω.

35. Meraním sme zistili dĺžku strany štvorca $x = 3$ cm. Hodnota je zaťažená neistotou $\Delta x = 0,05$ cm. Určte neistotu, ktorej sa dopustíme, pri výpočte obsahu plochy štvorca.

36. Určte, ako musíme merať odpor rezistora R_x metódou Wheatstonovho mostíka, aby relatívna neistota bola minimálna (viď obrázok).



Kapitola 2

Integrály funkcií jednej premennej

Zintegrujte a výrazy upravte na jednoduchší tvar:

1. $\displaystyle\int \frac{(\sqrt{x}-1)^3}{x}\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int \frac{(x-1)^3}{\sqrt{x^3}}\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int \frac{x^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int \frac{(2\sqrt{x}+1)^2}{x^2}\,\mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^2-3}\,\mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-x-12}$
7. $\displaystyle\int (\frac{1}{\sqrt{2-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{2+x^2}})\,\mathrm{d}x$
8. $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$
9. $\displaystyle\int \frac{5x-2}{x^2+4}\,\mathrm{d}x$
10. $\displaystyle\int \frac{3x-4}{x^2-4}\,\mathrm{d}x$
11. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$
12. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+3x+3}$
13. $\displaystyle\int x\,\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$
14. $\displaystyle\int x^2\mathrm{e}^{x^3}\,\mathrm{d}x$
15. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^{2x}}{1-3\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x$
16. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{x}}$
17. $\displaystyle\int \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$
18. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x(1+\ln x)}$
19. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x\ln(\ln x)}$
20. $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x^3+2)^2}\,\mathrm{d}x$
21. $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\sqrt{1+2\cos x}}\,\mathrm{d}x$
22. $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x$

23. $\displaystyle\int \cos x\sqrt{1+4\sin x}\,\mathrm{d}x$

24. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x\cos^2 x}$

25. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x\cos x}$

26. $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x$

27. $\displaystyle\int \sin^2 x\cos^3 x\,\mathrm{d}x$

28. $\displaystyle\int \sin^7 x\,\mathrm{d}x$

29. $\displaystyle\int (1+2\cos x)^3\,\mathrm{d}x$

30. $\displaystyle\int (1-\sin 2x)^2\,\mathrm{d}x$

31. $\displaystyle\int \sin 3x\sin 5x\,\mathrm{d}x$

32. $\displaystyle\int \sin 5x\cos 8x\,\mathrm{d}x$

33. $\displaystyle\int \frac{x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$

34. $\displaystyle\int \cos(\ln x)\,\mathrm{d}x$

35. $\displaystyle\int \frac{x\cos x}{\sin^3 x}\,\mathrm{d}x$

36. $\displaystyle\int x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$

37. $\displaystyle\int x^2\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x$

38. $\displaystyle\int \operatorname{arctg}\sqrt{2x-1}\,\mathrm{d}x$

39. $\displaystyle\int \ln(x^2+1)\,\mathrm{d}x$

40. $\displaystyle\int \ln 3x\,\mathrm{d}x$

41. $\displaystyle\int x^2\ln x\,\mathrm{d}x$

42. $\displaystyle\int \frac{\ln(\ln x)}{x}\,\mathrm{d}x$

43. $\displaystyle\int (-x^2+x)\mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x$

44. $\displaystyle\int x^2\cos x\,\mathrm{d}x$

45. $\displaystyle\int x^2\sin x\,\mathrm{d}x$

46. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+3\cos^2 x}$

47. $\displaystyle\int \operatorname{tg}^3 x\,\mathrm{d}x$

48. $\displaystyle\int \operatorname{cotg}^3 x\,\mathrm{d}x$

49. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x\cos^2 x}$

50. $\displaystyle\int \frac{1+\cos x}{\sin^3 x}\,\mathrm{d}x$

51. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{3\sin x+4\cos x}$

52. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{2\sin x+\sin 2x}$

53. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x+\cos x}$

54. $\displaystyle\int \frac{1+\operatorname{tg} x}{\sin 2x}\,\mathrm{d}x$

55. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$

56. $\displaystyle\int \frac{1}{2}\cos\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$

57. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}$

58. $\displaystyle\int \frac{3\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{x^2+1}$

59. Hustota vody narastá s hĺbkou $\rho(h) = \rho_0 + \alpha h$, $\alpha > 0$. Do akej hĺbky H sa ponorí kocka o hrane a s hustotou ρ_0?

60. Rýchlosť hmotného bodu je daná vzťahom $v = 3t - \dfrac{1}{t^2}$. Určte dráhu, ktorú prejde hmotný bod v časovom intervale $t \in < 2\,\mathrm{s}, 5\,\mathrm{s} >$.

61. Vypočítajte moment zotrvačnosti homogénnej valcovej rúry s vnútorným polomerom R_1 a vonkajším polomerom R_2, vzhľadom na os rúry.

62. Okamžitá rýchlosť telesa v časovom intervale $< 0, t_0 >$ je daná funkciou $v(t) = \alpha t^2 - t$. Vypočítajte jeho priemernú rýchlosť.

63. Častica sa pohybuje po priamke tak, že $v(x) = \alpha(x^2 + x)$. Za aký čas dôjde z bodu 0 do bodu x_o.

64. Teleso sa pohybuje so zrýchlením $a(t) = 5t - 6t^2$. Nájdite závislosť rýchlosti a dráhy na čase.

65. Rýchlosť pohybu hmotného bodu je $v = t\exp(-\frac{t}{100})$. Určte dráhu, ktorú teleso prejde od času 0 do zastavenia.

2.1 Integrály racionálnych funkcií

Zintegrujte a výrazy upravte na jednoduchší tvar:

1. $\displaystyle\int \frac{2x^2 - 5x + 1}{x^3 - 2x^2 + x}\,\mathrm{d}x$

2. $\displaystyle\int \frac{2x^2 + x + 4}{x^3 + x^2 + 4x + 4}\,\mathrm{d}x$

3. $\displaystyle\int \frac{11x + 16}{(x-1)(x+2)^2}\,\mathrm{d}x$

4. $\displaystyle\int \frac{5x - 14}{x^3 - x^2 - 4x + 4}\,\mathrm{d}x$

5. $\displaystyle\int \frac{3x^2 + 2x + 1}{(x+1)^2(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$

Kapitola 3

Vektorový a maticový počet

1. Majme vektory $\vec{a} = (0,2,4)$, $\vec{b} = (1,3,5)$ a $\vec{c} = (6,1,3)$. Vypočítajte $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $|\vec{c}|$, $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$, $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$, $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{c} - \vec{a})$, $(\vec{b} + \vec{c}) \times (\vec{a} - \vec{b})$, $(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 + (\vec{c} \times \vec{a})^2$.

2. Majme vektory $\vec{a} = (1,2,3)$, $\vec{b} = (5,3,2)$ a $\vec{c} = (1,1,4)$. Vypočítajte $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $|\vec{c}|$, $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$, $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$, $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{c} - \vec{a})$, $(\vec{b} + \vec{c}) \times (\vec{a} - \vec{b})$, $(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 + (\vec{c} \times \vec{a})^2$.

3. Určte obsah rovnobežníka, ktorého vrcholy tvoria body A[0,0,0], B[1,2,3],C a D[3,2,1]. Dopočítajte súradnice bodu C.

4. Body A[2,1,0], B[2,2,3], C[0,1+$\sqrt{40}$,0] tvoria vrcholy trojuholníka. Pomocou vektorového súčinu nájdite jeho obsah.

5. Body A[3,2,1], B[0,4,2], C[1,1,-2] tvoria vrcholy trojuholníka. Pomocou vektorového súčinu nájdite jeho obsah.

6. Body A[4,1,0], B[4,-2,-3], C[1,-5,-3] tvoria vrcholy trojuholníka. Určte veľkosti vnútorných uhlov trojuholníka a spočítajte jeho obsah pomocou vektorového súčinu.

7. Body A[2,-4,9], B[-1,-4,5], C[6,-4,6] tvoria vrcholy trojuholníka. Spočítajte jeho obsah pomocou vektorového súčinu a určte veľkosť uhla α.

8. Koľko vektorov rozmeru 1×2 je potrebných, aby tvorili bázu priestoru $\mathcal{R}^2$. Koľko rôznych báz má tento priestor? Skúste zdôvodniť?

9. Sú dané matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 7 \\ -2 & 9 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$. Vypočítajte $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$.

10. Sú dané matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Vypočítajte $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$.

11. Sú dané matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 9 & 3 \\ 10 & 6 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Vypočítajte matice $\mathbf{A} - \mathbf{B}^T - 3\mathbf{C}$, $(3\mathbf{A}^T + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, $\mathbf{C} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$, $\mathbf{C}^2 \cdot \mathbf{B}$, $\mathbf{C} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$, $\mathbf{C}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ a determinanty $|\mathbf{A}|$, $|\mathbf{B}|$ a $|\mathbf{C}|$.

12. Vypočítajte determinant matice $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 6 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 5 & 3 & 5 & 7 \\ 13 & 10 & 3 & 8 & 13 \\ 7 & 2 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

13. Vypočítajte determinant matice $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

14. Vypočítajte determinant matice $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

15. Vypočítajte hodnosť matice $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

16. Vypočítajte hodnosť matice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

17. Pre matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ vypočítajte maticu $\mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}$. Ako skúšku správnosti vypočítajte maticu $\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$ mali by ste dostať maticu $\mathbf{A}$.

18. Pre matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ vypočítajte maticu $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^{-1}$. Ako skúšku správnosti vypočítajte maticu $\mathbf{C} \cdot \mathbf{B}$ mali by ste dostať maticu $\mathbf{A}$.

19. Majme matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 11 \\ 3 & 2 & 9 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Vypočítajte inverznú maticu $\mathbf{A}^{-1}$ a maticu $\mathbf{D} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}$.

20. Majme matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$. Vypočítajte inverznú maticu $\mathbf{A}^{-1}$ a maticu $\mathbf{D} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}$.
21. Je daná matica $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -9 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & 6 \end{pmatrix}$ a matica $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$. Vypočítajte inverznú maticu $\mathbf{A}^{-1}$ a maticu $\mathbf{D} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}$.
22. Vypočítajte inverznú maticu k matici $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
23. Vypočítajte inverznú maticu k matici $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$
24. Vypočítajte inverznú maticu k matici $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
25. Majme matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Vypočítajte inverznú maticu $\mathbf{A}^{-1}$ a maticu $\mathbf{D} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^{-1}$.
26. Vypočítajte inverznú maticu k matici $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
27. Vypočítajte maticu $\mathbf{D} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1}$, kde $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
28. Vypočítajte maticu $\mathbf{D} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1}$, kde $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.
29. Vypočítajte maticu $\mathbf{C} = (\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{E}) \cdot \mathbf{B}$, kde $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $\mathbf{E}$ je jednotková matica.
30. Vypočítajte maticu $\mathbf{B} = \mathbf{A}^2 - \mathbf{A}^{-1} + \mathbf{E}$, kde $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{E}$ je jednotková matica.

31. Nájdite maticu prechodu medzi štandardnou ortonormálnou bázou určujúcou kartézsku súradnicovú sústavu a bázou určujúcou sférickú súradnicovú sústavu.

32. Nájdite maticu prechodu medzi štandardnou ortonormálnou bázou určujúcou kartézsku súradnicovú sústavu a bázou určujúcou cylindrickú súradnicovú sústavu.

33. Nájdite maticu $\mathbf{G}$ Galileovej transformácie časopriestoru. Galileova transformácia „časopriestoru" je daná priradením $(t, x, y, z)^T \mapsto (t', x', y', z')^T$, kde $t = t'$, $x' = x - v_x t$, $y' = y - v_y t$ a $z' = z - v_z t$, pričom vektor $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ interpretujeme ako rýchlosť. Vynásobením matíc dokážte vzťah $\mathbf{G_u} \cdot \mathbf{G_v} = \mathbf{G_{u+v}}$ a vysvetlite prečo sa tento vzťah nazýva *klasickým pravidlom skladania rýchlostí*.

34. Nájdite maticu prechodu (tzv. maticu rotácie) pri otočení dvojrozmernej kartézkej súradnicovej sústavy o uhol α.

Kapitola 4

Obyčajné diferenciálne rovnice 1. rádu

Nájdite všeobecné riešenie diferenciálnych rovníc:

1. $\dfrac{yy'}{\sqrt{1+y^2}} + \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} = 0$
2. $y' \operatorname{tg} x - y = \mathrm{a}$, kde a je konštanta
3. $2(1+\mathrm{e}^x)yy' = \mathrm{e}^x$
4. $y' \cos^2 x = (1+\cos^2 x)\sqrt{1-y^2}$
5. $1 - y^2 - 2xyy' = 0$
6. $(x^2-1)y^3 - e^x y' = 0$
7. $y' = 3^{3x+2y}$
8. $y - y^2 + xy' = 0$

Nájdite partikulárne riešenie diferenciálnych rovníc:

9. $x^2(y^3+5)\mathrm{d}x + (x^3+5)y^2\mathrm{d}y = 0$, $y(0) = 1$
10. $\dfrac{x}{1+y} - \dfrac{y}{1+x}y' = 0$, $y(0) = 1$
11. $y' \sin x \sin y = \cos x \cos y$, $y(\pi/4) = 0$
12. $\operatorname{tg} y \, \mathrm{d}x - x \ln x \, \mathrm{d}y = 0$, $x(\pi/2) = \mathrm{e}$
13. $2(1+\mathrm{e}^x)yy' = \mathrm{e}^x$, $y(0) = 0$
14. $y' \cos^2 x = (1+\cos^2 x)\sqrt{1-y^2}$, $y(0) = 1$

Nájdite všeobecné riešenie diferenciálnych rovníc:

15. $y' = \cos(x - y)$
16. $y' = \sin(x - y)$
17. $y' = \sqrt{2x + y - 3}$
18. $(x + y)^2 y' = 4$

Nájdite všeobecné riešenie diferenciálnych rovníc:

19. $y' = \dfrac{y}{x}\left(1 + \ln \dfrac{y}{x}\right)$
20. $y' = \dfrac{(x + y)y}{x^2}$
21. $y' = \dfrac{y}{x} + \operatorname{tg}\dfrac{y}{x}$
22. $y' = \dfrac{2xy}{3x^2 - y^2}$
23. $y^2 - xy + (x^2 + xy)y' = 0$
24. $(x - y)y' - y = 0$
25. $(x - y)y' = x + y$
26. $xy'(2x + y) = xy + y^2$
27. $x^2 + y^2 - 2xyy' = 0$
28. $y^2 - xy + x^2 y' = 0$
29. $xy' = y + x\cos^2\dfrac{y}{x}$
30. $x - y\cos\dfrac{y}{x} + xy'\cos\dfrac{y}{x} = 0$

Nájdite všeobecné riešenie diferenciálnych rovníc:

31. $y' = -\dfrac{2x + 3y - 1}{2x + 3y - 5}$
32. $y' = \dfrac{2x + y - 1}{4x + 2y + 5}$
33. $y' = \dfrac{2}{x + 2y} - 3$

34. $y' = -\dfrac{x-y+4}{x+y-2}$

35. $y' = \dfrac{3x-4y}{4x+7y-1}$

36. $y' = \dfrac{2x-y+1}{x-2y+1}$

37. $y' = \dfrac{x+y+3}{x-y-1}$

Nájdite všeobecné riešenie diferenciálnych rovníc metódou variácie konštánt:

38. $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$

39. $y' + 2xy = x\mathrm{e}^{-x^2}$

40. $y' + \dfrac{1-2x}{x^2}y = 1$

41. $y' + y\cos x = \cos x$

42. $y' = -\dfrac{4x}{x^2+1}y + \dfrac{1}{x^2+1}$

43. $y' - 6xy = 4x\mathrm{e}^{3x^2}$

44. $xy' + xy = \mathrm{e}^{-x}$

45. $xy' + y = \sin x$

46. $xy' + y = x\sin x$

Nájdite všeobecné riešenie diferenciálnych rovníc substitúciou $y = u \cdot v$:

47. $y'\cos x + y\sin x = \mathrm{a}$, kde a je konštanta

48. $(1+x^2)y' - xy = \mathrm{a}$, kde a je konštanta

49. $y' - y - x^2 = 0$

50. $y' - y\,\mathrm{tg}\,x = \mathrm{cotg}\,x$

51. $y'\sin x - y = \dfrac{1}{2}\sin 2x - \sin x$

Riešte úlohy

52. Rýchlosť tečenia vody v rieke u narastá lineárne z nuly na okrajoch po rýchlosť u_0 v strede rieky. Naprieč riekou sa pohybuje loď konštantnou rýchlosťou v. Nájdite trajektóriu lode.

53. Jeden z prvých modelov voľného pádu bol založený na predpoklade, že rýchlosť pádu telesa je priamo úmerná prejdenej dráhe $v = ks$. Ukážte, že tento model je teoreticky rozporný.

54. Nájdite vzletovú hmotnosť jednostupňovej rakety, ktorá má vyniesť do vesmíru teleso s hmotnosťou $M_0 = 500$ kg, pričom po vyhorení paliva má dosiahnuť konečnú rýchlosť $v_1 = 8$ km/s. Rýchlosť unikania plynu z motorov vzhľadom na raketu je $u^{'} = 2$ km/s. Pri riešení zanedbajte atmosféru Zeme a predpokladajte, že hmotnosť konštrukcie rakety predstavuje 10% hmotnosti paliva.

55. Chceme sa korčulovať, avšak miestne jazero ešte nie je zamrznuté. Situácia sa zlepší, keď teplota prízemnej vrstvy atmosféry klesne na $-5°$C a povrchová vrstva vody v jazere schladne na $0°$C. Ako dlho bude trvať kým sa na jazere vytvorí vrstva ľadu bezpečná na korčuľovanie (povedzme, tak 10 cm), za predpokladu, že teplota vzduchu sa meniť nebude.

Kapitola 5

Obyčajné diferenciálne rovnice 2. rádu

Nájdite všeobecné riešenie diferenciálnych rovníc:

1. $y'' - 7y' + 12y = 0$
2. $y'' + 5y' = 0$
3. $4y'' - 8y' + 5y = 0$
4. $4y'' - 20y' + 25y = 0$
5. $y'' - y' - 6y = 0$
6. $y'' - 4y' + 13y = 0$

Nájdite partikulárne riešenie diferenciálnej rovnice:

7. $y'' - 2y' + 5y = 0$, $y(\frac{\pi}{2}) = 0, y'(\frac{\pi}{2}) = 1$
8. $y'' + 9y = 0$, $y(\frac{\pi}{3}) = -1$, $y'(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$
9. $4y'' - 8y' + 5y = 0$, $y(\pi) = -\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}$, $y'(\pi) = 0$
10. $y'' + 4y' + 29y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 15$
11. $y'' - 4y' + 13y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 6$

Nájdite všeobecné riešenie diferenciálnych rovníc:

12. $y'' - 2y' + y = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$
13. $y'' - 7y' + 12y = 5$

14. $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{e^{3x}}{1 + e^{2x}}$

15. $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$

16. $y'' - 2y' = x^2 - x$

17. $y'' + y' = \dfrac{1}{e^x + 1}$

18. $y'' + y' - 6y = 12x^2 + 2x + 1$

19. $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x$

20. $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}$

Nájdite všeobecné riešenie diferenciálnych rovníc, ak poznáte jedno partikulárne riešenie:

21. $y'' - \dfrac{4}{x}y' + \dfrac{6}{x^2}y = 0$, $y_1 = x^2$

22. $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$, $y_1 = x^2$

23. $x^2y'' - xy' + y = 0$, $y_1 = x$

Riešte úlohu:

24. Na štartujúce lietadlo začne pôsobiť sila motorov, ktorej veľkosť rastie exponenciálne s časom ako F_0e^{3t}. Nájdite polohu lietadla $x(t)$, keď naň pôsobí odporová sila vzduchu, ktorej veľkosť je priamo úmerná rýchlosti. Stratu hmotnosti lietadla spaľovaním paliva neuvažujte.

Kapitola 6

Krivkové integrály 1. a 2. druhu

Riešte úlohy:

1. Dokážte vzťah $l = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{f^2(\varphi) + \dot{f}^2(\varphi)}\,\mathrm{d}\varphi$, kde l je dĺžka homogénnej krivky vyjadrenej v polárnych súradniciach $r = f(\varphi)$.

2. Vypočítajte krivkový integrál 1. druhu $\int\limits_C \sin 2x\,\mathrm{d}s$, $C : f(x) = \cos x$, $x \in < 0, \frac{\pi}{2} >$.

3. Vypočítajte krivkový integrál $\int\limits_C (x^2 + y^2)\mathrm{d}s$, kde C je krivka $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$, $t \in < 0, 2\pi >$.

4. Vypočítajte hmotnosť asteroidy $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ s hustotou $(x^{4/3} + y^{4/3})$. [Návod: krivku parametrizujte $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$].

5. Vypočítajte hmotnosť lemniskáty $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, $a > 0$ s hustotou $|y|$. [Návod: prejdite k polárnym súradniciam.]

6. Vypočítajte hmotnosť jedného závitu valcovej skrutkovice s hustotou $\dfrac{z^2}{x^2 + y^2}$.

7. Vypočítajte hmotnosť jedného závitu kužeľovej skrutkovice s hustotou $\rho = 2\sqrt{x^2 + y^2} - z$.

8. Vypočítajte hmotnosť jedného závitu valcovej skrutkovice s hustotou $\dfrac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$.

9. Vypočítajte hmotnosť úsečky s hustotou $\rho = x + y$ medzi bodmi A[0,0], B[1,2].

10. Vypočítajte hmotnosť krivky s hustotou $\rho = x^2$, ktorá je daná predpisom $y = \ln x$, $x \in < 1, 2 >$.

11. Vypočítajte hmotnosť nehomogénnej krivky s hustotou x^2, ktová vznikne prienikom plôch $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x - z = 0$.

12. Vypočítajte hmotnosť nehomogénnej krivky s hustotou $x+y$, ktorá vznikne prienikom plôch $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x = y$ v 1. oktante.

13. Vypočítajte hmotnosť oblúku elipsy $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ v 1. kvadrante. Hustota krivky je xy.

14. Určte súradnice ťažiska T jedného oblúku cykloidy $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in < 0, \pi >$, ak $\rho(x, y) = 1$.

15. Určte súradnice ťažiska T homogénneho [t.j. $\rho(x, y, z) = 1$] oblúku krivky $x = \mathrm{e}^t \cos t$, $y = \mathrm{e}^t \sin t$, $z = \mathrm{e}^t$, $-\infty < t \leq 0$.

16. Určte hmotnosť krivky danej predpisom: $x^2 + y^2 = 4$ s hustotou $\sqrt{4 - x^2}$.

17. Drát má tvar kružnice $x^2 + y^2 = a^2$. Vypočítajte jeho moment zotrvačnosti vzhľadom k jeho priemeru, ak je jeho hustota $\rho = |x| + |y|$.

18. Vypočítajte krivkový integrál druhého druhu $\displaystyle\int_C (2a - y)\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y$, kde krivka C je prvý oblúk cykloidy $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), t \in < 0, 2\pi >$.

19. Vypočítajte krivkový integrál druhého druhu $\displaystyle\int_C (x+1)\mathrm{d}y + y\mathrm{d}x$, kde krivka C je časť kružnice v 1. kvadrante.

20. Vypočítajte krivkový integrál druhého druhu $\displaystyle\int_C x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + (xz - y)\mathrm{d}z$, kde krivka C je daná parametricky $x = t^2$, $y = 2t$, $z = 4t^3$, $t \in < 0, 1 >$.

21. Vypočítajte $\displaystyle\oint_C (\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{-x}{x^2 + y^2}) \cdot \mathrm{d}\vec{s}$, kde C je ľavá polovica kružnice $x^2 + y^2 = 4$, orientovaná od bodu [0,2] k bodu [0,-2].

22. Vypočítajte krivkový integrál druhého druhu $\displaystyle\oint_C (x+y)\mathrm{d}x - (x-y)\mathrm{d}y$, kde C je kladne orientovaná elipsa.

23. Vypočítajte krivkový integrál druhého druhu $\displaystyle\oint_K \frac{\mathrm{d}x + \mathrm{d}y}{|x| + |y|}$, kde krivka K je obvod štvorca s vrcholmi $A = [1, 0]$, $B = [0, 1]$, $C = [-1, 0]$ a $D = [0, -1]$.

24. Je daný trojuholník s vrcholmi A[-1,0], B[0,2], C[2,0]. Obvod K trojuholníku ABC je integračnou cestou integrálu $\oint\limits_K [2x\mathrm{d}x - (x + 2y)\mathrm{d}y]$.

25. Vypočítajte krivkový integrál druhého druhu $\oint\limits_C (2 - y)\mathrm{d}x + (1 + x)\mathrm{d}y$, kde krivka C je obvod trojuholníka s vrcholmi $A = [0, 0]$, $B = [1, 1]$, $C = [0, 2]$.

26. Pomocou krivkového integrálu druhého druhu nájdite obsah S plochy ohraničenej lemniskátou $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$. [Návod: zvolte parametrizáciu $y = x \operatorname{tg} t$.]

27. Vypočítajte prácu, ktorú vykoná sila $\vec{F} = (y, z, x)$ po uzavretej krivke, ktorá je daná prienikom plôch $z = xy$ a $x^2 + y^2 = 1$.

28. Vypočítajte prácu, ktorú vykoná sila $\vec{F} = (\frac{y}{x}, x)$ po krivke $xy = 1$ a od bodu [3,1/3] do bodu [1/2,2].

29. Vypočítajte prácu, ktorú vykoná sila $\vec{F} = (x-y, x+y)$ po dráhe $y = x^2$, $x \in < 0, 2 >$.

30. Vypočítajte prácu, ktorú vykoná sila $\vec{F} = (y, -x, z)$ po obvode trojuholníka, ktorého vrcholy sú priesečníkmi roviny $3x + 2y + 6z = 6$ so súradnicovými osami.

31. Vypočítajte prácu, ktorú vykoná sila $\vec{F} = (yz, xy, yz)$ po obvode trojuholníka, ktorého vrcholy sú priesečníkmi roviny $2x + 3y + 4z = 12$ so súradnicovými osami.

32. Vypočítajte prácu, ktorú by vykonalo tiažové pole pri jazde tobogánom s presne troma otáčkami, ak by tiažové pole vyzeralo $\vec{F_g} = -mg(0, 0, z)$. (Tobogán si možno predstaviť ako valcovú skrutkovicu.)

33. Určte moment zotrvačnosti jedného závitu homogénnej valcovej skrutkovice $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = \frac{h}{2\pi} t$ vzhľadom k súradnicovým rovinám yz a xy.

Kapitola 7

Skalárne a vektorové funkcie viacerých premenných. Kmeňová funkcia. Diferenciálne operátory.

1. Dokážte, že zo stavovej rovnice ideálneho plynu $pV = nRT$, kde p je tlak, V objem, T termodynamická teplota, n látkové množstvo, R mólová plynová konštanta; vyplýva: $\dfrac{\partial p}{\partial V}\dfrac{\partial V}{\partial T}\dfrac{\partial T}{\partial p} = -1$.

2. Ukážte, že funkcia $u = \dfrac{1}{2\mathrm{a}\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mathrm{b})^2}{4\mathrm{a}^2 t}}$, kde a, b sú konštanty, vyhovuje rovnici vedenia tepla $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \mathrm{a}^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

3. Ukážte, že funkcia $u = \dfrac{1}{r}$, kde $r = \sqrt{(x-\mathrm{a})^2 + (y-\mathrm{b})^2 + (z-\mathrm{c})^2}$, kde a, b, c sú konštanty, vyhovuje Laplaceovej rovnici $\Delta u = 0$ pre $r \neq 0$.

4. Vypočítajte deriváciu funkcie $\dfrac{x}{y}$ v bode [4,-1] v smere $\vec{u} = (-2, 3)$.

5. Vypočítajte deriváciu funkcie $\cos(xy) + \ln z^2$ v bode $[\pi, 1, 1]$ v smere $\vec{u} = (1, 1, 1)$.

6. Vypočítajte deriváciu funkcie $x^2 - y^2$ v bode [1,1] v smere $\vec{u} = (1, -1)$.

7. Vypočítajte deriváciu funkcie $x + 2y$ v bode [2,1] v smere $\vec{u} = (1, 2)$.

8. Vypočítajte deriváciu funkcie $x + y^2 + z^3$ v bode [0,1,2] v smere $\vec{u} = (1, 0, 1)$.

9. Vypočítajte deriváciu funkcie $x^3 - y^2 + 2xy$ v bode [2,3] v smere $\vec{u} = (-3, 2)$.

10. Nájdite hodnotu derivácie funkcie $x^2 - xy - y^2$ v smere najväčšieho rastu v bode [1,-3].

Nájdite kmeňovú funkciu, ktorá má totálny diferenciál v tvare:

11. $(2xy - 2x - 1)\mathrm{d}x + (x^2 + 2y + 1)\mathrm{d}y$
12. $\sin^2 y\, \mathrm{d}x + (x \sin 2y - 2y)\mathrm{d}y$
13. $(1 + x\cos 2y)\mathrm{d}x - x^2 \sin 2y \mathrm{d}y$
14. $\left(\dfrac{\ln x}{y^2} - y\right)\mathrm{d}y - \dfrac{1}{xy}\,\mathrm{d}x$
15. $\left(\ln(x-y) + \dfrac{x}{x-y}\right)\mathrm{d}x - \dfrac{x}{x-y}\,\mathrm{d}y$
16. $(3x^2 + 2y)\mathrm{d}x + (2x - 3)\mathrm{d}y$
17. $(6x^3y^2 + 3x^2)\mathrm{d}x + (3x^4y + \cos y)\mathrm{d}y$
18. $-\dfrac{2x}{x^2+y^2}\mathrm{d}x - \dfrac{2y}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$
19. $\dfrac{1}{y^2}\mathrm{d}x + (-\dfrac{2x}{y^3} + \mathrm{e}^y)\mathrm{d}y$
20. $\dfrac{3x^2}{2\sqrt{x^3+y^3}}\mathrm{d}x + \dfrac{3y^2}{2\sqrt{x^3+y^3}}\mathrm{d}y$

Riešte úlohy:

21. Ukážte, že potenciálovosť vektorového poľa je spojená s vetou o existencii kmeňovej funkcie.
22. Dokážte platnosť operátorovej identity $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$.
23. Dokážte platnosť operátorovej identity $\nabla \times \nabla U = 0$.
24. Dokážte platnosť operátorovej identity $\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \Delta\vec{A}$.
25. Ukážte, že platí vektorová identita $\mathrm{rot}(f\vec{A}) = \mathrm{grad} f \times \vec{A} + f\mathrm{rot}\vec{A}$.
26. Rozhodnite o platnosti tvrdenia $\mathrm{grad}(fg) = f\mathrm{grad} g$.
27. Spočítajte $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\vec{F})$, $\vec{F} = (xyz, y(x^2 - z^2), xy + zx + yz)$.
28. Spočítajte $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\vec{F})$, $\vec{F} = (x^2y, y^2, z^2x)$.
29. Spočítajte $\mathrm{grad} f$, $f(x, y, z) = 2xyz + x^2y + y^2z + z^2x$.
30. Nájdite potenciál vektorového poľa $\vec{A} = (2xy, x^2)$. Je tento potenciál určený jednoznačne?

31. Nájdite potenciál vektorového poľa $\vec{A} = (3x, 4y)$. Je tento potenciál určený jednoznačne?

32. Nájdite potenciál vektorového poľa $\vec{A} = (y^2, x^2)$. Je tento potenciál určený jednoznačne?

33. Spočítajte div$\vec{F}$, rot$\vec{F}$, $\nabla^2\vec{F}$, $\vec{F} = \left(\frac{\sin(xy)}{z}, \frac{\sin(yz)}{x}, \frac{\sin(zx)}{y}\right)$.

34. Nájdite gradient funkcie $F = y^2 \sin|\vec{r}|$.

35. Nájdite gradient funkcie $F = yx \ln|\vec{r}|$.

36. Nájdite gradient funkcie $F = \frac{z^2}{|\vec{r}|^2}$.

37. Nájdite gradient funkcie $F = \frac{x}{|\vec{r}|}$.

38. Nájdite vektorové pole dané potenciálom $U = -\frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{q}{r}$, kde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

39. Nájdite vektorové pole dané potenciálom $U = \frac{\mathrm{k}r^2}{2}$, kde k je konštanta, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

40. Nájdite všetky body, v ktorých sa veľkosť gradientu funkcie $z = (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$ rovná 2.

41. Teplota roviny je $T(x, y) = \mathrm{e}^{-x-2y}$. V bode [0,0] je častica, ktorá sa pohybuje rýchlosťou 2 ms^{-1} na východ a 3 ms^{-1} na juh. Aká je okamžitá rýchlosť zmeny jej teploty v bode [0,0]?

42. Tlak 8 molov ideálneho plynu klesá rýchosťou 0,4 a jeho teplota klesá rýchlosťou 0,5. Ako rýchlo sa mení objem, ak počiatočné hodnoty sú V = 1000 m^3 a p = 3 Pa?

43. Nájdite uhol, ktorý v bode [1,0,0] zvierajú grafy funkcií $\ln\sqrt{x^2 + y^2}$ a $\mathrm{e}^{xy} - 1$.

44. Nájdite dráhu častice pohybujúcej sa v rovine s rozložením potenciálu $V(x, y) = 50 - x^2 - 4y^2$, ak vieme, že prechádza bodom [1,-2].

45. Teplota gule je $T(x, y, z) = -x^2 - 2y^2 - z^2$. Teplomilná častica sa pohybuje z bodu [1,1,1] v smere najväčšieho rastu teploty. Nájdite dráhu častice.

Kapitola 8

Kombinatorika

1. O telefónnom čísle náhodnej známosti sme si zapamätali, že je deväťmiestne, začína dvojčíslím 23, neobsahuje žiadne dve rovnaké číslice a je deliteľné číslom 25. Určte koľko telefónnych čísel prichádza do úvahy.

2. Určte, koľkými spôsobmi sa na šesťmiestnu lavicu môže usadiť šesť chlapcov, ak a) dvaja chcú sedieť vedľa seba, b) dvaja chcú sedieť vedľa seba a tretí chce sedieť na kraji.

3. V sklade je 10 výrobkov, medzi ktorými sú 3 vadné. Koľkými spôsobmi z nich môžeme vybrať kolekciu 5 výrobkov tak, aby a) všetky boli dobré b) bol práve jeden vadný c) bol nanajvýš jeden vadný d) bol aspoň jeden vadný.

4. V kupé železničného vozňa sú oproti sebe dve lavice po piatich miestach. Z desiatich cestujúcich štyria chcú sedieť v smere jazdy, traja proti smeru a zvyšku je to ľahostajné. Určte koľkými spôsobmi sa môžu usadiť.

5. Na maturitnom večierku je 15 chlapcov a 12 dievčat. Určte, koľkými spôsobmi z nich je možné vybrať 4 tanečné páry.

6. Zo skupiny 10 kozmonautov je treba vybrať štvorčlennú posádku. Je však nevhodné, aby určitý dvaja kozmonauti leteli spolu. Koľko rôznych výberov posádky je možné vytvoriť.

7. Určte, koľkými spôsobmi je možné na šachovnici 8×8 postaviť 5 rôznych figúrok tak, aby dve stály na čiernych a tri na bielych políčkach.

8. Osem hostí sa má ubytovať v troch izbách, pričom dve izby sú trojlôžkové a jedna dvojlôžková. Koľkými spôsobmi je možné hostí ubytovať.

9. Kufrík má heslový zámok, ktorý sa otvorí, keď na každom z piatich kotúčov nastavíme správnu číslicu. Na každom kotúči je desať číslic. Určte maximálny počet pokusov, ktoré je nutné uskutočniť, ak chceme kufrík otvoriť a zabudli sme heslo.

10. Koľko znakov, ktoré sú zložené z jedného až štyroch signálov, môže obsahovať Morseova abeceda? (Signálom rozumieme „bodku“ alebo „čiarku“.)

11. Koľko rôznych poznávacích značiek pre automobily je možné použiť, ak je k dispozícii 21 písmen a 10 číslic, pričom značka sa skladá z troch písmen na začiatku a ďalej štyroch číslic.

12. Určte počet všetkých desaťciferných prirodzených čísel, ktorých ciferný súčet je rovný trom.

13. Určte počet kvádrov, ktorých veľkosti hrán sú prirodzené čísla rovné nanajvýš desiatim. Koľko je v tomto počte kociek?

14. V železničnom depe je 20 osobných, 7 lôžkových a 5 poštových vozňov. Koľko rôznych súprav s piatimi vozňami je možné zostaviť, ak na poradí vozňov v súprave nezáleží.

15. Klenotník vyberá do prsteňa tri drahokamy. K dispozícii má 3 rubíny, 2 smaragdy a 5 safírov. Koľkými spôsobmi môže tento výber uskutočniť, ak kamene rovnakého druhu považujeme za nerozlíšiteľné.

16. Hokejový zápas skončil výsledkom 8:6 po tretinách (2:1, 2:3, 4:2). Koľko rôzznych priebehov mohol zápas mať? Pod priebehom rozumieme sled gólov domácich a hostí.

17. Koľko je všetkých trojciferných prirodzených čísel?

18. Z 35 žiakov má ísť 25 na výlet a 10 na hokej? Koľkými spôsobmi sa môžu žiaci rozdeliť do skupín?

19. Na MHD sa kedysi používali lístky s deviatimi štvorčekmi označenými číslami 1 až 9. Po nastúpení si cestujúci lístok označil v označovači, ktorý predierkoval tri alebo štyri číslice na lístku. Koľko je rôznych spôsobov predierkovania lístka?

20. Na tanečnej zábave je 10 chlapcov a 6 dievčat. Koľkými spôsobmi je možné z nich vybrať dva tanečné páry?

21. Koľkými spôsobmi sa môže 8 chlapcov a 4 dievčatá rozdeliť na dve šesťčlenné volejbalové družstvá, ak má byť v každom družstve aspoň jedno dievča?

22. Koľkými spôsobmi je možné na šachovnici 8×8 vybrať dve rôznofarebné políčka tak, aby neležali v tom istom rade ani v tom istom stĺpci.

23. Desať ľudí sa má ubytovať v troch izbách. Jedna je štvorposteľová a dve trojposteľové. Koľkými rôznymi spôsobmi je možné hostí ubytovať?

24. V predajni majú tri druhy kávy po 100 g. Koľkými spôsobmi je možné kúpiť 500 g kávy?

Kapitola 9

Dvojné a trojné integrály

Riešte:

1. $\iint_\Omega (x^2y + xy^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde Ω je pravouholník: $x \in< 2, 5 >$, $y \in< 1, 3 >$.

2. $\iint_\Omega (5x^2 - 2xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde Ω je trojuholník s vrcholmi $A = [0, 0]$, $B = [2, 0]$, $C = [0, 1]$.

3. $\iint xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde Ω je trojuholník s vrcholmi $A = [0, 0]$, $B = [1, 1]$ a $C = [2, 0]$.

4. $\iint_S \frac{1}{(1 + x + y)^2}\mathrm{d}S$, kde S je plocha $x + y \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z = 0$.

5. $\iint_R \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2 + y^2}$, kde R je štvorec so stredom v počiatku a so stranou (dĺžky $a = 2$) rovnobežnou s osou O_x.

6. $\iint_\Omega \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1 + x + 2y)^3}$, kde $\Omega =< 0, 1 > \times < 0, 4 >$

7. $\iint_\Omega xy^2 \sin(x^2 + y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde $\Omega =< 0, \sqrt{\pi} > \times < 0, \frac{\pi}{2} >$

8. $\iint_\Omega x^2y\mathrm{e}^{xy}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde $\Omega =< 0, 1 > \times < 0, 2 >$

9. $\iint_\Omega (x^2 + y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde Ω je oblasť ohraničená krivkou $|x| + |y| = 1$.

10. $\iint_\Omega (x + y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde Ω je uzavretá oblasť ohraničená krivkami $y = x^2$ a $y = x$.

11. $\iint_\Omega (2x + 3y + 1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde Ω je uzavretá oblasť ohraničená parabolou $y^2 = 2x$ a tetivou AB, kde $A = [2, -2]$, $B = [8, 4]$.

12. $\iint_\Omega x^2 y \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde Ω je oblasť ohraničená krivkami $y = x^2 - 2x + 1$ a $y = x + 1$.

13. $\iint_\Omega \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde oblasť Ω je ohraničená krivkami $1 \leq x^2 + y^2 \leq \mathrm{e}$, $y \geq 0$.

14. $\iint_\Omega \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde Ω: $x^2 + y^2 \leq 1$, $x \geq 0$

15. $\iint_\Omega \sin\sqrt{x^2+y^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde Ω: $\pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\pi^2$

16. $\iint_\Omega \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde Ω je uzavretá oblasť ohraničená elipsou $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ a osami O_x, O_y.

17. $\iint_\Omega \mathrm{e}^{-x^2-y^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde Ω je štvrťkruh s polomerom $r = a$ v 1.kvadrante.

18. Pomocou výsledku predošlého príkladu vypočítajte nevlastný integrál: $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x$.

19. $\iiint_\Omega (x+y)z \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde Ω je je osmina gule $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ z prvého oktantu.

20. $\iiint_V \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(x+y+z+1)^3}$: kde V je štvorsten ohraničený rovinami: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$.

21. $\iiint_\Omega z^4 \sin^3 y \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde oblasť Ω je ohraničená plochami $x = 0$, $x = \pi$, $y = 0$, $y = \frac{\pi}{2}$, $z = 0$, $z = x$.

22. $\iiint_\Omega z \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde oblasť Ω je ohraničená plochami $x = 2$, $y = 0$, $z = 0$, $y = 2x$, $z = x^2$.

23. $\iiint_\Omega xyz \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde Ω: $y = x^2$, $x = y^2$, $z = 0$, $z = xy$

24. Vypočítajte obsah rovinnej oblasti ohraničenej rovnicami: $y^2 = 4x + 4$, $y = 2 - x$.

25. Vypočítajte hmotnosť rovinnej doštičky danej nerovnicami: $x^2 + y^2 \leq r^2$, $x + y \geq 0$, $r > 0$ s hustoutou $\rho = x^2y$.

26. Vypočítajte súradnice ťažiska homogénnej dosky ohraničenej parabolou $y^2 = 2x$ a priamkou $x = a$, $a > 0$

27. Vypočítajte moment zotrvačnosti tenkej homogénnej dosky v tvare obdĺžnika o stranách a a b a hmotnosti m vzhľadom k osi prechádzajúcej jej kratšou stranou.

28. Vypočítajte moment zotrvačnosti kruhovej dosky s polomerom R vzhľadom na jej ľubovoľnú dotyčnicu t, ak plošná hustota dosky je v každom bode rovná vzdialenosti tohoto bodu od dotyčnice t.

29. Nájdite moment zotrvačnosti homogénnej dosky $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2+y^2 \leq 1 \ \& \ |y| \leq \frac{1}{2}\}$ vzhľadom k osi x.

30. Vypočítajte moment zotrvačnosti dosky ohraničenej krivkami $y = 4 - x^2$, $y = 0$ vzhľadom k osi x, ak plošná hustota v každom bode je rovná vzdialenosti tohto bodu od osy y.

31. Vypočítajte moment zotrvačnosti dosky ohraničenej krivkou $4(x+1)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$, vzhľadom k osi y.

32. Vypočítajte objem homogénneho trojosého elipsoidu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

33. Vypočítajte objem homogénneho telesa ohraničeného nerovnicami: $x^2+y^2+z^2 \geq a^2$, $x^2+y^2+z^2 \leq b^2$, $x^2+y^2-z^2 \leq 0$, $z \geq 0$, $0 < a < b$.

34. Vypočítajte moment zotrvačnosti homogénneho ihlanu vzhľadom k osi $\mathrm{O_z}$, ihlan je ohraničený rovinami: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$.

35. Nájdite súradnice ťažiska nehomogénnej gule $x^2+y^2+z^2 \leq 2az$, $a > 0$ s hustotou $\rho(x,y,z) = \dfrac{k}{x^2+y^2+z^2}$, $k > 0$.

36. Nájdite ťažisko gule s polomerom r, ktorej hustota v bode (x,y,z) je rovná 2. mocnine vzdialenosti tohto bodu od pevne daného bodu P ležiaceho na povrchu gule.

37. Nájdite súradnice ťažiska homogénneho kužeľa s podstavou o polomere R a výškou H.

38. Vypočítajte kinetickú (rotačnú) energiu homogénnej gule: $x^2+y^2+z^2 \leq a^2$, ktorá sa otáča okolo osi O_z konštantnou uhlovou rýchlosťou ω.

39. Bez použitia Gaussovej vety nájdite gravitačný potenciál homogénnej gule s polomerom R v bode P, ktorý je od stredu gule vzdialený $a \geq 0$.

40. Vypočítajte a) hustotu v strede Zeme, b) strednú hustotu Zeme. Predpokladajte, že Zem má tvar gule s polomerom $R \doteq 6,4 \cdot 10^6\,\mathrm{m}$ a že hustota ρ je lineárnou funkciou vzdialenosti od stredu Zeme, na povrchu je hustota $\rho_R \doteq 2,7 \cdot 10^3\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$, celková hmotnosť Zeme je $m \doteq 5,975 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$.

Kapitola 10

Plošné integrály 1. a 2. druhu

Riešte:

1. $\displaystyle\iint_S xyz\,\mathrm{d}S$, kde S je časť roviny $x+y+z=1$ z 1. oktantu.
2. $\displaystyle\iint_S \frac{1}{(1+x+y)^2}\mathrm{d}S$, kde S je plocha daná $x+y+z=1$, $x\geq 0$, $y\geq 0$, $z=0$.
3. $\displaystyle\iint_S x^2y^2\,\mathrm{d}S$, kde S je horná polovica guľovej plochy.
4. $\displaystyle\iint_S (x^2+y^2)\mathrm{d}S$, kde S je plocha daná rovnicami $x^2+y^2=z^2$, $z\geq 0$ a ohraničená plochou $x^2+y^2\leq 1$.
5. $\displaystyle\iint_S r^{-2}\mathrm{d}S$, kde $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, S je časť rotačnej valcovej plochy $x^2+y^2=R^2$ medzi rovinami $z=0$, $z=h$.
6. $\displaystyle\iint_S z\,\mathrm{d}S$, kde S je časť špirálovej plochy $x=u\cos v$, $y=u\sin v$, $z=v$, $u\in<0,a>$, $v\in<0,2\pi>$.
7. $\displaystyle\iint_S (xy+yz+xz)\,\mathrm{d}S$, kde S je časť plochy $z=\sqrt{x^2+y^2}$ ohraničenej plochou $x^2+y^2=2x$.
8. Nájdite obsah časti plochy $z=\sqrt{x^2+y^2}$, ktorú z nej vytne parabolický valec $z^2=2x$.
9. Nájdite obsah časti plochy $z=\sqrt{x^2+y^2}$, ktorá leží vnútri valca $x^2+y^2=2x$.
10. Nájdite obsah plochy S: $x^2+z^2=a^2\wedge z\geq 0\wedge |y|\leq x$, $a>0$.

11. Nájdite obsah S úseku zakrivenej plochy, zvanej *Vivianovo okno*, ktorá je časťou guľovej plochy $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ nad rovinou $z = 0$, vyťatou valcovou plochou $x^2 + y^2 = 2ax$, pre $a > 0$. Ide o tzv. florentinský alebo Vivianov problém z r. 1692.

12. Nájdite obsah časti povrchu Zeme ležiacej medzi 30. a 60. poludníkom a medzi 45. a 60. rovnobežkou. Predpokladajte, že Zem je guľa s polomerom R.

13. Vypočítajte hmotnosť parabolickej plochy $\frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, $z \in< 0, 1 >$ s hustotou $\rho = z$.

14. Vypočítajte hmotnosť guľovej plochy $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \geq 0$ ohraničenej plochou $x^2 + y^2 = \dfrac{R^2}{4}$ s plošnou hustotou $\sigma(x, y, z) = x + y + z$.

15. Určte hmotnosť plochy $z = xy$ nad kruhom $x^2 + y^2 \leq R^2$, ak jej plošná hustota je $\sigma(x, y, z) = |z|\sqrt{1 + x^2 + y^2}$.

16. Nájdite súradnice ťažíska homogénnej plochy $x + y + z = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

17. Nájdite súradnice ťažiska povrchu polgule $x^2+y^2+z^2 = R^2$, $z \geq 0$ s plošnou hustotou $\sigma(x, y, z) = k(x^2 + y^2)$, $k > 0$.

18. Vypočítajte polohu ťažiska plochy guľovej polsféry, ktorej hustota v danom bode sa číselne rovná vzdialenosti od osi z.

19. Vypočítajte moment zotrvačnosti plášťa homogénneho rotačného kužeľa $x^2+y^2 = z^2$, $0 \leq z \leq 1$ vzhľadom k osiam súradnicovej sústavy.

20. Vypočítajte tok vektora $\vec{F} = (x, -1, z^2)$ časťou valcovej plochy $x^2 + y^2 = 16$ ohraničenej rovinou $x + y + z = 4$.

21. Vypočítajte tok vektora $\vec{F} = (0, z, 0)$ povrchom hornej polgule o polomere R so stredom v počiatku súradnicovej sústavy.

22. Vypočítajte tok vektora $\vec{F} = (x^2, x, xz)$ vonkajšou stranou rotačného paraboloidu $y = x^2 + z^2$ v 1. oktante, ohraničenú časťou roviny $y = 1$.

23. Vypočítajte tok vektora $\vec{F} = (x^2, y^2, z^2)$ vonkajšou stranou uzavretej plochy S vyjadrenej rovnicami $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 1$.

24. Vypočítajte tok vektora $\vec{F} = (x, y, 2z)$ časťou plochy $z = x^2 + y^2 \leq 1$.

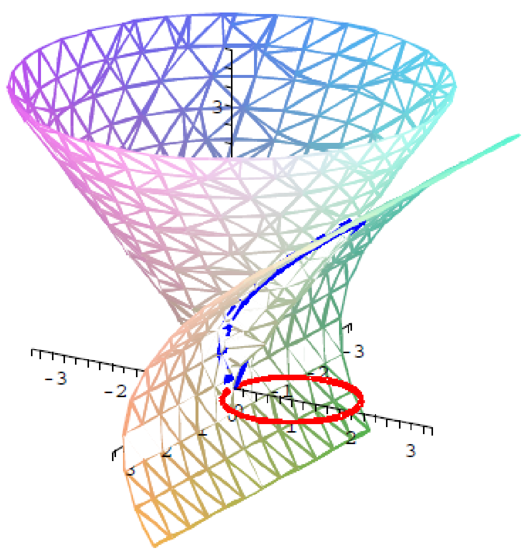
25. Určte tok vektora $\vec{F} = (x, y, z)$ časťou plochy $x + y + z = 2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

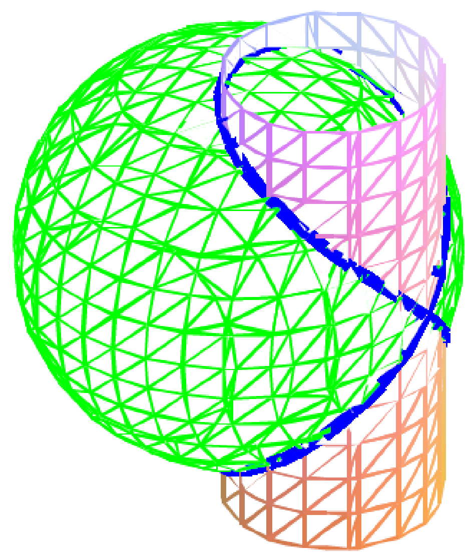
26. $\displaystyle\iint_S xz\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + yx\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + zy\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x$, kde S je vonkajšia strana ihlanu ohraničeného plochami $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

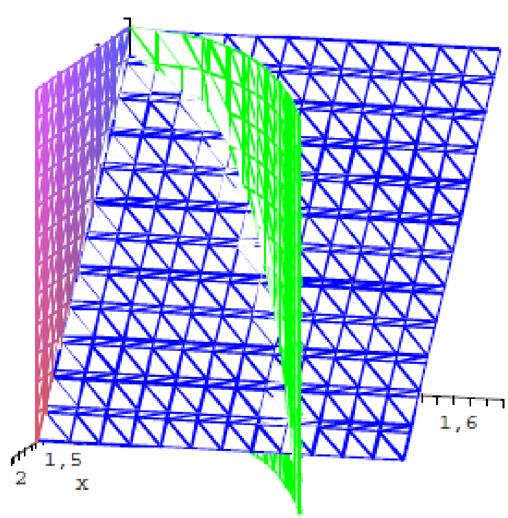
27. $\displaystyle\iint_S yz\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + zx\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + xy\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x$, kde S je vonkajšia strana uzavretej plochy tvorenej plochami o rovniciach $x^2 + y^2 = R^2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $z = h$.

28. Určte hydrostatickú silu, ktorá pôsobí na stenu nádoby tvaru rotačného kužeľa $z^2 = x^2 + y^2$, $0 \le z \le 1$, ak je nádoba naplnená kvapalinou o hustote ρ.

29. Vypočítajte hydrostatickú silu, ktorá pôsobí na stenu nádoby tvaru rotačného paraboloidu $z = x^2 + y^2 \le 1$, ak je nádoba naplnená kvapalinou o hustote ρ.







Kapitola 11

Integrálne vety

Riešte:

1. Majme funkcie $P(x,y) = -y$ a $Q(x,y) = x$. Zistite, čo za vzorec dostaneme z Greenovej vety.

2. Pomocou výsledku predošlej úlohy vypočítajte obsah elipsy.

3. Spočítajte prácu vektorového poľa $\vec{F} = (y^2, (x+y)^2)$ po obvode trojuholníka s vrcholmi v bodoch [4,0], [0,4], [4,4].

4. Spočítajte prácu vektorového poľa $\vec{F} = (y, (x-y)^2)$ po uzavretej krivke $x^2 + y^2 = 1$.

5. Spočítajte prácu vektorového poľa $\vec{F} = \left(\frac{2y}{x^2+4y^2}, -\frac{2x}{x^2+4y^2}\right)$ po uzavretej krivke $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

6. Spočítajte prácu vektorového poľa $\vec{F} = \left(-\frac{1}{x^2}, 2x\right)$ po krivke $x^2 - 4x + y^2 = -3$.

7. $\oint_C (2\mathrm{e}^{2x}\sin y - 3y^3)\mathrm{d}x + (\mathrm{e}^{2x}\cos y + \frac{4}{3}x^3)\mathrm{d}y$, C: $4x^2 + 9y^2 = 36$.

8. $\oint_C (\cos x \ln y + 2\mathrm{e}^{2x}y^2)\mathrm{d}x + (\frac{\sin x}{y} + 2\mathrm{e}^{2x}y + \frac{4}{3}x^3)\mathrm{d}y$, C: $4x^2 + y^2 = 4$.

9. Spočítajte prácu vektorového poľa $\vec{F} = (\mathrm{e}^x(1-\cos y), -\mathrm{e}^x(1-\sin y)$ po krivke, ktorá je hranicou oblasti $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le \pi \;\&\; 0 \le y \le x\}$.

10. Spočítajte prácu vektorového poľa $\vec{F} = (\sqrt{x} + y^3, x^2 + \sqrt{y})$ po uzavretej krivke C: $y = \sin x$, $x \in <0, \pi>$.

11. Spočítajte prácu vektorového poľa $\vec{F} = (\mathrm{e}^x + x^2y, \mathrm{e}^y - xy^2)$ po uzavretej krivke C: $x^2 + y^2 = 16$.

12. Spočítajte prácu vektorového poľa $\vec{F} = (x^2, x + 2y, 0)$ po obvode trojuholníka s vrcholmi v bodoch [1,0], [0,3], [0,0].

13. Spočítajte prácu vektorového poľa $\vec{F} = (y, z, x)$ po obvode trojuholníka s vrcholmi v bodoch [a,0,0], [0,a,0], [0,0,a].

14. Spočítajte prácu vektorového poľa $\vec{F} = (x^2y^3, 1, z)$ po krivke $x^2 + y^2 = r^2$, $z = 0$.

15. $\oint y\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y + x\mathrm{d}z$ po krivke, ktorá je prienikom plôch $x^2+y^2+z^2 = a^2$, $x+y+z = 0$.

16. Spočítajte prácu vektorového poľa $\vec{F} = (y^2, -x^2, z^2)$ po krivke, ktorá je prienikom paraboloidu $1 - y = x^2 + z^2$ a súradnicových rovín.

17. Pomocou Stokesovej vety vypočítajte integrál $\oint_k [(y-z)\,\mathrm{d}x + (z-x)\,\mathrm{d}y + (x-y)\,\mathrm{d}z]$, kde k je krivka daná rovnicami $x^2 + y^2 = a^2$, $hx + az = ah$, $a > 0$, $h > 0$, kladne orientovanej vzhľadom ku kladnej (hornej) strane roviny $hx + az = ah$.

18. Vypočítajte obsah plochy ohraničenej slučkou Descartesovho listu s rovnicou $x^3 + y^3 = 3axy$. (Pomoc: na určenie parametrických rovníc danej krivky dosaďte do danej rovnice $y = tx$.)

19. Nech orientovaná krivka C a orientovaná plocha S spĺňajú podmienky Stokesovej vety. Ukážte, že $\int_C f\mathrm{grad}\, g = \iint_S \mathrm{grad}\, f \times \mathrm{grad}\, g$, kde f, g sú spojito diferencovateľné funkcie.

20. Spočítajte tok vektorového poľa $\vec{F} = (xy^2, yz, x^2z)$ uzavretou plochou S: $x^2+y^2 = 4$, $z = 1$, $z = 3$.

21. Spočítajte tok vektorového poľa $\vec{F} = (xz, xy, yz)$ uzavretou plochou S: $x^2 + y^2 = 9$, $0 \leq z \leq 8$.

22. Spočítajte tok vektorového poľa $\vec{F} = (xz, xy, yz)$ uzavretou plochou S: $x^2 + y^2 = R^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $h \geq z \geq 0$.

23. Spočítajte tok vektorového poľa $\vec{F} = (x + y^2 + z^3, x^3 + y + z^2, x^2 + y^3 + z)$ povrchom kocky o hrane 1.

24. Spočítajte tok vektorového poľa $\vec{F} = (y, x, z^2)$ uzavretou plochou S: $x^2+y^2+z^2 = 4$, $z \geq 0$.

25. $\iint_S x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, S: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

26. Spočítajte tok vektorového poľa $\vec{F} = (x, 2y, 3z - x^2)$ povrchom elipsoidu so stredom v počiatku súradnicového systému a osami totožnými s osami súradnicovými osami.

27. Spočítajte tok vektorového poľa $\vec{F} = (x^2, y^2, z^2)$ uzavretou plochou S: $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 0$, $z = 1$.

28. Spočítajte tok vektorového poľa $rot\vec{F}$ uzavretou plochou S: $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \leq z \leq 1$, $\vec{F} = (yzx^2, xy^2z, xyz^2)$.

29. Spočítajte tok vektorového poľa $\vec{F} = (x^3, z, y)$ uzavretou plochou S: $z = x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq 4$.

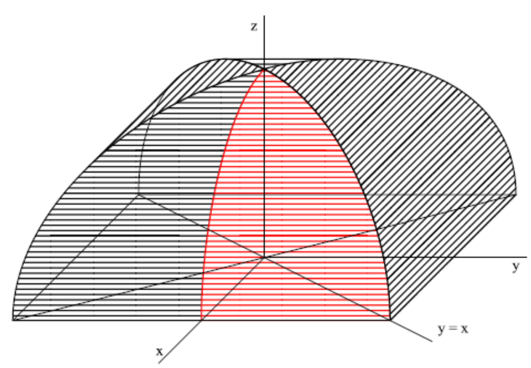
30. Pomocou Gaussovej-Ostrogradského vety vypočítajte objem telesa, ktorého hranicou je torus (anuloid) $x = (b + a\cos\psi)\cos\varphi$, $y = (b + a\cos\psi)\sin\varphi$, $z = a\sin\psi$ $(0 < a \leq b)$.

31. Pomocou Gaussovej-Ostrogradského vety vypočítajte objem priestoru pod kláštornou klenbou so štvorcovým pôdorysom o strane jedna. Kláštornú klenbu tvorí prienik dvoch rotačných valcov s rovnakými polomermi, ktorých osy sú na seba kolmé.

32. Určte kapacitu guľového kondenzátora. [Návod: Na výpočet $\vec{E}$ použite Gaussovu-Ostrogradského vetu, potom určte potenciál medzi elektródami a nakoniec použite vzťah pre kapacitu $C = \frac{Q}{U}$.]

33. Zistite aká hodnota napätia vo vysokonapäťových vedeniach je ešte bezpečná.

34. Pri jadrovom štiepení U^{238} sa nuklid môže rozpadnúť na dve menšie sféry každá obsahujúca 46 protónov. Akého rádu bude elektrickostatická sila, ktorá bude brániť ich spätnej repulzii?



Kapitola 12

Totálny diferenciál. Taylorov rozvoj

Riešte:

1. Nájdite totálny diferenciál 1., 2. a 3. rádu funkcie $\ln(x+y^2)$ a vyčíslite pre bod $[1, 1]$.
2. Nájdite totálny diferenciál 1., 2. a 3. rádu funkcie $\dfrac{x^3}{y}$ a vyčíslite pre bod $[1, 1]$.
3. Pomocou Taylorovho rozvoja dokážte Eulerov vzorec $\mathrm{e}^{ix} = \cos x + i \sin x$.
4. Rozvinte funkciu $f(x, y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5$ do Taylorovho radu okolí bodu [1,-2] s presnosťou do 2. rádu.
5. Rozvinte funkciu $f(x, y) = \dfrac{x}{y}$ do Taylorovho radu v bode [1,1] s presnosťou do 3. rádu.
6. Rozvinte funkciu $f(x, y) = x^5 \sin y$ do Taylorovho radu okolí bodu [-1,0] s presnosťou do 3. rádu.
7. Rozvinte funkciu $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ do Taylorovho radu v bode [1,1,1].
8. Nájdite Taylorov rozvoj funkcie $\dfrac{\cos x}{\cos y}$ za predpokladu, že absolútne hodnoty x, y sú malé.
9. Nájdite Taylorov rozvoj funkcie $\cos(x + y + z) - \cos x \cos y \cos z$ za predpokladu, že absolútne hodnoty x, y, z sú malé.
10. Rozvinte funkciu $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ do Maclaurinovho radu.
11. Vypočítajte približnú hodnotu čísla $\dfrac{1,03^2}{\sqrt[3]{0,98\sqrt[4]{1,05^3}}}$ rozvojom do Taylorovho radu s presnosťou do 2. rádu.
12. Vypočítajte približnú hodnotu čísla $\sqrt{1,02^2 + 1,97^3}$ rozvojom do Taylorovho radu.

13. Vypočítajte približnú hodnotu čísla $\sqrt{\mathrm{e}}$ rozvojom do Taylorovho radu s presnosťou do 5. rádu.

14. Vypočítajte približnú hodnotu čísla $\sin 29^\circ \mathrm{tg} 46^\circ$ rozvojom do Taylorovho radu s presnosťou do 2. rádu.

15. Nájdite prírastok funkcie $f(x,y) = x^2y + xy^2 - 2xy$, ktorý sa získa prechodom z bodu [1,-1] do bodu [1+h,-1+k] s presnosťou do 3. rádu.

16. Vypočítajte integrál $\displaystyle\int \frac{\cos x}{x} \mathrm{d}x$

17. Vypočítajte integrál $\displaystyle\int \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x$

18. Vypočítajte $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^x}{x}\, \mathrm{d}x$

19. Ukážte, že relativistický vzťah pre kinetickú energiu $E_{\mathrm{k}} = mc^2 - m_0c^2$, kde $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ prejde pri malých rýchlostiach na klasický vzorec $E_{\mathrm{k}} = \dfrac{1}{2}m_0v^2$.

20. Ukážte, že Planckov zákon $B_\lambda(T) = \dfrac{2hc^2}{\lambda^5}\dfrac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}$ prejde pre veľké vlnové dĺžky na Rayleighov-Jeansov zákon $B_\lambda(T) = \dfrac{2ckT}{\lambda^4}$ známy v rádiovej fyzike.

Kapitola 13

Fourierove rady

Nájdite Fourierov rad nasledujúcich funkcií:

1. $f(t) = \begin{cases} 0, & t \in < 0, 1); \\ 1, & t \in < 1, 2) \end{cases}$

2. $f(t) = \begin{cases} 0, & t \in < 0, 2); \\ 2, & t \in < 2, 4) \end{cases}$

3. $f(t) = \begin{cases} 1, & t \in < 0, 1); \\ 2 - t, & t \in < 1, 2) \end{cases}$

4. Zariadenie vysiela signál $f(t) = \begin{cases} U, & t \in < 0, \frac{T}{4}); \\ 0, & t \in < \frac{T}{4}, \frac{3T}{4}); \\ U, & t \in < \frac{3T}{4}, T) \end{cases}$ Nájdite Fourierov obraz signálu. Ktoré frekvencie s objavia vo frekvenčnom spektre?

5. $f(t) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - t, & t \in < 0, \frac{\pi}{2}); \\ 0, & t \in < \frac{\pi}{2}, \pi) \end{cases}$

6. $1 - t$, $t \in < 0, 2)$

7. $t + \pi$, $t \in < -\pi, \pi)$

8. t, $t \in < 0, 1)$

9. t^2, $t \in < 0, 1)$

10. $|t|$, $t \in < -\pi, \pi)$

11. e^x, $x \in < 0, 2\pi)$

Použitá literatúra

- J. Hamhalter, J Tišer, Integrální počet funkcí více proměnných, skripta ČVUT, 2005
- J. Hamhalter, J Tišer, Diferenciální počet funkcí více proměnných, skripta ČVUT, 2005
- http://web.tuke.sk/sjf-kama/ulohy/Difrovnice/
- http://web.tuke.sk/fei-km/MA2/
- http://www2.cs.cas.cz/ horcik/Teaching/cvic14.pdf
- http://www.svf.tuke.sk/km/vodicka/Fourierove%20rady2.pdf
- http://hosting.pilsfree.net/sempron/VSB-TU_Ostrava/BS+MS_Slevarenske_technologie/4.semestr/Numericke_a_statisticke_metody/
- http://mat.fsv.cvut.cz/sibrava/vyuka_soub.htm
- http://euler.fd.cvut.cz/predmety/mta2/K611MA2_soubory/ma2_materialy.html
- http://sisyfos.zcu.cz/dalsi/taylor/taylor.htm
- http://wikipedia.org
- Vojtěch Krejčiřík: Kuchařka na řešení ODR
- Pavol Zlatoš: Lineárna algebra a geometria, skripta UK Bratislava, 2006
- Böhm, Klimo: Matematické metódy vo fyzike, skripta UK Bratislava
- Diblík a kol.: Matematika 1, skripta ČVUT
- Milada Kočandrlová: Plošný integrál, ČVUT, 2004

Dodatky

Vzorce z goniometrie

$\sin x = \cos(90^\circ - x)$

$\cos x = \sin(90^\circ - x)$

$\operatorname{tg} x = \operatorname{cotg}(90^\circ - x)$

$\operatorname{cotg} x = \operatorname{tg}(90^\circ - x)$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\operatorname{tg} x \operatorname{cotg} x = 1$

$1 + \operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$1 + \operatorname{cotg}^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x}$

$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$

$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$

$\operatorname{tg}(x \pm y) = \dfrac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$

$\operatorname{cotg}(x \pm y) = \dfrac{\operatorname{cotg} x \operatorname{cotg} y \mp 1}{\operatorname{cotg} y \pm \operatorname{cotg} x}$

$\sin(x+y)\sin(x-y) = \cos^2 y - \cos^2 x$

$\cos(x+y)\cos(x-y) = \cos^2 y - \sin^2 x$

$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$

$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos(2x)}{2}$

$\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos(2x)}{2}$

$\sin x + \sin y = 2 \sin \dfrac{x+y}{2} \cos \dfrac{x-y}{2}$

$\sin x - \sin y = 2 \cos \dfrac{x+y}{2} \sin \dfrac{x-y}{2}$

$\cos x + \cos y = 2 \cos \dfrac{x+y}{2} \cos \dfrac{x-y}{2}$

$\cos x - \cos y = -2 \sin \dfrac{x+y}{2} \sin \dfrac{x-y}{2}$

$\sin x \sin y = \dfrac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$

$\cos x \cos y = \dfrac{1}{2}[\cos(x-y) + \cos(x+y)]$

$\sin x \cos x = \dfrac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$

$\cos x \sin y = \dfrac{1}{2}[\sin(x+y) - \sin(x-y)]$

Derivácie

Pravidlá pre derivovanie

$$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x)$$

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$$\left[\frac{1}{g(x)}\right]' = -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Derivácie vybraných funkcií

$$\mathrm{c}' = 0$$

$$(x^{\mathrm{n}})' = \mathrm{n} \cdot x^{\mathrm{n}-1}$$

$$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$$

$$(\mathrm{a}^x) = \mathrm{a}^x \cdot \ln \mathrm{a}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\log_{\mathrm{a}} x)' = \frac{1}{x \cdot \ln \mathrm{a}}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\mathrm{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\mathrm{cotg}\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(\sec x)' = \sec x \cdot \mathrm{tg}\, x$$

$$(\mathrm{cosec}\, x)' = -\mathrm{cosec}\, x \cdot \mathrm{cotg}\, x$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$(\mathrm{arctg}\, x)' = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$(\mathrm{arccotg}\, x)' = -\frac{1}{1 + x^2}$$

$$(\mathrm{arcsec}\, x)' = \frac{1}{x \cdot \sqrt{x^2 - 1}}$$

$$(\mathrm{arccosec}\, x)' = -\frac{1}{x \cdot \sqrt{x^2 - 1}}$$

$$(\sinh x)' = \cosh x$$

$$(\cosh x)' = \sinh x$$

$$(\mathrm{tgh}\, x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

$$(\mathrm{cotgh}\, x)' = -\frac{1}{\sinh^2 x}$$

Integrály

Pravidlá pre integrovanie

$$\int [f(x) \pm g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\mathrm{d}x \qquad \int [c \cdot f(x)]\mathrm{d}x = c \int f(x)\mathrm{d}x$$

Integračné metódy

$$\int f(\varphi(t))\mathrm{d}x = F(\varphi(t)) \ \dots \text{ substitúcia}$$

$$\int f(x) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x) \cdot g(x) - \int g(x) \cdot f'(x)\mathrm{d}x \ \dots \text{ per partes}$$

Integrály vybraných funkcií

$$\int \mathrm{d}x = x \qquad \int k \cdot \mathrm{d}x = k \cdot x$$

$$\int x^{\mathrm{n}}\mathrm{d}x = \frac{x^{\mathrm{n}+1}}{\mathrm{n}+1} \qquad \int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x|$$

$$\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x \qquad \int \mathrm{a}^x\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{a}^x}{\ln a}$$

$$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x \qquad \int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x$$

$$\int \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| \qquad \int \operatorname{cotg} x\,\mathrm{d}x = \ln|\sin x|$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotg} x$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1} \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}} = \ln|x+\sqrt{x^2+1}|$$

$$\int \sinh x\,\mathrm{d}x = \cosh x \qquad \int \cosh x\,\mathrm{d}x = \sinh x$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cosh^2 x} = \operatorname{tgh} x \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sinh^2 x} = -\operatorname{cotgh} x$$

Vybrané substitúcie

$x = a\sin t$	$\mathrm{d}x = a\cos t\,\mathrm{d}t$	$\operatorname{tg} t = \dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\cos t = \dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$
$x = a\operatorname{tgh} t$	$\mathrm{d}x = \dfrac{a\,\mathrm{d}t}{\cosh^2 t}$	$\sinh t = \dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\cosh t = \dfrac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}$
$x = a\operatorname{tg} t$	$\mathrm{d}x = \dfrac{a\,\mathrm{d}t}{\cos^2 t}$	$\sin t = \dfrac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$	$\cos t = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}$
$x = a\sinh t$	$\mathrm{d}x = a\cosh t\,\mathrm{d}t$	$\cosh t = \dfrac{\sqrt{a^2+x^2}}{a}$	$\operatorname{tgh} t = \dfrac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$
$x = \dfrac{a}{\cos t}$	$\mathrm{d}x = \dfrac{a\sin t\,\mathrm{d}t}{\cos^2 t}$	$\sin t = \dfrac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}$	$\operatorname{tg} t = \dfrac{x^2-a^2}{a}$
$x = a\cosh t$	$\mathrm{d}x = a\sinh t\,\mathrm{d}t$	$\sinh t = \dfrac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}$	$\operatorname{tgh} t = \dfrac{x^2-a^2}{x}$
$\operatorname{tg} x = t$	$\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$	$\sin^2 x = \dfrac{t^2}{1+t^2}$	$\cos^2 x = \dfrac{1}{1+t^2}$
$\operatorname{tg} \dfrac{x}{2} = t$	$\mathrm{d}x = \dfrac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}$	$\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$	$\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$
$\operatorname{tgh}\dfrac{x}{2} = t$	$\mathrm{d}x = \dfrac{2\mathrm{d}t}{1-t^2}$	$\sinh x = \dfrac{2t}{1-t^2}$	$\cosh x = \dfrac{1+t^2}{1-t^2}$

Maticový počet

- Matica $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ v skrátenom zápise $\mathbf{A} = (a_{ij})$. m je počet riadkov, n je počet stĺpcov matice. Hovoríme, že matica $\mathbf{A}$ je rozmeru $m \times n$.

- *Jednotková matica* $\mathbf{E}$ je matica, pre ktorú platí: $a_{ij} = 1$ pre $i = j$ a $a_{ij} = 0$ pre $i \neq j$.

- *Hlavnou diagonálou* matice $\mathbf{A}$ typu $n \times n$ nazývame všetky prvky a_{ij}, $i = j$. *Vedľajšou diagonálou* matice $\mathbf{A}$ nazývame všetky prvky a_{ij}, $j = n - i + 1$.

- *Transponovanou* maticou k matici $\mathbf{A}$ typu $m \times n$ nazývame maticu $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ rozmeru $n \times m$, ktorú dostaneme z matice $\mathbf{A}$ zámenou (transpozíciou) riadkov a stĺpcov. T.j. platí $a^{\mathrm{T}}_{ik} = a_{ki}$.

- Ak $\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}$, tak matica $\mathbf{A}$ je *symetrická.* Ak $\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = -\mathbf{A}$, tak matica $\mathbf{A}$ je *antisymetrická.*

- *Trojuholníková matica* $\mathbf{A}$ je matica, ktorej všetky prvky pod hlavnou diagonálou sú rovné nule, t.j. $a_{ij} = 0$ pre $i > j$.

- *Súčet matíc* je definovaný medzi dvoma maticami $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ rozmeru $m \times n$. Platí $\mathbf{S} = \mathbf{A} + \mathbf{B} \Leftrightarrow s_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

- Súčin matice $\mathbf{A}$ rozmeru $m \times n$ a skaláru α. Platí $\mathbf{B} = \alpha\mathbf{A} \Leftrightarrow b_{ij} = \alpha a_{ij}$.

- *Súčin matíc* je definovaný medzi dvoma maticami $\mathbf{A}$ rozmeru $m \times p$ a $\mathbf{B}$ rozmeru $p \times n$. Platí $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \Leftrightarrow c_{ij} = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} a_{ij} b_{jk}$. Výsledkom je matica $\mathbf{C}$ rozmeru $m \times n$. Pre maticový súčin neplatí komutatívny zákon, t.j. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$. Platí $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$.

- *Determinant matice* $\mathbf{A}$. Je definovaný iba pre štvorcové matice typu $n \times n$. Pre maticu rozmeru 2×2 platí $\det \mathbf{A} = |\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

- Determinant trojuholníkovej matice $\mathbf{A}$ je $\det \mathbf{A} = \displaystyle\prod_{i=j} a_{ij}$.

- *Laplaceov rozvoj.* Determinant matice $\mathbf{A}$ je $\det \mathbf{A} = \displaystyle\sum_{j} a_{ij}(-1)^{i+j}|\mathbf{A}_{ij}|$, kde $\mathbf{A}_{ij}$ je matica rádu $(n-1) \times (n-1)$, ktorá vznikne z matice $\mathbf{A}$ vyškrtnutím jej i-teho riadka a j-teho stĺpca.

- *Regulárna matica* $\mathbf{A}$ je matica, pre ktorú platí, že $\det A \neq 0$.

- *Inverzná matica* k matici $\mathbf{A}$ je matica $\mathbf{A}^{-1}$, pre ktorú platí, že $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$.
- Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné: (i) matica $\mathbf{A}$ je regulárna, (ii) k matici $\mathbf{A}$ existuje inverzná matica, (iii) všetky riadky a stĺpce matice $\mathbf{A}$ sú lineárne nezávislé.
- Pod pojmom *elementárne riadkové operácie* (skr. ERO) rozumieme tieto operácie na matici: (i) výmenu dvoch riadkov, (ii) vynásobenie riadka matice nenulovým skalárom k, (iii) pripočítanie nenulového skalárneho násobku niektorého riadku matice k jej inému riadku.
- Vplyv ERO na determinant matice. (i) determinant matice sa zmení na opačný, (ii) determinant matice sa zmení na k-násobok, (iii) determinant matice sa nezmení.
- Elementerne stĺpcové operácie (skr. ESO). Analogicky k ERO.
- Ak maticu upravíme pomocou ERO na trojuholníkový tvar a žiadny z riadkov nie je nulový, potom sú riadky matice *lineárne nezávislé*. V opačnom prípade sú riadky matice *lineárne závislé*.
- *Hodnosť štvorcovej matice* $h(\mathbf{A})$ je počet nezávislých riadkov/sĺpcov.
- Výpočet inverznej matice. $(\mathbf{A}|\mathbf{E}) \stackrel{ERO}{\longrightarrow} (\mathbf{E}|\mathbf{A}^{-1})$.

Vektorový počet

- Majme vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ so zložkami $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Uhol, ktorý vektory zvierajú označme α. Jednotkové vektory kartézskej súradnicovej sústavy označme $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$. Potom definujeme:

  i) veľkosť vektora $|\vec{u}| = \sqrt{\sum_i u_i^2}$

  ii) skalárny súčin $\vec{u} \cdot \vec{v} = \sum_i u_i v_i = |\vec{u}||\vec{v}| \cos\alpha$

  iii) vektorový súčin $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$

- Vlastnosti vektorového súčinu:

  i) $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}| \sin\alpha$

  ii) $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$

  iii) $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$

  iv) $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) + \vec{v} \times (\vec{w} \times \vec{u}) + \vec{w} \times (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$ … Jacobiho identita

- Majme vektory $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, …, $\vec{x}_n$ a skaláry a_1, a_2, …, a_n. Vektor $\vec{x} = \sum_i a_i \vec{x}_i$ nazývame *lineárnou kombináciou* vektorov $\vec{x}_1$, …, $\vec{x}_n$ s koeficientami a_1, …, a_n.

- Majme vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$. Ak existuje aspoň jedno $a_i \neq 0$ také, že platí $\sum_i a_i \vec{x}_i = 0$, potom hovoríme, že vektory $\vec{x}_1$, …, $\vec{x}_n$ sú *lineárne závislé*. V opačnom prípade hovoríme, že vektory sú *lineárne nezávislé*.

Báza. Prechod medzi bázami

- Postupnosť vektorov $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n$ z vektorového priestoru V nazývame *bázou* vektorového priestoru V ak: (i) je lineárne nezávislá, (ii) pridaním ľubovolného ďalšieho vektoru vznikne postupnosť vektorov lineárne závislá.

- Nech vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n$ tvoria bázu vektorového priestoru V. Potom každý vektor $\vec{x} \in V$ možno jednoznačne vyjadriť v tvare lineárnej kombinácie:
  $\vec{x} = c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + ... + c_n\vec{u}_n$.

- Vektor $\vec{c} = (c_1, c_2, ..., c_n)$ z predošlej vety budeme nazývať *súradnice vektora* $\vec{x}$ vzhľadom na bázu $\alpha = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n)$. Označenie $\vec{c} = (\vec{x})_\alpha$.

- Nech $\alpha = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n)$, $\beta = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n)$ sú dve bázy toho istého vektorového priestoru V. *Maticou prechodu* z bázy β do bázy α nazývame maticu $P_{\alpha,\beta}$ pre ktorú platí, že $(\vec{x})_\alpha = P_{\alpha,\beta} \cdot (\vec{x})_\beta$, pre každé $\vec{x} \in V$ alebo ekvivalentne $\alpha \cdot P_{\alpha,\beta} = \beta$.

- Majme dva súradnicové systémy $(x_1, x_2, ..., x_n)$ a $(\xi_1, \xi_2, ..., x_n)$, pričom medzi súradnicami platia transformačné vzťahy $x_i = f_i(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$. *Jacobiho maticou* nazveme maticu:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \cdots & \dfrac{\partial x_1}{\partial \xi_n} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & \cdots & \dfrac{\partial x_2}{\partial \xi_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial x_n}{\partial \xi_1} & \dfrac{\partial x_n}{\partial \xi_2} & \cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial \xi_n} \end{pmatrix}$$

Kuchárske recepty k diferenciálnym rovniciam

- $p(x) + q(y)y' = 0$ ... *DR 1. rádu so separovanými premennými*
  Riešenie: $\displaystyle\int p(x)\mathrm{d}x + \int q(y)\mathrm{d}y = c$

- $p_1(x)p_2(y) + q_1(x)q_2(y)y' = 0$ ... *DR 1. rádu so separovateľnými premennými*
  Riešenie: $\displaystyle\int \frac{p_1(x)}{q_1(x)}\mathrm{d}x + \int \frac{q_2(y)}{p_2(y)}\mathrm{d}y = c$

- $y' = f(ax + by + c)$
  Riešenie: substitúcia $z = ax + by + c \Rightarrow y = \dfrac{z - ax - c}{b} \Rightarrow y' = \dfrac{z' - a}{b}$. Dosadením do pôvodnej DR $y' = f(x)$ dostaneme DR so separovateľnými premennými $z' = b \cdot f(z) + a$

- $y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ ... *homogénne DR 1. rádu*
  Riešenie: substitúcia $z = \dfrac{y}{x} \Rightarrow y = zx \Rightarrow y' = z'x + z$. Dosadením do pôvodnej DR dostaneme DR so separovateľnými premennými $z' = \dfrac{f(z) - z}{x}$

- $y' = \dfrac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}$
  Riešenie: Zostavíme determinant $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$.

  1) Ak je determinant nulový, tak čitateľ a menovateľ sú lineárne závislé a jeden z nich môžeme zvoliť za substitúciu, napr. $z = a_1x + b_1y$. Dosadením do pôvodnej DR dostaneme DR so separovateľnými premennými.

  2) Ak je nenulový, treba nájsť riešenie sústavy rovníc $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ a $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, t.j. nájsť také x_0 a y_0, ktoré sústave vyhovujú. Zavedieme substitúciu $x = u + x_0,\ y = v + y_0$ a dosadím do pôvodnej DR dostaneme homogénnu DR.

- $y' + p(x)y = q(x)$ ... *lineárne DR 1. rádu*
  Riešenie metódou variácie konštánt:

  1) nájdeme riešime homogénnej DR $y' + p(x)y = 0$, dostaneme tzv. homogénne riešenie $y = C\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}$

  2) konštantu C nahradíme funkciou $C(x)$ a homogénne riešenie zderivujeme
  $y' = C'(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x} + C(x)p(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}$

  3) dosadíme do pôvodnej DR s pravou stranou a dostaneme
  $C'(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x} + C(x)p(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x} = C(x)p(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x} + q(x) \Rightarrow$
  $\Rightarrow C(x) = \int q(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x} + K$

  4) $C(x)$ dosadíme do homogénneho riešenia $y = C(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x} + K$ a dostaneme konečný výsledok $y = \left(\displaystyle\int q(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x} + K\right)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}$

- $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y^1 + a_n y = 0 \ldots$ *lineárne DR n-tého rádu s konštantnými koeficientami bez pravej strany*

  Riešenie:

  1) zostavíme charakteristickú rovnicu $k^n + a_1 k^{n-1} + \cdots + a_{n-1}k + a_n = 0$ a nájdeme jej korene. Tie môžu byť reálne alebo komplexné. Nech $k_1, k_2, \ldots, k_m$ sú navzájom rôzne reálne korene, pričom k_1 je t_1-násobný, k_2 je t_2-násobný, …, k_m je t_m-násobný. Nech l_i sú páry navzájom rôznych komplexných koreňov $\alpha_1 \pm i\beta_1$, $\alpha_2 \pm i\beta_2$, …, $\alpha_p \pm i\beta_p$, pričom $\alpha_1 \pm i\beta_1$ je s_1-násobný, $\alpha_2 \pm i\beta_2$ je s_2-násobný, … $\alpha_p \pm i\beta_p$ ako s_p-násobný koreň, pričom $\beta_i \neq 0$. Platí, že $t_1 + t_2 + \cdots + k_m + 2(s_1 + s_2 + \cdots + s_p) = n$

  2) fundamentálnym systémom riešení LDR n-tého rádu je potom systém funkcií e^{k_1x}, xe^{k_1x}, $x^2e^{k_1x}$, $\ldots$, $x^{t_1-1}e^{k_1x,}$, e^{k_2x}, xe^{k_2x}, $x^2e^{k_2x}$, $\ldots$, $x^{t_2-1}e^{k_2x,}$, $\ldots\ldots\ldots$, e^{k_mx}, xe^{k_mx}, $x^2e^{k_mx}$, $\ldots$, $x^{t_m-1}e^{k_mx,}$, $e^{\alpha_1x}\cos\beta_1x$, $xe^{\alpha_1x}\cos\beta_1x$, $\ldots$, $x^{s_1-1}e^{\alpha_1x}\cos\beta_1x$, $e^{\alpha_1x}\sin\beta_1x$, $xe^{\alpha_1x}\sin\beta_1x$, $\ldots$, $x^{s_1-1}e^{\alpha_1x}\sin\beta_1x$, $\ldots\ldots\ldots$, $e^{\alpha_px}\cos\beta_px$, $xe^{\alpha_px}\cos\beta_px$, $\ldots$, $x^{s_p-1}e^{\alpha_px}\cos\beta_px$, $e^{\alpha_px}\sin\beta_px$, $xe^{\alpha_px}\sin\beta_px$, $\ldots$, $x^{s_p-1}e^{\alpha_px}\sin\beta_px$

  Pre charakteristické korene LDR 2. rádu s konšt. koef. môžu nastať len tieto prípady:

  1) $k_1,\ k_2$ sú reálne a navzájom rôzne. Riešením je $y = c_1\mathrm{e}^{k_1x} + c_2\mathrm{e}^{k_2x}$

  2) k_1 je dvojnásobný reálny koreň. Riešením je $y = c_1\mathrm{e}^{k_1x} + c_2x\mathrm{e}^{k_1x}$

  3) k_1, k_2 sú komplexne združený koreň, t.j. $k_1 = \alpha + i\beta$, $k_2 = \alpha - i\beta$. Riešením je $y = c_1\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x + c_2\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x$

- $a_0(x)y^n + a_1(x)y^{n-1} + a_2(x)y^{n-2} + a_{n-1}(x)y^1 + a_n(x)y = g(x) \ldots$ *lineárne DR n-tého rádu s pravou stranou*:
  Riešenie metódou variácie konštánt:

  1) nájdeme fundamentálny systém homogénnej DR $a_0(x)y^n + a_1(x)y^{n-1} + a_2(x)y^{n-2} + a_{n-1}(x)y^1 + a_n(x)y = 0$, označme ho $y_1, y_2, \ldots, y_n$

  2) zostavíme Wronskián

$$\mathbf{W}(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & \ldots & y_n''(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{n-1}(x) & y_2^{n-1}(x) & \ldots & y_n^{n-1}(x) \end{vmatrix}$$

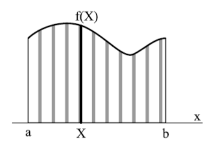
  3) zostavíme determinanty $W_i(x)$, ktoré vzniknú z predošlého wronskiánu nahradením i-teho stĺpca wronskiánu stĺpcom, ktorého prvky sú $0, 0, \ldots, 0, g(x)$

  4) výsledné riešenie pôvodnej DR má potom tvar $Y = \sum_{i=1}^{n} y_i(x) \int \frac{W_i(x)}{W(x)}\,dx$

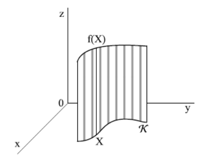
Krivkové integrály 1. a 2. druhu

Krivkový integrál prvého druhu $\int_C f \mathrm{d}s$

Krivkový integrál druhého druhu $\int_C \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$



Geometrie Riemannova integrálu



Geometrie křivkového integrálu

- Nech krivka C je daná parametricky: $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$, $t \in < t_1, t_2 >$, potom

  i) $\mathrm{d}s = \sqrt{\dot{\phi}^2(t) + \dot{\psi}^2(t) + \dot{\chi}^2(t)}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,\mathrm{d}t$

  ii) $\mathrm{d}\vec{s} = (\dot{\phi}(t), \dot{\psi}(t), \dot{\chi}(t))\mathrm{d}t = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})\mathrm{d}t$

- Nech rovinná krivka C je vyjadrená v polárnych súradniciach v tvare $r = f(\varphi)$. Potom $\mathrm{d}s = \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}\,\mathrm{d}\varphi$.

- Obsah S rovinnej oblasti A, ktorá je vnútornou oblasťou jednoduchej uzavretej po častiach hladkej krivky kladne orientovanej vzhľadom k danej sústave súradníc, je $S = \frac{1}{2}\oint_C (x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x)$.

- Dĺžka krivky C je $l = \int_C \mathrm{d}s$.

- Hmotnosť krivky C je $m = \int_C \lambda \mathrm{d}s$, kde λ je dĺžková hustota krivky C.

- Práca A vykonaná po krivke C vo vektorovom poli $\vec{f}(P)$ je $A = \int_C \vec{f}(P)\mathrm{d}\vec{r}$.

- Nech C je rovinná krivka, potom pre súradnice ťažiska platí: $T\left[\frac{S_y}{m}, \frac{S_x}{m}\right]$.

Statický moment vzhľadom k súradnicovým osiam:

- $S_x = \int\limits_a^b y\lambda(x,y)\mathrm{d}s$
- $S_y = \int\limits_a^b x\lambda(x,y)\mathrm{d}s$

Moment zotrvačnosti vzhľadom k súradnicovým osiam:

- $I_x = \int\limits_a^b y^2\lambda(x,y)\mathrm{d}s$
- $I_y = \int\limits_a^b x^2\lambda(x,y)\mathrm{d}s$

- Nech C je priestorová krivka, potom pre súradnice ťažiska platí: $T\left[\frac{S_{yz}}{m}, \frac{S_{xz}}{m}, \frac{S_{xy}}{m}\right]$.

Statický moment vzhľadom k súradnicovým rovinám:

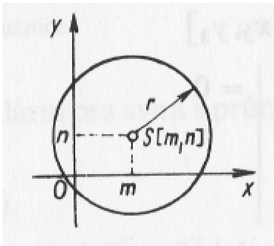
- $S_{xy} = \int\limits_C z\lambda(x,y,z)\mathrm{d}s$
- $S_{xz} = \int\limits_C y\lambda(x,y,z)\mathrm{d}s$
- $S_{yz} = \int\limits_C x\lambda(x,y,z)\mathrm{d}s$

Moment zotrvačnosti vzhľadom k súradnicovým osiam:

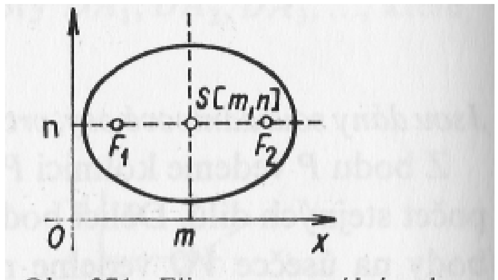
- $I_x = \int\limits_C (y^2+z^2)\lambda(x,y,z)\mathrm{d}s$
- $I_y = \int\limits_C (x^2+z^2)\lambda(x,y,z)\mathrm{d}s$
- $I_z = \int\limits_C (x^2+y^2)\lambda(x,y,z)\mathrm{d}s$

Krivky a plochy

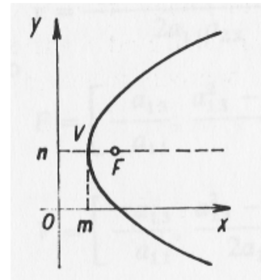
- Kružnica so stredom $\mathrm{S}[m,n]$ a polomerom r: $(x-m)^2+(y-n)^2=r^2$
- Parabola s osou rovnobežnou s O_x a vrcholom $\mathrm{V}[m,n]$: $(y-n)^2=2p(x-m)$, pre $p>0$ je parabola otvorená doprava, ohnisko $\mathrm{F}[m+\frac{p}{2},n]$
- Parabola s osou rovnobežnou s O_y a vrcholom $\mathrm{V}[m,n]$: $(x-m)^2=2p(y-n)$, pre $p>0$ je parabola otvorená nahor, ohnisko $\mathrm{F}[m,n+\frac{p}{2}]$
- Elipsa s hlavnou osou rovnobežnou s O_x a stredom $\mathrm{S}[m,n]$: $\dfrac{(x-m)^2}{a^2}+\dfrac{(y-n)^2}{b^2}=1$
- Hyperbola s reálnou osou rovnobežnou s O_x a stredom $\mathrm{S}[m,n]$: $\dfrac{(x-m)^2}{a^2}-\dfrac{(y-n)^2}{b^2}=1$
- Semikubická parabola (Neilova parabola): $y=ax^{2/3}$
- Prostá cykloida: $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$
- Skrátená (predĺžená) cykloida (podľa d): $x=a(t-d\sin t)$, $y=a(1-d\cos t)$
- Cassiniho krivka: $(x^2+y^2)^2-2e^2(x^2-y^2)=a^4-e^4$
- Bernoulliho lemniskáta: $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$
- Descartov list: $x^3+y^3-3axy=0$
- Dioklova kisoida: $\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+y^2-\left(\dfrac{a}{2}\right)^2=0$
- Strofoida: $(a-x)y^2=(a+x)x^2$
- Guľová plocha so stredom $[m,n,p]$ a polomerom r: $(x-m)^2+(y-n)^2+(z-p)^2=r^2$
- Stredová rovnica trojosého elipsoidu: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$, ak sú dĺžky dvoch poloos rovnaké, ide o rotačný elipsoid
- Stredová rovnica jednodielneho hyperboloidu: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$
- Stredová rovnica dvojdielneho hyperboloidu: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$
- Stredová rovnica eliptického paraboloidu: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-2z=0$
- Stredová rovnica hyperbolického paraboloidu: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-2z=0$
- Vrcholová rovnica kužeľovej plochy: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$
- Stredová rovnica eliptickej valcovej plochy kolmej k rovine xy: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$
- Stredová rovnica hyperbolickej valcovej plochy kolmej k rovine xy: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$
- Vrcholová rovnica parabolickej valcovej plochy kolmej k rovine xy: $y^2=2px$



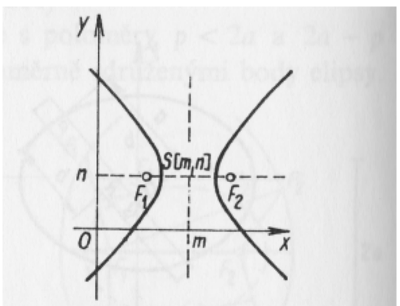
Obr. 248. Kružnice v obecné poloze



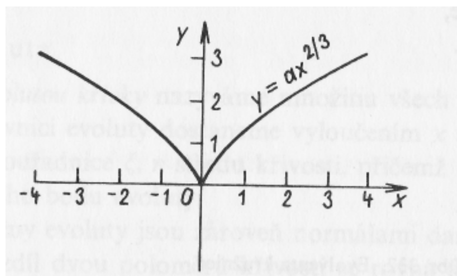
Obr. 271. Elipsa v normální poloze



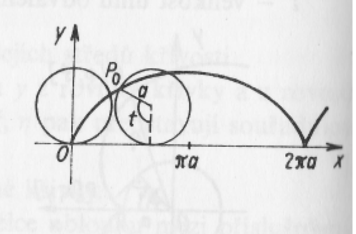
Parabola



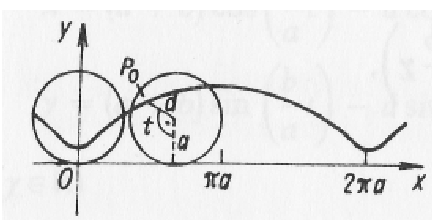
Obr. 288. Hyperbola v normální poloze



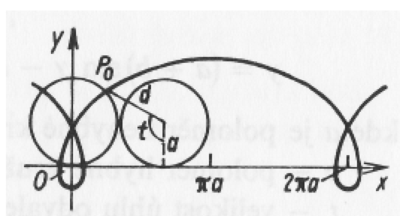
Obr. 333. Semikubická parabola [Neilova parabola] $y^3 = 2x^2$



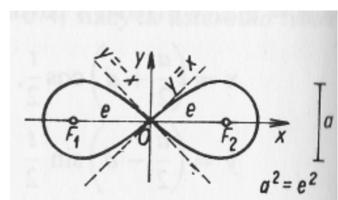
Obr. 334. Prostá cykloida



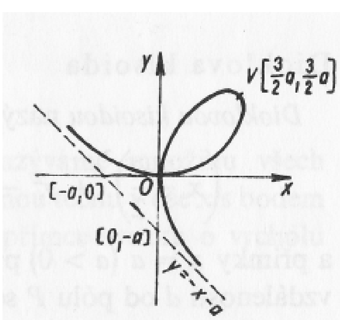
Obr. 335. Zkrácená cykloida



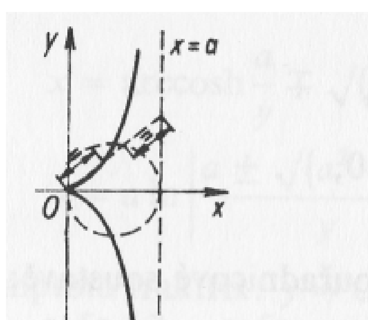
Obr. 336. Prodloužená cykloida



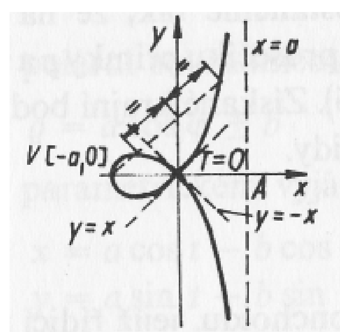
Obr. 345. Bernoulliova lemniskáta ($a^2 = e^2$)



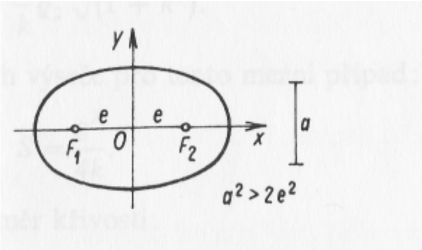
Obr. 352. Descartesův list



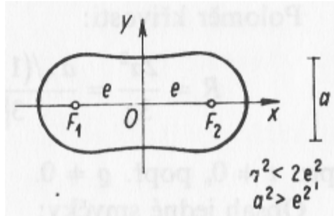
Obr. 353. Dioklova kisoida



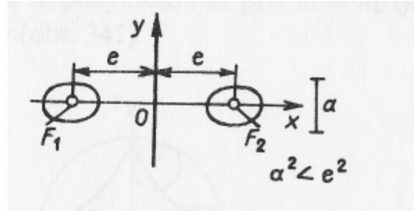
Obr. 354. Strofoida



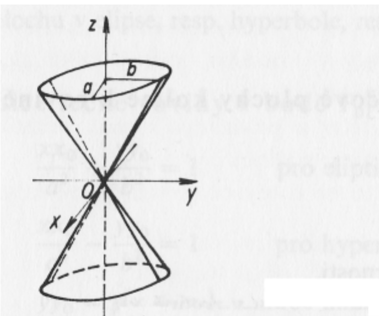
Obr. 342. Cassiniova křivka ($a^2 > 2e^2$)



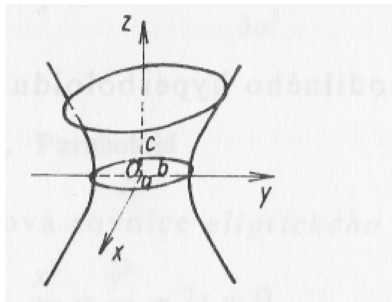
Obr. 343. Cassiniova křivka ($e^2 < a^2 < 2e^2$)



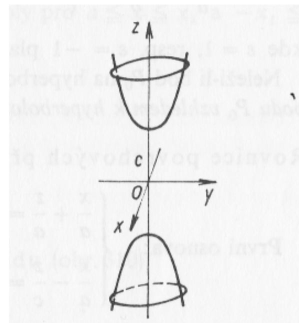
Obr. 344. Cassiniova křivka ($a^2 < e^2$)



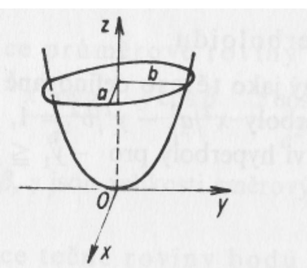
Obr. 312. Kuželová plocha



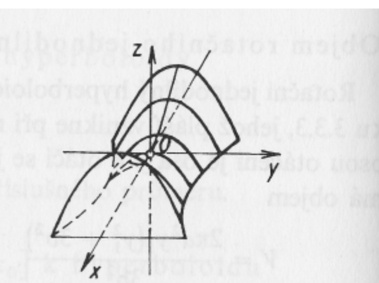
Obr. 308. Jednodílný hyperboloid



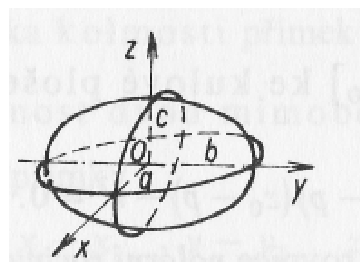
Obr. 309. Dvojdílný hyperboloid



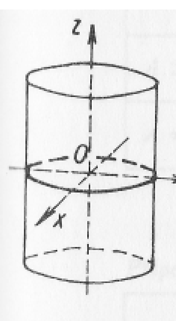
Obr. 310. Eliptický paraboloid



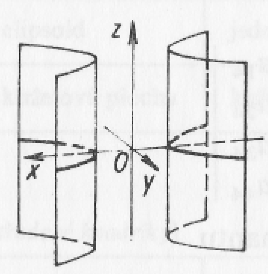
Obr. 311. Hyperbolický paraboloid



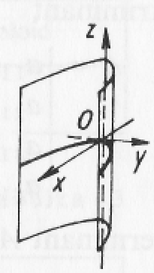
Obr. 307. Trojosý elipsoid



Obr. 313. Kolmá eliptická válcová plocha



Obr. 314. Kolmá hyperbolická válcová plocha



Obr. 315. Kolmá parabolická válcová plocha

Skalárne funkcie viacerých premenných

- *Derivácia v smere.* Nech $f(\vec{x})$ je skalárna funkcia viacerých premenných a $\vec{u}$ je vektor. $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(\mathbf{a})$ nazývame deriváciou funkcie f v smere vektora $\vec{u}$ v bode $\mathbf{a}$.
- $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(\mathbf{a}) = \vec{u}_0 \cdot \nabla f(\mathbf{a}) = |\nabla f(\mathbf{a})| \cos\alpha$, kde $\vec{u}_0$ je jednotkový vektor v smere vektora $\vec{u}$ a α je uhol medzi ∇f a $\vec{u}$.
- Výraz $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i$ nazývame *totálnym diferenciálom* funkcie $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ n-premenných.
- Nech $P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$ je totálnym diferenciálom nejakej funkcie $F(x,y)$. Potom túto funkciu nazývame *kmeňovou funkciou.*
- Ak platí, že $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$, potom kmeňová funkcia existuje.
- Výpočet kmeňovej funkcie. $F(x,y) = \displaystyle\int P(x,y)\mathrm{d}x = U(x,y) + K(y)$. Výsledkom je primitívna funkcia $U(x,y)$ a integračná konštanta $K(y)$, ktorá môže byť v princípe funkciou y. $K(y) = \displaystyle\int \left(Q(x,y) - \frac{\partial U(x,y)}{\partial y} \right) \mathrm{d}y$.
- Výpočet kmeňovej funkcie. $\displaystyle\int P(x,y)\mathrm{d}x = U(x,y) + K(y)$, $\displaystyle\int Q(x,y)\mathrm{d}y = U(x,y) + L(x)$. Potom $F(x,y) = U(x,y) + K(y) + L(x) + C$.

Diferenciálne operátory

- Nech $U(x,y,z)$ je skalárna funkcia a $\vec{F}(x,y,z)$ je vektorová funkcia, ∇ je *nabla operátor* a Δ je *Laplaceov operátor*, potom:

  i) $\nabla U = \operatorname{grad} U$

  ii) $\nabla \cdot \vec{F} = \operatorname{div}\vec{F}$

  iii) $\nabla \times \vec{F} = \operatorname{rot}\vec{F}$

  iv) $\Delta = \nabla \cdot \nabla$

- Ak je rotácia vektorového poľa nulová, hovoríme, že toto pole je *nevírové*. Ak je rotácia vektorového poľa nenulová, hovoríme o poli *vírovom*.

- Ak je divergencia vektorového poľa nulová, nazývame ho *bezžriedlové* alebo *bezzdrojové*. Ak je divergencia vektorového poľa nenulová, nazývame ho *žriedlové* alebo *zdrojové*.

- Ak je rotácia vektorového poľa nulová, dá sa toto pole zapísať ako gradient istej skalárnej funkcie, tzv. potenciálu. Takéto pole sa nazýva *potenciálové* alebo *konzervatívne*.

- Nabla operátor v kartézskych súradniciach $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$

- V kartézskych súradniciach (x,y,z) platí:

  i) $\operatorname{grad} U = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right)$

  ii) $\operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$

  iii) $\operatorname{rot}\vec{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)$

  iv) $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

- V cylindrických súradniciach (ρ, φ, z):

  i) $\operatorname{grad} U = \left(\frac{\partial U}{\partial \rho}, \frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \varphi}, \frac{\partial U}{\partial z}\right)$

  ii) $\operatorname{div}\vec{F} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho F_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$

  iii) $\operatorname{rot}\vec{F} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial F_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial F_\varphi}{\partial z}, \frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial \rho}, \frac{1}{\rho}(\frac{\partial \rho F_\varphi}{\partial \rho} - \frac{\partial F_\rho}{\partial \varphi}\right)$

  iv) $\Delta = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho\frac{\partial}{\partial \rho}) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

- Vo sférických súradniciach (r, ϑ, φ):

  i) $\operatorname{grad} U = \left(\frac{\partial U}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \vartheta}, \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\right)$

  ii) $\operatorname{div}\vec{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 F_r) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \vartheta}(\sin\vartheta F_\vartheta) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi}$

  iii) $\operatorname{rot}\vec{F} = \left(\frac{1}{r\sin\vartheta}\left(\frac{\partial \sin\vartheta F_\varphi}{\partial \vartheta} - \frac{\partial F_\vartheta}{\partial \varphi}\right), \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial F_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial r F_\varphi}{\partial r}\right), \frac{1}{r}\left(\frac{\partial r F_\vartheta}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \vartheta}\right)\right)$

  iv) $\Delta = \left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right), \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial r}\right), \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right)$

- Operatorové identity. Nech $U(x, y, z)$ je skalárna funkcia a $\vec{A}(x, y, z)$ je vektorová funkcia, potom:

  i) $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$

  ii) $\nabla \times \nabla U = 0$

  iii) $\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \Delta\vec{A}$

Kombinatorika

- *Kombinačné číslo* $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$, $k \leq n$, $n, k \in \mathbb{N}$.

- Vlastnosti kombinačných čísiel, $\forall n, k \in \mathbb{N}$:

  i) $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{0}{0} = 1$

  ii) $\forall k \leq n$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

  iii) $\forall k < n$, $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

- *Binomická veta.* $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$:

  $$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + ... + \binom{n}{n-1}a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n}a^0 b^n$$

- *Pascalov trojuholník* slúži na vyčíslenie kombinačných čísiel. Hodnotu príslušného kombinačného čísla dostaneme ako súčet dvoch najbližších čísiel z riadku nad ním.

n=0	$\binom{0}{0}$	1
n=1	$\binom{1}{0}\binom{1}{1}$	**1 1**
n=2	$\binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{2}$	1 **2** 1
n=3	$\binom{3}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3}$	1 3 3 1
n=4	$\binom{4}{0}\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{4}$	1 4 6 4 1
n=5	$\binom{5}{0}\binom{5}{1}\binom{5}{2}\binom{5}{3}\binom{5}{4}\binom{5}{5}$	1 5 10 10 5 1

- *Variácie k-tej triedy z n prvkov bez opakovania*: sú usporiadané k-tice vytvorené z n prvkov, pričom žiadny prvok v k-tici sa neopakuje, t.j. z n prvkov sa vyberá k prvkov, záleží na ich poradí a prvky sa neopakujú. $V_k(n) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

- *Variácie k-tej triedy z n prvkov s opakovaním*: sú usporiadané k-tice vytvorené z n prvkov, pričom prvky sa v k-tici môžu ľubovoľne opakovať, t.j. z n prvkov sa vyberá k prvkov, záleží na ich poradí a prvky sa opakujú. $V'_k(n) = n^k$.

- Špeciálnym prípadom variácií, kedy $n = k$, sú tzv. *permutácie*, t.j. z n prvkov sa vyberá n prvkov, nezáleží na ich poradí a prvky sa môžu resp. nemôžu opakovať. $P(n) = n!$ resp. $P_{n_1,n_2,...,n_k} = \dfrac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$, kde $\sum_i n_i = n$, t.j. vyberá sa z k druhov prvkov.

- *Kombinácie k-tej triedy z n prvkov bez opakovania*: sú ľubovoľné k-prvkové podmnožiny n-prvkovej množiny, t.j. z n prvkov sa vyberá k prvkov, nezáleží na ich poradí a prvky sa neopakujú. $C_k(n) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$.
- *Kombinácie k-tej triedy z n prvkov s opakovaním*: sú ľubovoľné k-prvkové skupiny z n prvkov, t.j. z n prvkov sa vyberá k prvkov, nezáleží na ich poradí a prvky sa opakujú. $C'_k(n) = \binom{n+k-1}{k}$.

Dvojné a trojné integrály

- Nech M je neprázdna, merateľná množina, $f(x,y)$ spojitá a ohraničená na množine M. Potom je $f(x,y)$ na množine M integrovateľná.
- $\iint_M (c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_n f_n)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = c_1 \iint_M f_1 \mathrm{d}x\mathrm{d}y + c_2 \iint_M f_2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \cdots + c_n \iint_M f_n \mathrm{d}x\mathrm{d}y$
- $\iint_{A\cup B} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_A f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_B f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$
- Fubiniho veta: Nech $\varphi_1(x)$ a $\varphi_2(x)$ sú spojité funkcie na intervale $[a,b]$, $a < b$ a pre $\forall x \in (a,b)$ je $\varphi_1(x) < \varphi_2(x)$. Nech A je množina všetkých (a,b) takých, že $a \le x \le b, \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$. Nech $f(x,y)$ je spojitá funkcia na množine A. Potom $\iint_A f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$
- Fubiniho veta: Nech $\varphi_1(x)$ a $\varphi_2(x)$ sú spojité funkcie na intervale $[a,b]$, $a < b$ a pre $\forall x \in (a,b)$ je $\varphi_1(x) < \varphi_2(x)$. Nech A je množina všetkých (a,b) takých, že $a \le x \le b, \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$. Nech $\phi_1(x)$ a $\phi_2(x)$ sú spojité funkcie na A také, že $\phi_1(x) < \phi_2(x)$ pre $\forall [x,y]$ vnútri množiny A. Nech V je množina všetkých $[x,y,z]$ takých, že $[x,y] \in A, \phi_1(x) \le z \le \phi_2(x)$. Nech $f(x,y,z)$ je spojitá funkcia na množine V. Potom $\iiint_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \mathrm{d}y \int_{\phi_1(x,y)}^{\phi_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z$
- Veta o transformácii súradníc: Nech vnútro regulárnej oblasti Ω^* sa zobrazí pomocou rovníc $x = \varphi(u,v), y = \psi(u,v)$ vzájomne jednoznačne na oblasť Ω, pričom zobrazenie hraničnej krivky oblasti Ω^* nemusí byť prosté. Nech funkcia $f(x,y)$ je spojitá a orhraničená na uzavretej oblasti Ω a funkcie $\varphi(u,v), \psi(u,v)$ majú spojité parciálne derivácie 1. rádu na oblasti D, v ktorej leží oblasť Ω^* aj so svojou hraničnou krivkou. Nech všade vnútri oblasti Ω^* je Jakobián zobrazenia nenulový. Potom $\iint_\Omega f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Omega^*} f(\varphi(u,v),\psi(u,v))|J(\varphi,\psi)|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$
- $\iint_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ - obsah regulárnej rovinnej oblasti
- $\iint_\Omega |f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ - hmotnosť oblasti Ω s hustotou $z = f(x,y)$ resp. objem valca kolmého na podstavu Ω a zrezaného plochou $z = f(x,y)$
- $\iiint_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ - objem regulárnej priestorovej oblasti
- $\iint_\Omega \rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ - hmotnosť oblasti Ω, ρ je hustota

- $\kappa \iiint_\Omega \frac{\mathrm{d}m}{r} = \kappa \iiint_\Omega \frac{\rho(\xi, \eta\,\zeta)}{r} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta \mathrm{d}\zeta$ - potenciál telesa Ω o hustote ρ v bode $[x, y, z]$, κ je gravitačná konštanta a $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}$

Statické momenty a momenty zotrvačnosti rovinnej oblasti

- $S_x = \iint_\Omega y\rho(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$
- $S_y = \iint_\Omega x\rho(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$
- $S_z = \iint_\Omega z(x, y)\rho(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$
- $I_x = \iint_\Omega y^2\rho(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$
- $I_y = \iint_\Omega x^2\rho(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$
- $I_z = \iint_\Omega (x^2 + y^2)\rho(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

Statické momenty a momenty zotrvačnosti valca kolmého na podstavu Ω a zrezaného plochou $z = f(x, y)$

- $S_{xy} = \frac{1}{2} \iint_\Omega f^2(x, y)\rho(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$
- $S_{yz} = \iint_\Omega xf(x, y)\rho(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$
- $S_{xz} = \iint_\Omega yf(x, y)\rho(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$
- $I_z = \iint_\Omega (x^2 + y^2)f(x, y)\rho(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

Statické momenty a momenty zotrvačnosti priestorovej oblasti

- $S_{xy} = \iiint_\Omega z\rho(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$
- $S_{yz} = \iiint_\Omega x\rho(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$
- $S_{xz} = \iiint_\Omega y\rho(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$
- $I_x = \iiint_\Omega (y^2 + z^2)\rho(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$
- $I_y = \iiint_\Omega (x^2 + z^2)\rho(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$
- $I_z = \iiint_\Omega (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

Súradnice ťažiska:

- T=$\left[\frac{S_y}{m}, \frac{S_x}{m}\right]$
- T=$\left[\frac{S_{yz}}{m}, \frac{S_{xz}}{m}, \frac{S_{xy}}{m}\right]$

Plošné integrály 1. a 2. druhu

- Nech plocha S je implicitne vyjadrená funkciou $f(x,y,z)$. Vektor normály k ploche má tvar $\mathrm{d}\mathbf{S} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$.

- Nech S je jednoduchá hladká plocha daná rovnicami $x = f_1(u,v)$, $y = f_2(u,v)$, $z = f_3(u,v)$. Označme vektory $\mathbf{r}_u = \left(\frac{\partial f_1}{\partial u}, \frac{\partial f_2}{\partial u}, \frac{\partial f_3}{\partial u}\right)$, $\mathbf{r}_v = \left(\frac{\partial f_1}{\partial v}, \frac{\partial f_2}{\partial v}, \frac{\partial f_3}{\partial v}\right)$. Potom $\mathrm{d}\mathbf{S} = (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$ a $\mathrm{d}S = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$.

- Zvolme triviálnu parametrizáciu plochy, t.j. $x = u$, $y = v$. Potom $z = f(u,v)$ a $\mathbf{r}_u = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial u}\right)$, $\mathbf{r}_v = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial v}\right)$. Normálový vektor k ploche je $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \left(-\frac{\partial f}{\partial u}, -\frac{\partial f}{\partial v}, 1\right)$, jeho veľkosť $A = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2}$ a jeho smerové kosíny $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ sú $\cos\alpha = -\frac{1}{A}\frac{\partial f}{\partial u}$, $\cos\beta = -\frac{1}{A}\frac{\partial f}{\partial v}$, $\cos\gamma = \frac{1}{A}$.

- Nech funkcia $f(x,y,z)$ je spojitá na úseku plochy S, potom $\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}S$ nazývame *plošným integrálom 1. druhu.*

- Nech je daná vektorová funkcia $\mathbf{F}(f_1, f_2, f_3)$ definovaná na merateľnej orientovanej jednoduchej po častiach hladkej ploche S. Potom $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$ nazývame *plošným integrálom 2. druhu.*

- Ak P, Q, R sú spojité v x, y, z na hladkom úseku plochy S a $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ sú smerové kosíny kladne orientovaného normálového vektora plochy S v bode $[x,y,z]$, potom $\iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\mathrm{d}S = \iint_S (R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z)$.

Integrálne vety

- **Greenova veta** (*udáva súvis medzi krivkovým a dvojným integrálom*): Nech funkcie $P(x,y)$, $Q(x,y)$ sú spojito diferencovateľné na oblasti A, v ktorej leží uzavretá oblasť Ω i so svojou hraničnou krivkou C, ktorá je jednoduchá uzavretá po častiach hladká a kladne orientovaná. Potom
  $$\oint_C P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \iint_\Omega \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
- **Gaussova-Ostrogradského veta** (*udáva súvis medzi trojným a plošným integrálom*): Nech vektorová funkcia $\vec{F} = [P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)]$ je spojito diferencovateľná na trojrozmernej oblasti G, v ktorej sa nachádza uzavretá oblasť V ohraničená jednoduchou uzavretou po častiach hladkou a kladne orientovanou plochou S. Potom
  $$\iiint_V \left(\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z =$$
  $$= \iint_S P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
  alebo vo vektorovom tvare
  $$\int_V \mathrm{div}\vec{F}\cdot\mathrm{d}V = \oint_S \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{S}.$$
- **Stokesova veta** (*udáva súvis medzi krivkovým a plošným integrálom*): Nech vektorová funkcia $\vec{F} = [P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)]$ je spojito diferencovateľná na trojrozmernej oblasti G, v ktorej sa nachádza orientovaná neuzavretá plocha S ohraničená jednoduchou konečnou po častiach hladkou krivkou C kladne orientovanou vzhladom k ploche S. Potom
  $$\oint_C P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z =$$
  $$= \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
  alebo vo vektorovom tvare
  $$\oint_C \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{C} = \int_S \mathrm{rot}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{S}.$$

Totálny diferenciál. Taylorov rozvoj

- Majme funkciu n premenných $f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Totálnym diferenciálom k-teho rádu funkcie f nazývame funkciu:

$$\mathrm{d}^k f = \sum_{k_1+k_2+...+k_n=k} \frac{k!}{k_1!k_2!...k_n!} \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} ... \partial x_n^{k_n}} \mathrm{d}x_1^{k_1} \mathrm{d}x_2^{k^2} ... \mathrm{d}x_n^{k_n}$$

- Taylorovým rozvojom funkcie $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ do rádu k v bode $x^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ nazývame funkciu:

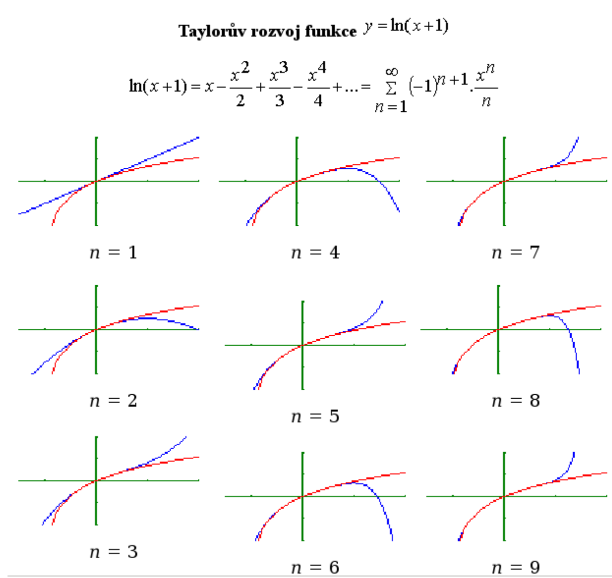
$$f(x) = \sum_{l=0}^{k} \frac{1}{l!} \mathrm{d}^{(l)} f(x^0),$$

kde $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $\mathrm{d}^{(l)} f(x^0)$ je l-tý totálny diferenciál funkcie f v bode (x^0), pričom príslušné diferenciály sa aproximujú takto $\mathrm{d}x_i^j(x^0) = (x_i - x_i^0)^j$

- Horný odhad chyby Taylorovho rozvoja do rádu k :

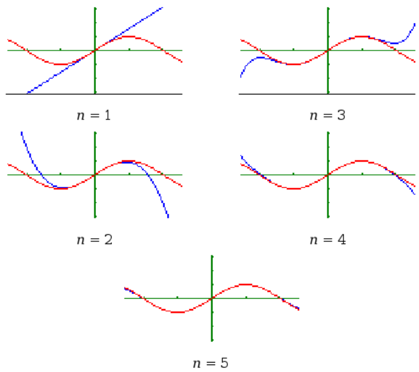
$$|\text{chyba}| \leq \mathrm{d}^{k+1} f(x^0),$$

príslušné diferenciály sa aproximujú takto $\mathrm{d}x_i^j(x^0) = |x_i - x_i^0|^j$.



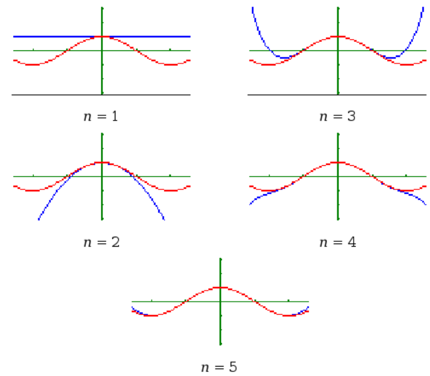
Taylorův rozvoj funkce $y = \sin x$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$



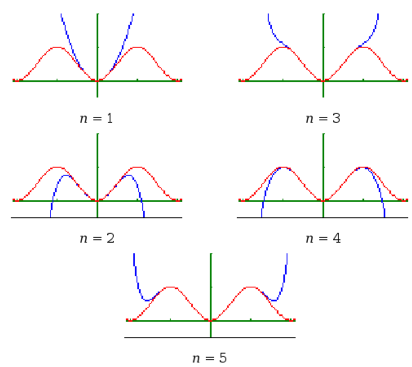
Taylorův rozvoj funkce $y = \cos x$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}$$



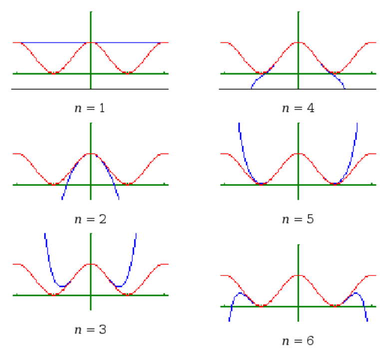
Taylorův rozvoj funkce $y = \sin^2 x$

$$\sin^2 x = \frac{2^1}{2!} x^2 - \frac{2^3}{4!} x^4 + \frac{2^5}{6!} x^6 - \frac{2^7}{8!} x^8 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} \cdot x^{2n}$$



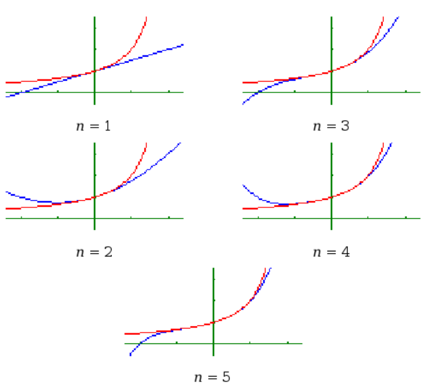
Taylorův rozvoj funkce $y = \cos^2 x$

$$\cos^2 x = 1 - \frac{2^1}{2!} x^2 + \frac{2^3}{4!} x^4 - \frac{2^5}{6!} x^6 + \frac{2^7}{8!} x^8 - \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{2^{2n-3}}{(2n-2)!} \cdot x^{2n-2}$$



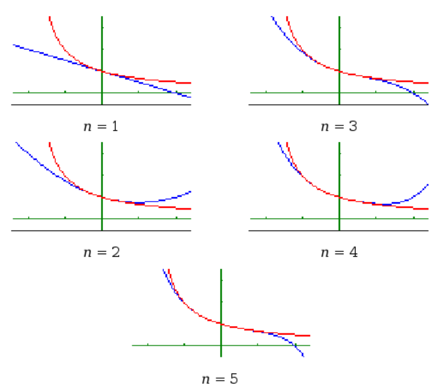
Taylorův rozvoj funkce $y = \frac{1}{1-x}$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} x^n$$



Taylorův rozvoj funkce $y = \frac{1}{1+x}$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 - \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n$$



Príklad. Nájdite približnú hodnotu čísla $1,02^5 0,99^{20}$.

Funkciu $f(x,y) = (1+x)^5(1+y)^{20}$ rozvinieme v bode [0,0] a vyčíslime pre bod [0,02;-0,01].

$\mathrm{d}^k f$	$\mathrm{d}^k f$	$\mathrm{d}^k f(0,0)$
$\mathrm{d}^{(0)} f$	$(1+x)^5(1+y)^{20}$	1
$\frac{\partial f}{\partial x}$	$5(1+x)^4(1+y)^{20}$	5
$\frac{\partial f}{\partial y}$	$20(1+x)^5(1+y)^{19}$	20
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$	$20(1+x)^3(1+y)^{20}$	20
$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$	$100(1+x)^4(1+y)^{19}$	100
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$	$380(1+x)^5(1+y)^{18}$	380
$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$	$60(1+x)^2(1+y)^{20}$	60
$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}$	$400(1+x)^3(1+y)^{19}$	400
$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}$	$1900(1+x)^4(1+y)^{18}$	1900
$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}$	$6840(1+x)^5(1+y)^{17}$	6840

Potom pre totálne diferenciály 1., 2. a 3. rádu dostávame:

$$\mathrm{d}^1 f = \frac{1!}{1!0!} 5(1+x)^4(1+y)^{20}\mathrm{d}x + \frac{1!}{0!1!} 20(1+x)^5(1+y)^{19}\mathrm{d}y$$

$$\mathrm{d}^2 f = \frac{2!}{2!0!} 20(1+x)^3(1+y)^{20}\mathrm{d}x^2 + \frac{2!}{1!1!} 100(1+x)^4(1+y)^{19}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{2!}{0!2!} 380(1+x)^5(1+y)^{18}\mathrm{d}y^2$$

$$\mathrm{d}^3 f = \frac{3!}{3!0!0!} 60(1+x)^2(1+y)^{20}\mathrm{d}x^3 + \frac{3!}{2!1!} 400(1+x)^3(1+y)^{19}\mathrm{d}x^2\mathrm{d}y + \frac{3!}{1!2!} 1900(1+x)^4(1+y)^{18}\mathrm{d}x\mathrm{d}y^2 + \frac{3!}{3!} 6840(1+x)^5(1+y)^{17}\mathrm{d}y^3$$

$$\mathrm{d}^1 f(0,0) = 5\mathrm{d}x + 20\mathrm{d}y$$

$$\mathrm{d}^2 f(0,0) = 20\mathrm{d}x^2 + 200\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 380\mathrm{d}y^2$$

$$\mathrm{d}^3 f(0,0) = 60\mathrm{d}x^3 + 1200\mathrm{d}x^2\mathrm{d}y + 5700\mathrm{d}x\mathrm{d}y^2 + 6840\mathrm{d}y^3$$

Pre Taylorov rozvoj do 1., 2. a 3. rádu v bode $(0,0)$ dostávame:

$$T_1(x,x_0) = \frac{1}{0!} 1(x-0)^0(y-0)^0 + \frac{1}{1!}(5(x-0)^1(y-0)^0 + 20(x-0)^0(y-0)^1)$$

$$T_2(x,x_0) = T_1(x,x_0) + \frac{1}{2!}(20(x-0)^2(y-0)^0 + 200(x-0)^1(y-0)^1 + 380(x-0)^0(y-0)^2)$$

$$T_3(x,x_0) = T_2(x,x_0) + \frac{1}{3!}(60(x-0)^3(y-0)^0 + 1200(x-0)^2(y-0)^1 + 5700(x-0)^1(y-0)^2 + 6840(x-0)^0(y-0)^3)$$

$$T_1(x,x_0) = 1 + 5x + 20y$$

$$T_2(x,x_0) = T_1(x,x_0) + \frac{1}{2}(20x^2 + 200xy + 380y^2)$$

$$T_3(x,x_0) = T_2(x,x_0) + \frac{1}{6}(60x^3 + 1200x^2y + 5700xy^2 + 6840y^3)$$

a vyčíslený pre $x = (0,02; -0,01)$

$$T_1(x,x_0) = 1 + 5.0,02 + 20.(-0,01) = 0,9$$

$$T_2(x,x_0) = 0,9 + \frac{1}{2}(20.0,02^2 + 200.0,02.(-0,01) + 380(-0,01)^2) = 0,903$$

$$T_3(x,x_0) = 0,903 + \frac{1}{6}(60.0,02^3 + 1200.0,02^2.(-0,01) + 5700.0,02.(-0,01)^2 + 6840(-0,01)^3) = 0,90324$$

Pre odhad chyby Taylorovho rozvoja do 2. rádu dostaneme:

$$|\text{chyba}| \le \frac{1}{6}(60.0,02^3 + 1200.0,02^2.(-0,01) + 5700.0,02.(-0,01)^2 + 6840(-0,01)^3) = 0,00024$$

Fourierove rady

- Periodickú funkciu $f(x)$ s periódou T_0 môžeme vyjadriť v tvare Fourierovho radu:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega_0 x) + b_k \sin(k\omega_0 x)],$$

kde $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T_0}$. Pre Fourierove koeficienty platí:

$$a_0 = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} f(x)\mathrm{d}x \tag{1}$$

$$a_k = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} f(x)\cos(k\omega_0 x)\mathrm{d}x \tag{2}$$

$$b_k = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} f(x)\sin(k\omega_0 x)\mathrm{d}x \tag{3}$$

- Ak f je párna funkcia na $< -\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2} >$, potom $b_k = 0$ pre $\forall k$.
- Ak f je nepárna funkcia na $< -\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2} >$, potom $a_k = 0$ pre $\forall k$.
- Komplexný tvar Fourierovho radu vyzerá takto:

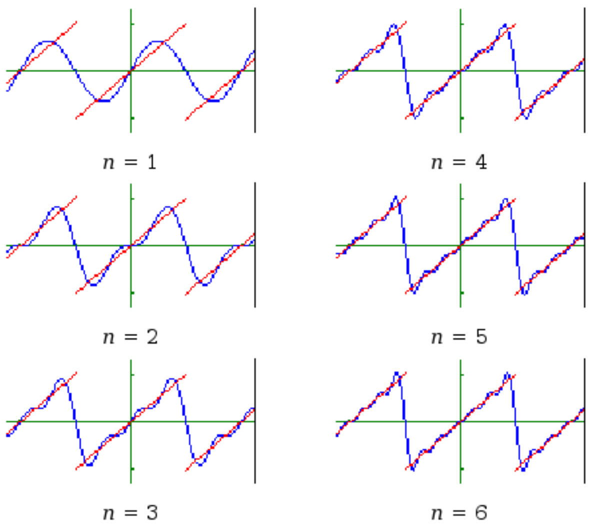
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \mathrm{e}^{ik\omega_0 x} = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(c_k \mathrm{e}^{ik\omega_0 x} + c_{-k} \mathrm{e}^{-ik\omega_0 x} \right),$$

kde $c_k = \dfrac{1}{T_0} \displaystyle\int_0^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-ik\omega_0 x}\mathrm{d}x$.

Fourierova řada funkce $f(x) = x$

pro $-\pi \le x < \pi,\ f(x+2\pi) = f(x)$

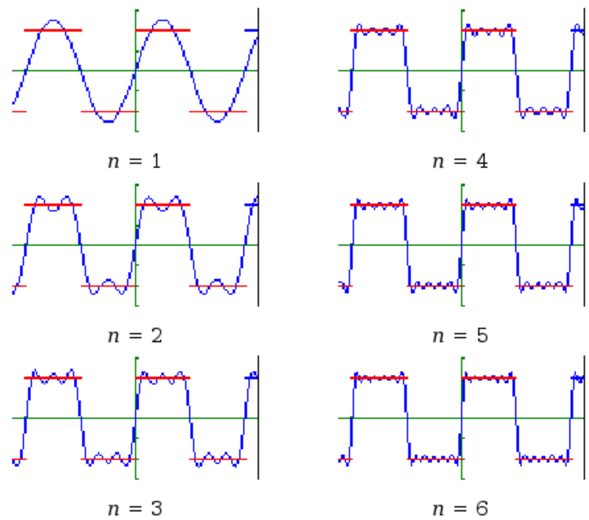
$$f(x) = 2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots\right) = 2.\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}.\frac{\sin nx}{n}$$



Fourierova řada funkce $f(x) = 1$

pro $0 \le x < \pi,\ f(x+\pi) = -f(x)$

$$f(x) = \frac{4}{\pi}.\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} - \ldots\right) = \frac{4}{\pi}.\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)}$$



Fourierova řada funkce $f(x) = x^2$

pro $-\pi \le x \le \pi,\ f(x+2\pi) = f(x)$

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \ldots\right) = \frac{\pi^2}{3} - 4.\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$$