

1 Rozdělovací funkce

Rozdělovací funkci lze chápat jako hustotu částic ve fázovém prostoru, tedy

$$f(t, \vec{r}, \vec{v}) = \frac{d^6 N(t, \vec{r}, \vec{v})}{d\vec{r} d\vec{v}},$$

kde $d^6 N(t, \vec{r}, \vec{v})$ je počet částic v prostoru mezi \vec{r} a $\vec{r} + d\vec{r}$ a s rychlostí mezi \vec{v} a $\vec{v} + d\vec{v}$. Jmenovatel ve zlomku vyjadřuje objem zvoleného malého elementu. Rozdělovací funkce se také občas nazývá distribuční funkcí.

2 Poznámka k názvosloví

Tento název je trošku matoucí. Neodpovídá pojmu distribuční funkce, který se používá ve statistice. Podívejme se tedy na statistiku. Mějme nějakou veličinu χ , která může nabývat libovolné hodnoty z oboru reálných čísel. Řečeno jazykem statistiky χ je náhodná spojitá veličina. Pak pravděpodobnost, že při náhodném výběru hodnoty χ získáme konkrétní číslo, je vždy nulová. Je to dáno tím, že pravděpodobnost zisku jednoho konkrétního čísla je dána jako poměr jedné (získali jsme jedno číslo) ku počtu všech možných výsledků, kterých je nekonečně mnoho (protože χ je spojitá veličina).

Pro spojitě veličiny se proto zavádí hustota pravděpodobnosti $\varrho(\chi)$ a pracuje se s pravděpodobností získání hodnot v nějakém malém intervalu $\chi + d\chi$. Pravděpodobnost získání hodnoty χ v rozsahu $\langle \chi_1, \chi_2 \rangle$ je pak dána jako

$$P(\chi_1 \leq \chi \leq \chi_2) = \int_{\chi_1}^{\chi_2} \varrho(\chi) d\chi.$$

Pro hustotu pravděpodobnosti zároveň musí platit, že pravděpodobnost všech možných hodnot χ dohromady musí být rovna jedné

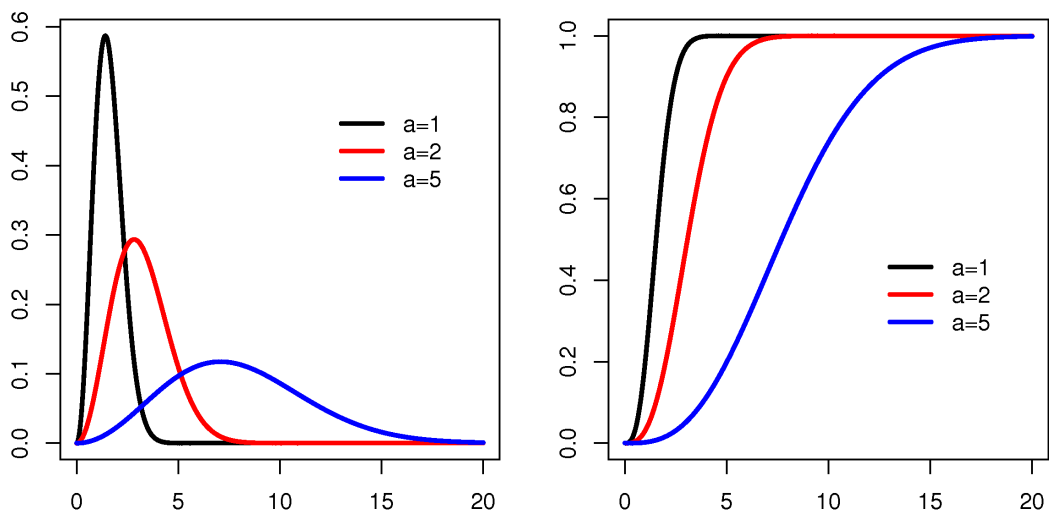
$$P(\Omega) = \int_{\Omega} \varrho(\chi) d\chi = 1,$$

kde Ω je definiční obor veličiny χ (tedy $\varrho(\chi) = 0$ pro $\chi \notin \Omega$).

Distribuční funkce $F(\chi)$ ve statistickém pojetí je pak pravděpodobnost, že náhodná veličina bude mít hodnotu χ a méně. Zapsáno matematicky

$$F(\chi) = \int_{-\infty}^{\chi} \varrho(t) dt.$$

Plynou z toho některé důsledky: $\lim_{\chi \rightarrow -\infty} F(\chi) = 0$, $\lim_{\chi \rightarrow \infty} F(\chi) = 1$ a distribuční funkce je neklesající. Rozdělovací funkce pro elektrony tedy nemůže být distribuční funkcí ve statistickém slova smyslu, ale odpovídá hustotě pravděpodobnosti.



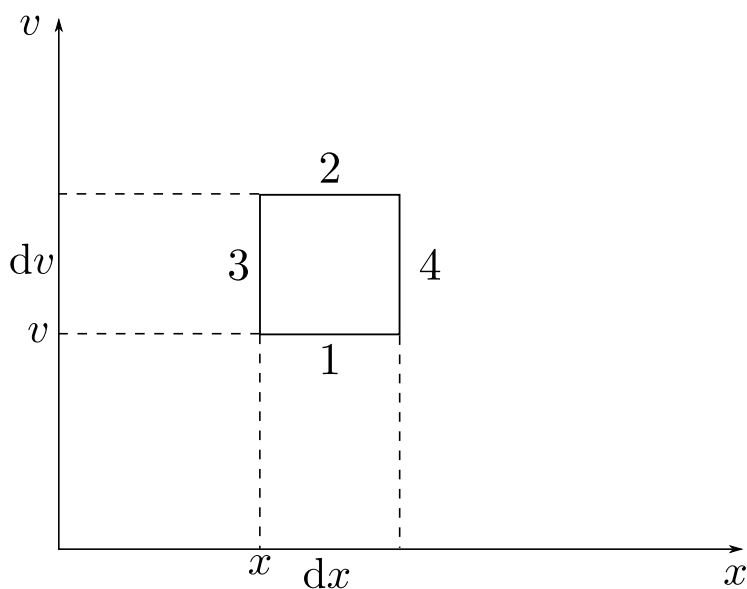
Obrázek 1: Maxwell-Boltzmannova rozdělovací funkce a odpovídající distribuční funkce. (zdroj: wikipedie)

3 Bezsrážková BKR

Boltzmannova kinetická rovnice ve své podstatě není nic jiného, než rovnicí kontinuity pro rozdělovací funkci. Protože je rozdělovací funkce závislá na sedmi nezávislých proměnných, bude i rovnice kontinuity poněkud složitější. Předpokládejme jednorozměrný případ, kdy se elektrony mohou pohybovat pouze ve směru osy x . Fázový prostor v takovém případě bude pouze dvourozměrný v souřadnicích x a v_x . Situaci si můžeme představit schématicky jako na obrázku 2. Předpokládejme, že uvnitř vyznačeného obdélníku je dostatek částic, abychom mohli mluvit o hustotě (a pracovat s rozdělovací funkcí). Dále předpokládejme, že rozměry obdélníku jsou dostatečně malé, takže rozdělovací funkci na hranici obdélníku můžeme považovat za konstantní. A jako poslední předpokládejme, že částice nevznikají, nezánikají, ani se nijak nesráží. Podle rovnice kontinuity pak změna počtu částic uvnitř obdélníku může být způsobena pouze tím, že částice dovnitř nebo ven přetečou přes okraje.

Obecně je počet částic, které projdou nějakou stěnou za čas dt , dán jako součin hustoty částic ($f(t, x, v)$), plochy stěny (dx, dv), rychlosti proudění (časová derivace $\frac{dx}{dt}, \frac{dv}{dt}$) a velikosti časového kroku dt . Podívejme se tedy, jak to bude vypadat v našem konkrétním jednorozměrném případě.

1. $N_1 = f(t, x, v) dx a(t, x, v) dt$
2. $N_2 = f(t, x, v + dv) dx a(t, x, v + dv) dt$



Obrázek 2: Jednoduché znázornění fázového prostoru částic pohybujících se pouze v jednorozměrném prostoru.

$$3. N_3 = f(t, x, v) dv v dt$$

$$4. N_4 = f(t, x + dx, v) dv v dt,$$

kde jsme využili vztahů $\frac{dv}{dt} = a$ a $\frac{dx}{dt} = v$ a zároveň předpokladu, že v je nezávislá proměnná.

Změny počtu částic uvnitř objemu $dx dv$ můžeme tedy zapsat

$$\begin{aligned} [f(t + dt, x, v) - f(t, x, v)] dx dv &= [f(t, x, v)a(t, x, v) - f(t, x, v + dv)a(t, x, v + dv)] dx dt + \\ &+ [f(t, x, v) - f(t, x + dx, v)] v dv dt. \end{aligned}$$

Když tuto rovnici nyní podělíme $dx dv dt$, zjistíme, že ji můžeme zapsat ve tvaru

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial(af)}{\partial v} - \frac{\partial(vf)}{\partial x}.$$

Podle předpokladů rozdělovací funkce rychlost nezávislá veličina a nezávisí na poloze. Budeme-li předpokládat, že síla působící na částice $a = \frac{F}{m}$ nezávisí na rychlosti, pak získáme obvyklý zápis bezsrážkové Boltzmannovy kinetické rovnice

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{F}{m} \frac{\partial f}{\partial v} = 0,$$

případně trojrozměrný případ

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \nabla f + \frac{\vec{F}}{m} \nabla_{\vec{v}} f = 0.$$

Otázka je, jestli je předpoklad nezávislosti síly na rychlosti oprávněný. Například Lorentzova síla $\vec{F} = \vec{v} \times \vec{B}$ zcela evidentně na rychlosti závisí. Ovšem Lorentzova síla je poněkud speciální případ. Z definice vektorového součinu pro složku x platí $F_x = v_y B_z - v_z B_y$. Výsledek nezávisí na v_x a tedy platí $\frac{\partial F_x}{\partial v_x} = 0$. Obdobně můžeme argumentovat pro složky ve směru y a z . Protože $\nabla_v \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial v_x} + \frac{\partial F_y}{\partial v_y} + \frac{\partial F_z}{\partial v_z} = 0$, můžeme pro případ Lorentzovy síly s klidem psát $\nabla_v \left(\frac{\vec{F}}{m} f \right) = \frac{\vec{F}}{m} \nabla_v f$.

3.1 Rychlé odvození BKR

Boltzmannovu kinetickou rovnici lze jednoduše odvodit za předpokladu, že poloha a rychlost částic nejsou nezávislé veličiny, ale jsou funkcí času. Pak derivace rozdělovací funkce podle času bude

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{dv}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} + a \frac{\partial f}{\partial v}.$$

4 Srážkový člen

Zatím jsme předpokládali, že částice nám z našeho elementárního objemu ve fázovém prostoru můžou utéct pouze přes jeho stěny. V důsledku srážek ale může dojít k tomu, že částice buď úplně zanikne, nebo bude její chování velice prudce ovlivněno. U takto rozptýlených částic lze těžko mluvit o nějakém toku přes stěny elementárního objemu.

Předpokládejme, že srážka je podstatně rychlejší, než časový úsek dt , který jsme použili při odvození bezsrážkové kinetické rovnice. Srážku budeme považovat za okamžitou. V takovém případě ale částice nestihne během srážky změnit svoji polohy. Z elementárního objemu uteče pouze změnou její rychlosti (posunutím se ve směru osy v).

Pokusíme se nyní sestavit srážkový člen. Sráží dva různé druhy částic, z nichž jedny jsou popsány rozdělovací funkcí $f_1(t, r, v)$ a druhé $f_2(t, r, v)$. Nás bude zajímat změna rozdělovací funkce $f_1(t, r, v)$. Vezměme nyní v potaz pouze srážky částic, které mají rychlosti v_1 a v_2 (přesněji mezi v_1 a $v_1 + dv_1$, tedy uvnitř elementárního objemu). Popis srážky budeme provádět v soustavě, v níž jsou částice 2 v klidu. Počet popadajících částic typu 1 pak bude

$$\Gamma_1 = |v_1 - v_2| n_2 = |v_1 - v_2| f_2 d\vec{r}_1 d\vec{v}_1.$$

Dále budeme potřebovat vztahy z teorie rozptylu. Především ten, který říká, kolik částic se rozptýlí do elementárního úhlu $d\Omega$ za jednotku času dt ,

$$dN_1 = n_2 \Gamma_1 I d\Omega dt,$$

kde I je diferenciální účinný průřez. Když dosadíme za Γ_1 a n_2 získáme množství částic, které se ztratili z objemu $d\vec{r}d\vec{v}$ díky srážce s částicí o rychlosti v_2 a rozptýlili se do prostorového úhlu $d\Omega$

$$dN_1 = f_1 f_2 |v_1 - v_2| d\vec{v}_2 I d\Omega d\vec{r}_1 d\vec{v}_1 dt.$$

Počet všech částic, které jsme takto ztratili pak získáme integrací přes všechny možné rychlosti v_2 a přes všechny možné úhly rozptylu. Změnu rozdělovací funkce pak získáme podobně jako při odvození bezsrážkové kinetické rovnice podělením velikostí elementárního objemu a časovým krokem (tedy celou rovnici podělíme $d\vec{r}_1 d\vec{v}_1 dt$) a získáme

$$\left. \frac{\partial f_1}{\partial t} \right|_{\text{out}} = \iint f_1 f_2 |v_1 - v_2| I d\Omega d\vec{v}_2.$$

Takto jsme získali změnu rozdělovací funkce způsobenou ztrátou částic z elementárního objemu v důsledku srážek. Ovšem zatím jsme nevzali v úvahu, že se v důsledku srážek mohou také některé částice uvnitř elementárního objemu objevit. Které částice to budou? V předchozím odstavci jsme popsali mechanismus srážky, který vede k odstranění částic z objemu. Když ale vezmeme srážku "inverzní" budou nám částice uvnitř elementárního objemu přibývat. Označíme-li čárkou hodnoty po srážce, můžeme rovnou psát

$$\left. \frac{\partial f_1}{\partial t} \right|_{\text{in}} = \iint f'_1 f'_2 |v'_1 - v'_2| I' d\Omega' d\vec{v}'_2.$$

Z teorie rozptylu plyne, že účinný průřez pro přímou a inverzní srážku je stejný, tedy $I d\Omega = I' d\Omega'$. Bude-li navíc srážka elastická, bude rozdíl rychlostí před srážkou a po srážce konstantní $|v_1 - v_2| = |v'_1 - v'_2|$ a můžeme tak integrovat přes nečárkovanou rychlost.

Celková změna rozdělovací funkce v důsledku srážek pak bude součtem obou předchozích jevů. Musíme ale brát v úvahu znaménko vyjadřující, že částice v jednom případě ubývají a ve druhém přibývají. Získáme obecný vztah platný pro elastické srážky

$$\left. \frac{\partial f_1}{\partial t} \right|_{\text{srážk.}} = \left. \frac{\partial f_1}{\partial t} \right|_{\text{in}} - \left. \frac{\partial f_1}{\partial t} \right|_{\text{out}} = \iint (f'_1 f'_2 - f_1 f_2) |v_1 - v_2| I d\Omega d\vec{v}_2.$$