

# Základy magnetohydrodynamiky

aneb „MHD v jedné přednášce?! To si snad děláte legraci!“

# Osnova

- Magneto hydrodynamika
- Maxwellovy rovnice
- Aplikace – pinče, MHD generátory, geofyzika, astrofyzika...

- **Magnetohydrodynamika**

- umožňuje studovat vlastnosti kolektivního chování
- je omezena v možnostech popisu chování jednotlivých částic

- **Kinetická teorie plazmatu**

- roli fluida představují částice
- umožňuje určit jednotlivé makroskopické parametry magnetohydrodynamiky

# MAGNETOHYDRODYMIKA

- Věda o chování vodivé tekutiny (kapaliny nebo plazmatu) v magnetickém poli.
- Vzájemný pohyb vodivé tekutiny a magnetického pole indukuje pole a proudy.
- Interakce vodivé tekutiny s elmag. polem a vzájemná přeměna magnetické, mechanické a tepelné energie.
- Počátečním mechanismem přeměn mohou být jak silné elektrické pole (elektrické výboje), tak silné proudy a silná magnetická pole nebo relativně intenzivní mechanický pohyb plazmatu vůči magnetickému poli.

# Historie

- 1831 Faraday popsal funkci MHD generátoru
- Počátky MHD spojeny s experimenty se rtutí
- 20.-50. léta 20.století – řešení kosmických problémů (zemské jádro, Slunce, hvězdy, plazma v mezihvězdném prostoru)
- 1946 – první energie z MHD (Westinghouse)
- 1970 – H. Alfén – Nobelova cena
- Laboratorní výzkum – udržení plazmatu mag. polem pro řízenou jadernou fúzi

# MAXWELLOVY ROVNICE

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

- Zanedbáváme posuvný proud a náboj.
- Ohmův zákon:

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}$$

$$\vec{j} = (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})\gamma$$

$\gamma$  je měrná vodivost,  $\mu_0$  - permeabilita

# Rovnice pro magnetické pole

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{j} = (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})\gamma$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\operatorname{rot} \vec{E} = -\operatorname{rot} \left[ \frac{\vec{j}}{\gamma} - \vec{v} \times \vec{B} \right] = \operatorname{rot} [\vec{v} \times \vec{B}] - \frac{1}{\gamma\mu} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{B}$$

$$\vec{E} = \left( \frac{\vec{j}}{\gamma} - \vec{v} \times \vec{B} \right)$$

$$\vec{j} = \frac{\operatorname{rot} \vec{B}}{\mu}$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{B} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{B} - \Delta \vec{B}$$

$$= \operatorname{rot} [\vec{v} \times \vec{B}] + \frac{1}{\gamma\mu} \Delta \vec{B} - \frac{1}{\gamma\mu} \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{B}$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \operatorname{rot} [\vec{v} \times \vec{B}] + \frac{1}{\gamma\mu} \Delta \vec{B}$$

# Difúzní člen

- Pro nízké rychlosti nebo malé vodivosti:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \text{rot} [\vec{v} \times \vec{B}] + \frac{1}{\gamma\mu} \Delta \vec{B}$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{\gamma\mu} \Delta \vec{B}$$

- **Difúzní koeficient:**

- $\eta = 1/\gamma\mu$   $[\text{m}^2\text{s}^{-1}]$

- Vyjadřuje „počet siločar, který projde 1 m<sup>2</sup> za 1s“

- Difúzi si lze představit jako „prosakování“ magnetických siločar prostředím. Popisuje zánik magnetického pole nebo únik plazmatu v kolmém směru k magnetickým siločarám anebo neutralizaci opačných magnetických toků.



# Příklad

Pomocí předešlé rovnice lze odhadnout **dobu zániku magnetického pole  $\Delta t$** :

$$\frac{\Delta B}{\Delta t} = \frac{1}{\gamma\mu} \cdot \frac{\Delta B}{L^2}$$

$$\Delta t = \mu\gamma L^2$$

*L je charakteristický rozměr oblasti*

- A) Měděná koule o poloměru 1 m a  $\gamma=2,6 \times 10^6$  – několik sekund
- B) Měděný vodič o průměru 1 mm – několik  $\mu\text{s}$
- C) Zemská koule  $\sim 150\,000$  let
- D) Sluneční magnetické pole  $\sim 10^9$  let

# Člen zamrznutí

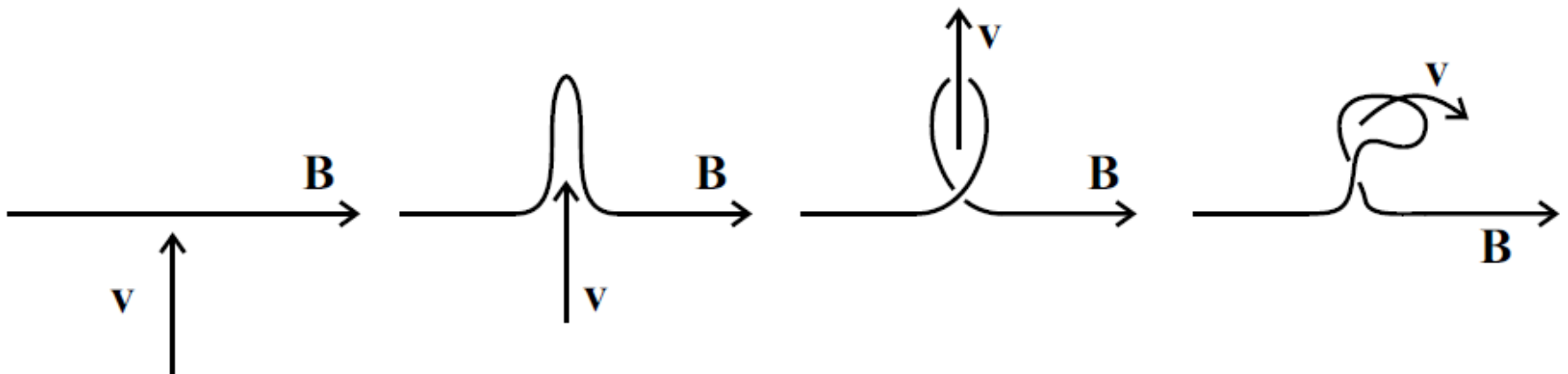
- Pro velké vodivosti:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \text{rot}[\vec{v} \times \vec{B}] + \frac{1}{\gamma\mu} \Delta \vec{B}$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \text{rot}[\vec{v} \times \vec{B}]$$

Rovnice  
víru

Plazma proudící kolmo na magnetickou siločáru tuto siločáru unáší a stáčí do spirály:



- Doba periody víru:

$$\frac{\Delta B}{\Delta t} = \frac{VB}{L}$$

$$\Delta t = L / V$$

*V je charakteristická rychlost a L je charakteristický rozměr*

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{\gamma \mu} \Delta \vec{B}$$

- společný pohyb prostředí a mag. siločar ve vírech, jehož orientace nezávisí na druhu náboje
- V případě že kinetická energie plazmatu přesahuje velikost mag. energie, silný proud vleče, protahuje a stáčí siločáry a laminární proudění přechází do vírového
- V případě, že dominuje mag. energie nad mechanickou nebo tepelnou, dochází k zachycení částic příčným mag. polem

**SPOLEČNÝ VÁZANÝ POHYB PLAZMATU A MAG. POLE  
NAZÝVÁME „ZAMRZNUTÍ MAG. POLE DO PLAZMATU“**

# Magnetické Reynoldsovo číslo

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \text{rot} [\vec{v} \times \vec{B}] + \frac{1}{\gamma \mu} \Delta \vec{B}$$

$$\frac{B}{t} = \frac{VB}{L} + \frac{1}{\gamma \mu} \cdot \frac{B}{L^2}$$

$$\frac{V}{L} : \frac{1}{\gamma \mu L^2} = \mu \gamma VL = R_M$$

- představuje počet otoček víru než dojde k jeho rozpadu

a)  $R_M \gg 1$  – dominují víry a zamrzlé mag. pole

b)  $R_M \ll 1$  – změnu mag. pole ovlivňuje difúzní člen

# HYDRODYNAMIKA

- Základní pohybovou rovnicí pro tekutiny je Navier-Stokesova rovnice:

$$\rho \left[ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \vec{\Delta}) \vec{u} \right] = -\vec{\nabla} p + \eta \nabla^2 \vec{u}$$

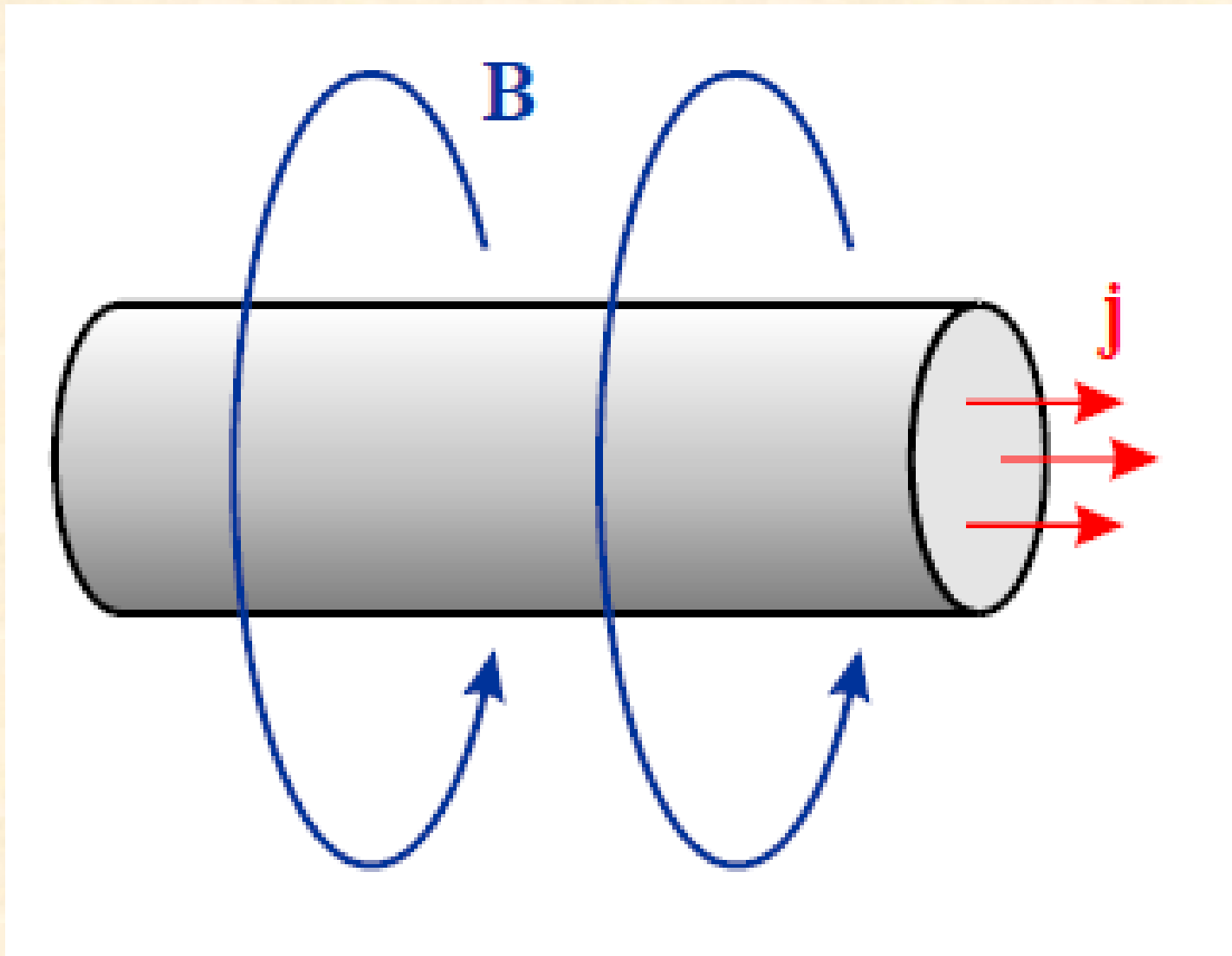
**Soustavy rovnic, které popisují MHD jsou kombinací Navier-Stokesovi rovnice a Maxwellových rovnic. Tyto diferenciální rovnice je třeba řešit současně, a to buď analyticky nebo numericky!**

**APLIKACE**

# PROUDOVÉ VLÁKNO - PINČ

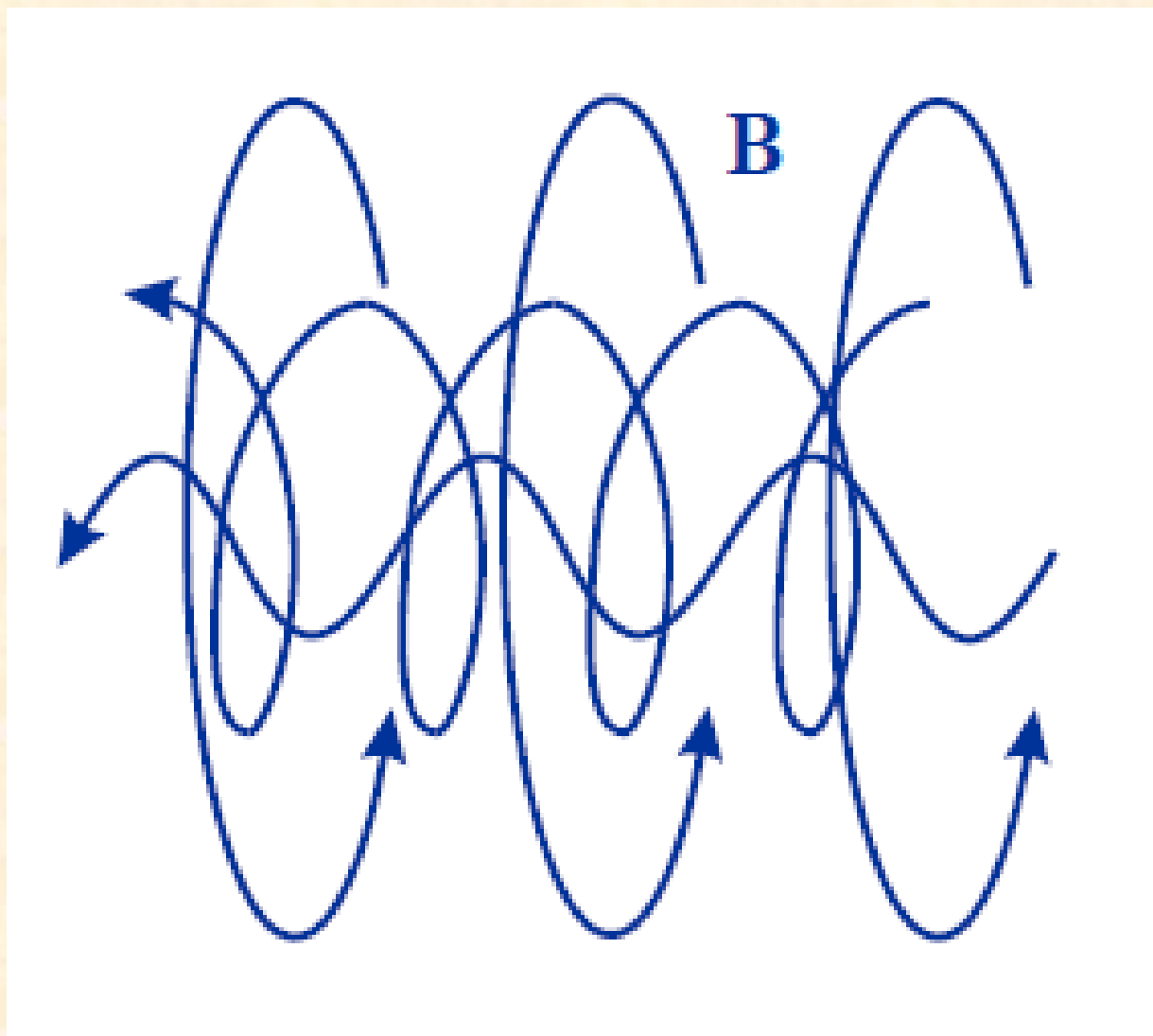
- Proudová vlákna neboli pinče či filamenty patří k nejběžnějším útvarům v plazmatu
- V nejjednodušší situaci proud teče v ose pinče (axiální směr) a kolem pinče vytváří magnetické pole (azimutální směr), které působí Lorentzovou silou na proudové vlákno a snaží se ho smrštít
- Po čase se ustanoví rovnováha mezi gradientem tlaku plazmatu (snaží se plyn rozepnout) a Lorentzovou silou (pinč komprimuje)
- Tato rovnováha je nestabilní a pinč tohoto typu se rychle rozpadá. Stačí však, aby magnetické siločáry byly zkroucené do magnetického provazce a pinč se stává relativně stabilním.

# Z - PINČ

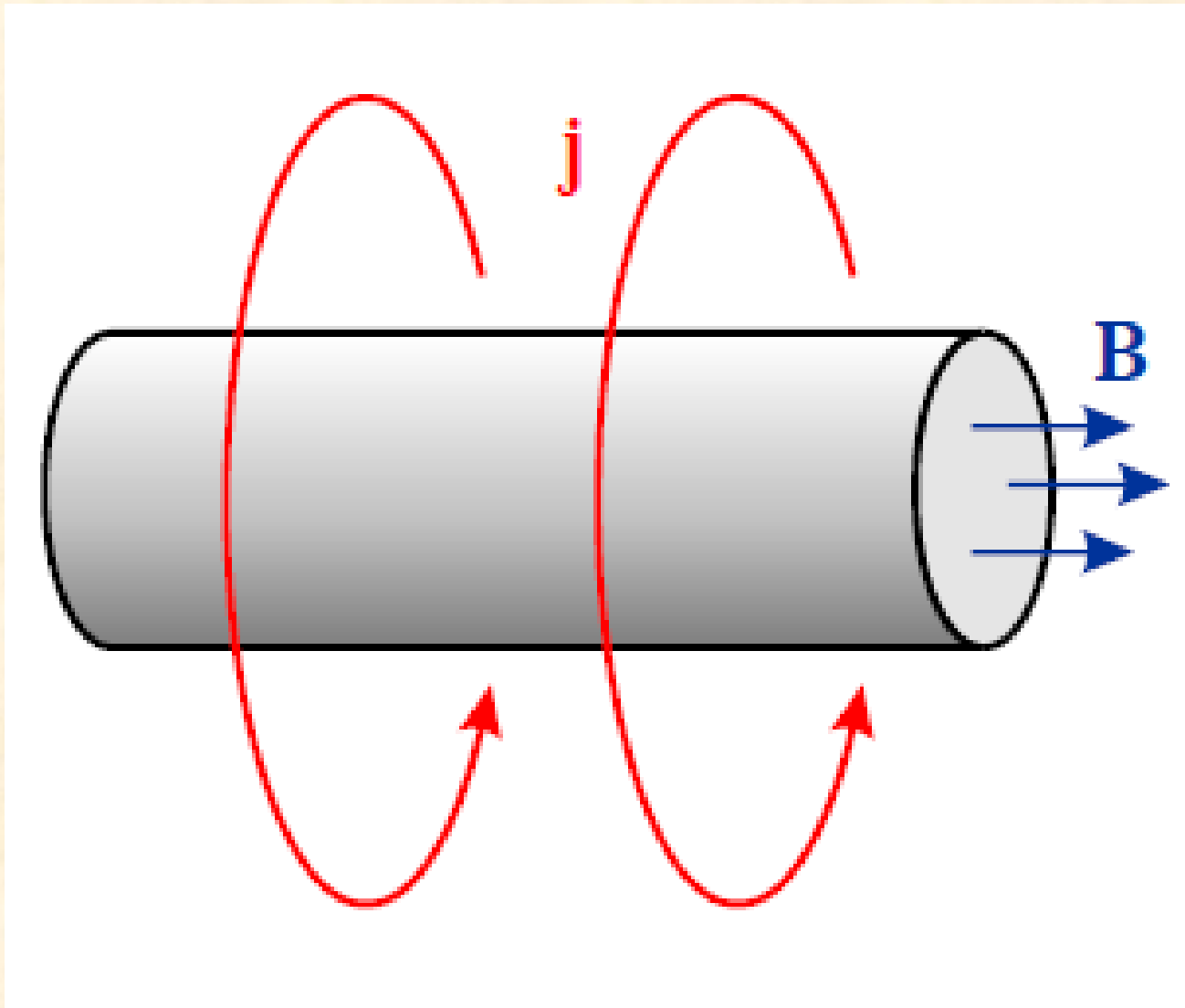




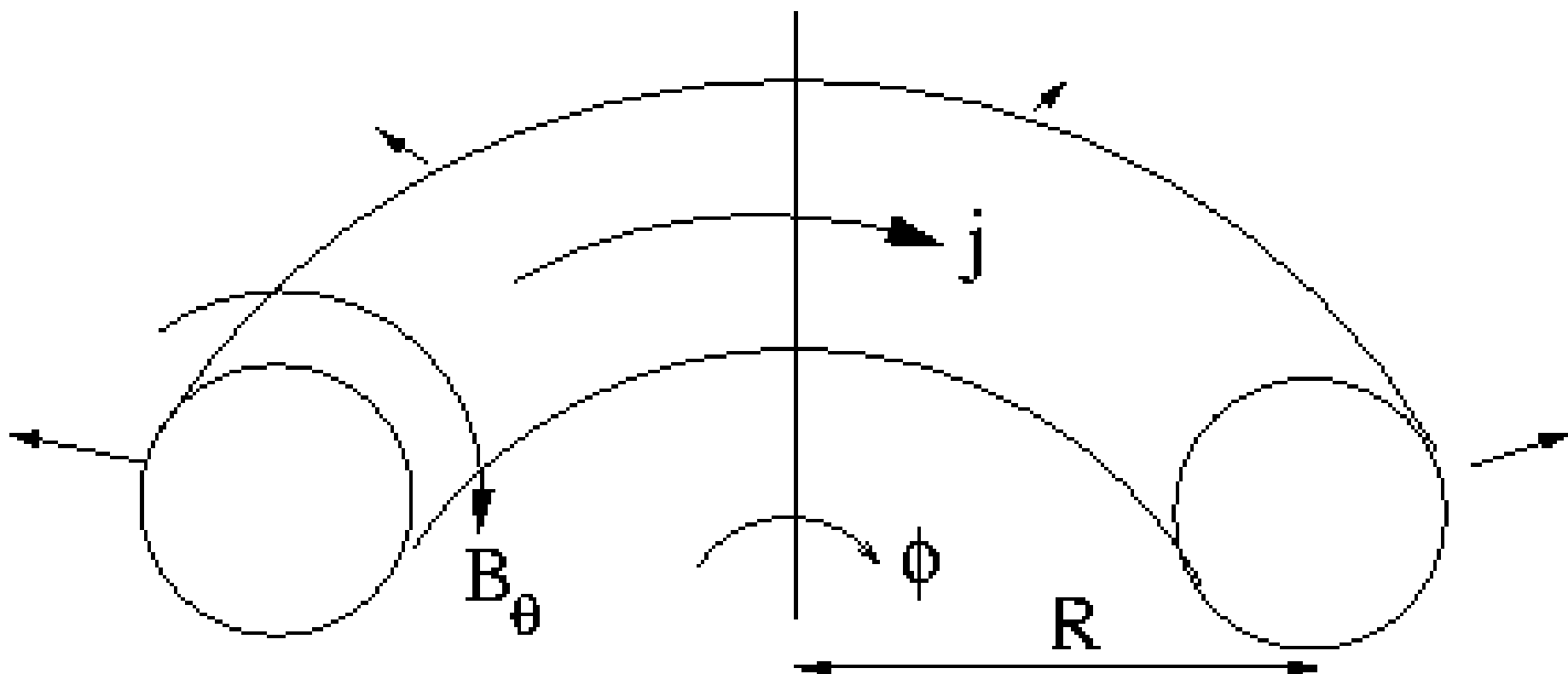
# HELIKÁLNÍ PINČ



# THETA PINČ



# TOROIDÁLNÍ PINČ



# Vlastnosti pinčů

- Proudý: 10kA – 10MA
- Poloměry ~ 1mm
- Tlaky –  $10^7$  –  $10^{13}$  Pa – nejvyšší tlaky dosažené na Zemi
- Magnetické pole – T – kT
- Při teplotách  $10^5$  –  $10^6$  K vyzařování v UV a měkké rentgenové oblasti o energiích 10 – 100 eV
- Jsou využívány jako relativně levný zdroj energetických iontů, elektronů a fotonů, jsou potenciálním zdrojem pro buzení rentgenových laserů a představují jednu z možností realizace jaderné fúze.

# PROUDOVÁ STĚNA

Kromě nejznámější válcové struktury se pinče mohou také formovat jako proudové vrstvy či pinčové stěny držené vlastním magnetickým polem. V takové stěně tečou plošné proudy, které generují přilehlé magnetické pole. Toto vlastní pole přebírá úlohu azimutálního pole u normálního pinče a brání rozšiřování stěny a jejímu rozpadu.

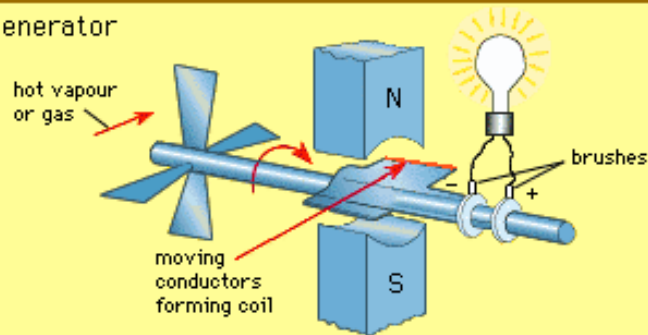


# MHD GENERÁTORY

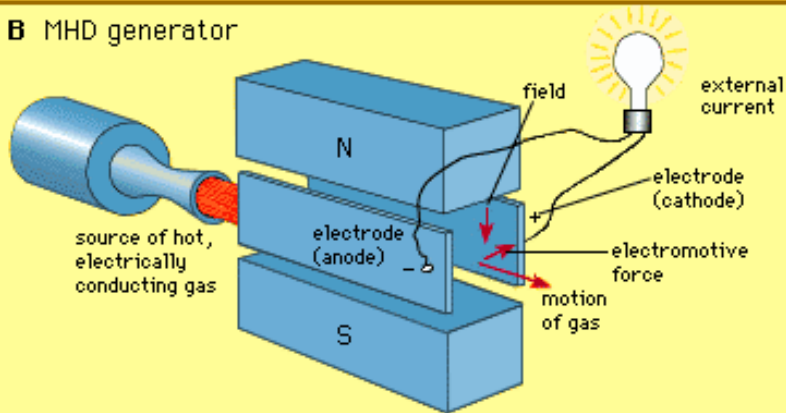
- Jejich funkci popsal M. Faraday (1831)
- Transformují tepelnou nebo kinetickou energii přímo na elektřinu.
- Fungují na základě Faradayova a Hallova jevu
- Kanálem, v němž jsou umístěny elektrody proudí vodivé médium (kapalina, plyn, plazma). Celá část okolo elektrod je v homogenním magnetické poli, jehož směr je kolmý na směr proudění média a zároveň na spojnici elektrod. Na nabitě částice působí Lorentzova síla, způsobující zakřivení trajektorie částic. Částice se začnou pohybovat směrem k elektrodám – tzv. Faradayův jev, a zároveň se začnou zpomalovat vůči neutrálním částicím – tzv. Hallův jev.
- Na jedné elektrodě se začnou hromadit záporné a na druhé elektrodě kladné ionty – na elektrodách tak vznikne napětí.

# PRINCIP MHD GENERÁTORŮ

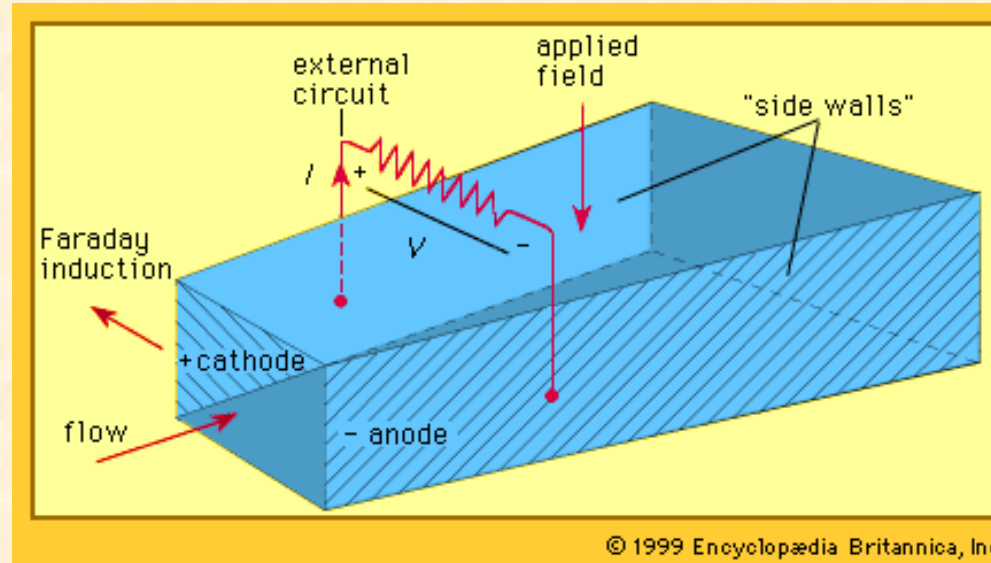
**A** Turbogenerator



**B** MHD generator



© 1999 Encyclopædia Britannica, Inc.

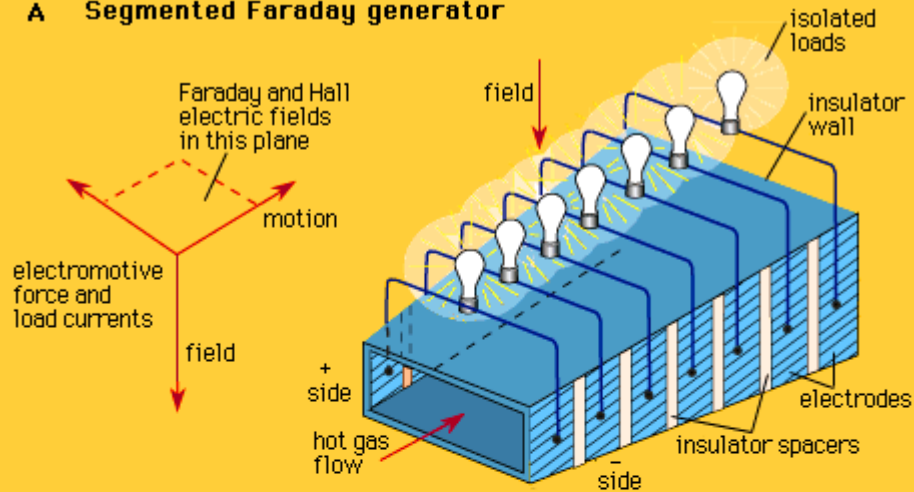


© 1999 Encyclopædia Britannica, Inc.

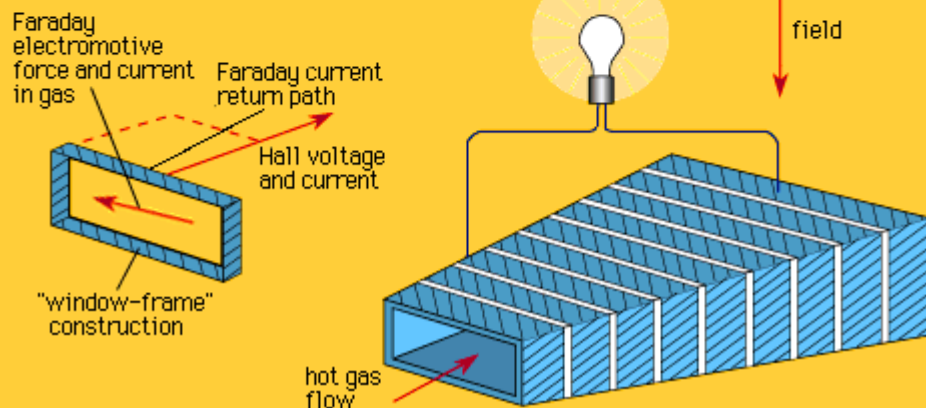


# TYPY MHD GENERÁTORŮ

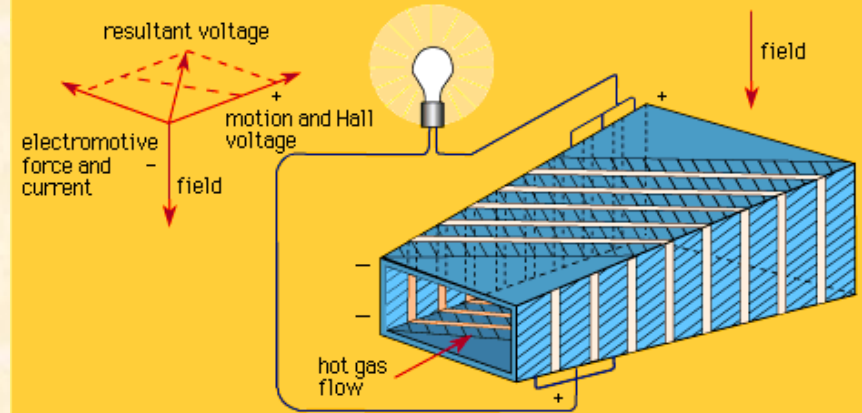
**A Segmented Faraday generator**



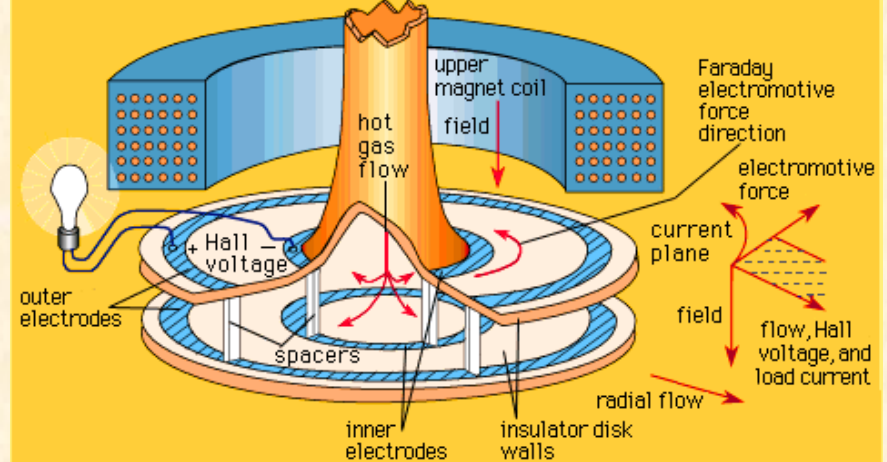
**B Hall generator**



**C diagonal generator with "window-frame" construction**

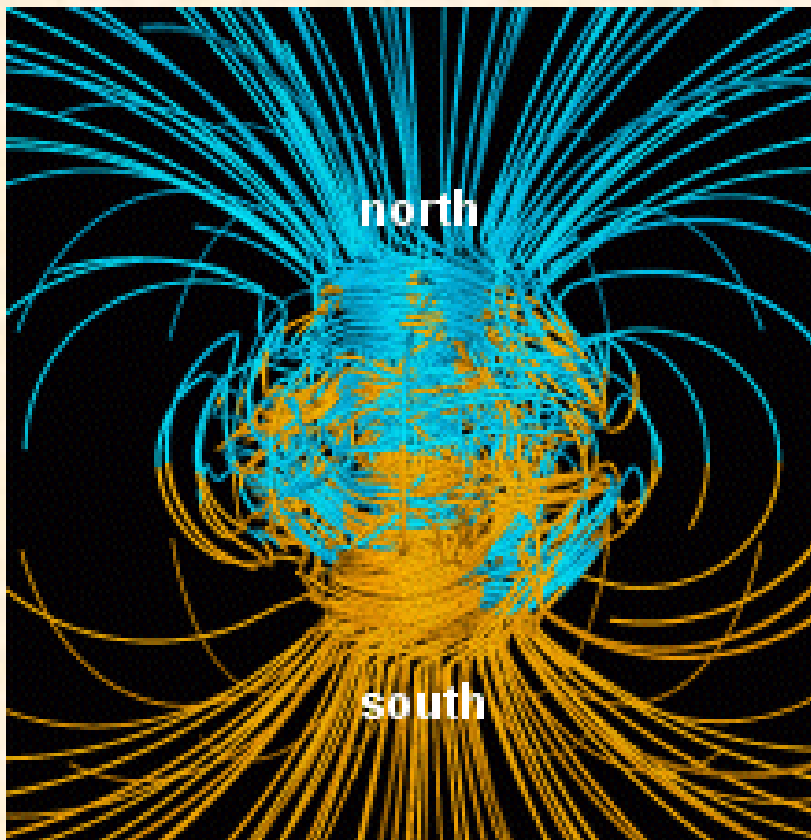


**D disk generator**

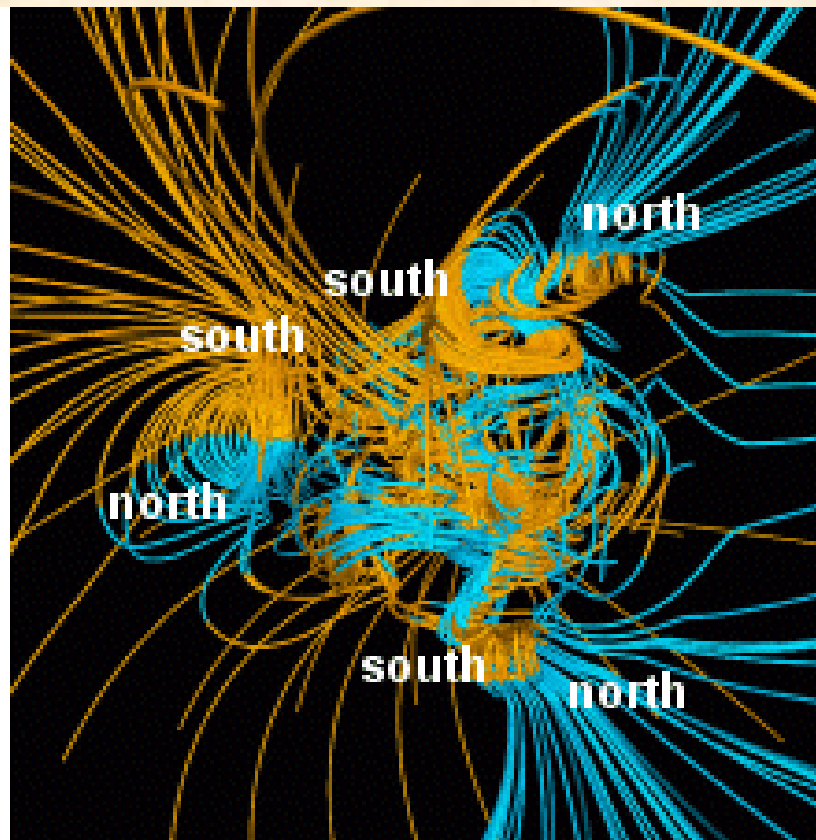




# GEOFYZIKA



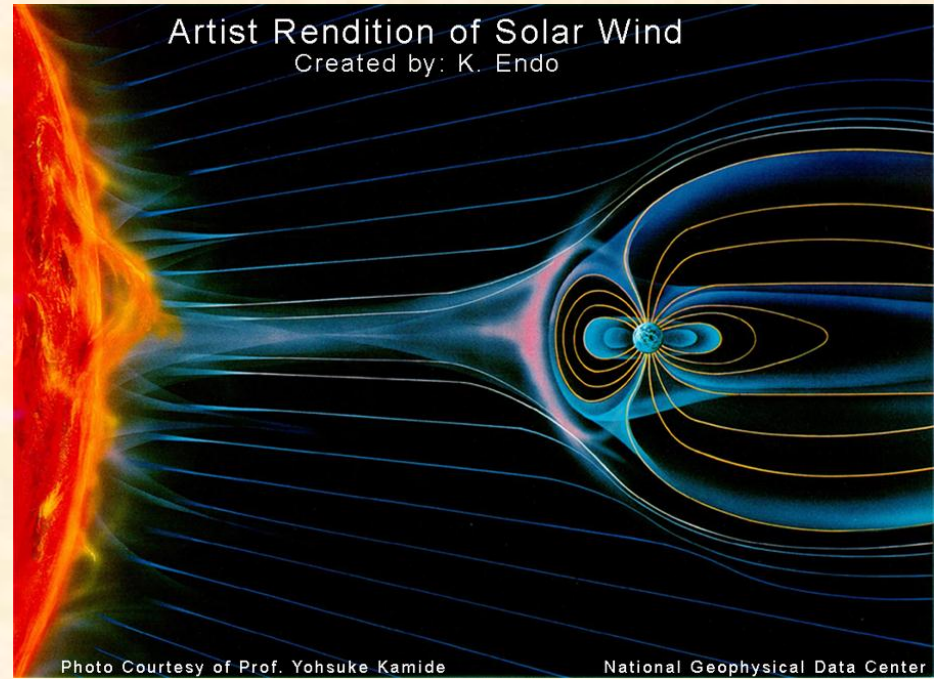
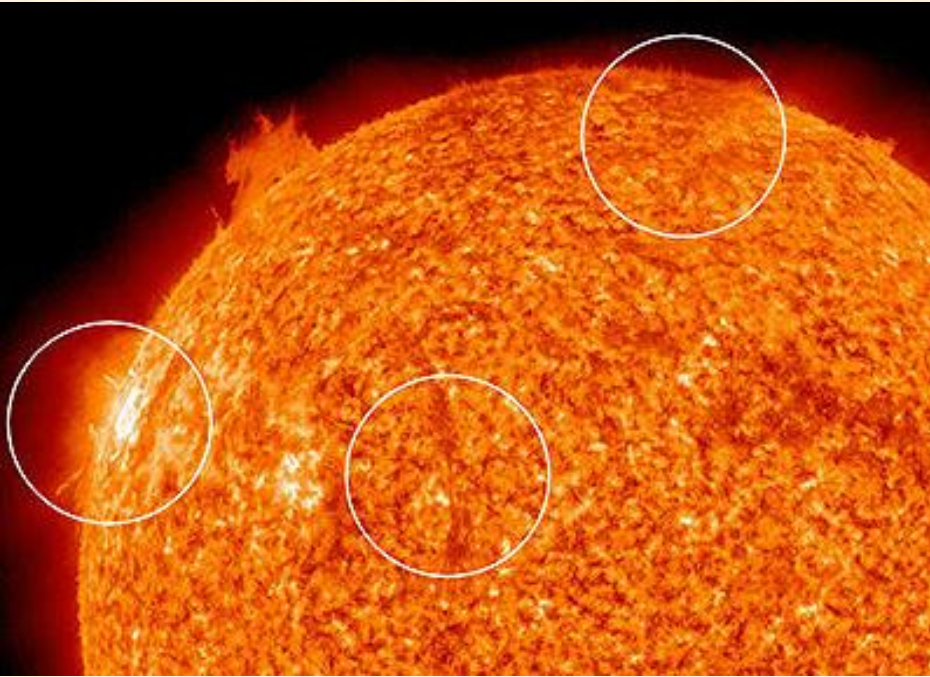
**between reversals**



**during a reversal**

Počítačová simulace tekutinového dynama uvnitř Země zabývající se změnami magnetického pole – magnetické pole Země se převrací každých několik 1000 let.

# ASTROFYZIKA



Sluneční skvrny jsou způsobeny magnetickým polem Slunce, jak teoreticky předpověděl J. Larmor (1919)

Solární vítr se také řídí magnetohydrodynamikou.

# Strojírenství a lékařství

- Plazmové udržení
- Chlazení jaderných reaktorů tekutými kovy
- Elektromagnetické odlévání
- MHD pumpa – v mikrofluidních zařízeních
- MHD pohony – lodí, ponorek, vesmírných sond (výzkum)
- Magnetic Drug Targeting – výzkum rakoviny
- <http://www.comsol.com/showroom/animations/197/>