Termodynamika – Domácí úkol # 04

Domácí úkol odevzdejte do 30.11.2021

1. **Carnot a Van der Waalsův plyn**
   Spočítejte účinnost Carnotova cyklu prováděného s Van der Waalsovým plynem.
   Řešení: Účinnost spočítaná přes práci a dodané teplo vyjde úplně stejně jako pro ideální plyn
   $$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}, \tag{1}$$
   kdy $T_1 > T_2$.

2. **Maximální teplo**
   Uvažte dvě tělesa s teplotami $T_1 = 100\,\mathrm{K}$ a $T_2 = 400\,\mathrm{K}$, hmotnostmi $M_1 = M_2 = M$ a tepelnými kapacitami $c_1 = c_2 = c$. Stroj (pomocí vratného termodynamického cyklu) koná práci a extrahuje teplo z teplejšího tělesa a chladnější těleso využívá jako chladič. Kolik tepla může stroj využít maximálně (k vykonání práce)? Výsledek vyjádřete jako násobek Mc.
   Řešení: Stroj pracuje následujícím způsobem: při jednom cyklu využije teplo z teplejšího tělesa částečně k práci a zbytkové teplo předá chladiči. Musíme tedy nejprve najít konečný stav soustavy. Stroj může pracovat dokud $T_1 \neq T_2$, takže limitní případ, kdy stroj nemůže pracovat nastane v okamžiku, kdy jsou si teploty rovny (a Carnotův stroj má nulovou účinnost). Konečnou teplotu označme T. K tomu, aby bylo extrahováno maximální teplo se nesmí entropie systému na začátku a na konci změnit. Tato podmínka nás přivádí k rovnici
   $$Mc_V \ln(T_1) + Mc_V \ln(T_2) = Mc_V \ln(T) + Mc_V \ln(T) = 2Mc_V \ln(T) \tag{2}$$
   z této rovnice snadno spočítáme výslednou teplotu T
   $$T = \sqrt{T_1 T_2}. \tag{3}$$
   Extrahované teplo pak spočítáme snadno
   $$\begin{aligned} Q &= Mc_V \Delta T_1 + Mc_V \Delta T_2 \\ &= Mc_V \left(T_2 - \sqrt{T_1 T_2} + T_1 - \sqrt{T_1 T_2}\right) = Mc_V \left(T_2 - 2\sqrt{T_1 T_2} + T_1\right) \\ &= mc_V \left(\sqrt{T_2} - \sqrt{T_1}\right)^2 = 100 mc_V. \end{aligned} \tag{4}$$

3. **Maxwell-Boltzmannovo rozdělení**
   Spočtěte střední hodnoty:
   (a) $\langle p^n \rangle$,
   (b) $\langle \Delta E \rangle$,
   (c) pravděpodobnost, že $p_z > 0$.

   Řešení:

   (a) Počítáme integrál
   $$\langle p^n \rangle = \int\int\int \mathrm{d}^3 p\, p^n \exp\left(-\frac{p^2}{2mk_\mathrm{B}T}\right), \tag{5}$$
   který převedeme do sférických souřadnic a pak provedeme substituci $t = p^2/(2mk_\mathrm{B}T)$, výsledek je roven
   $$\langle p^n \rangle = 2\frac{(2mk_\mathrm{B}T)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{n}{2} + \frac{3}{2}\right). \tag{6}$$

(b) Lze využít dosazení do předchozího vzorce

$$\langle \Delta E \rangle = \sqrt{\left\langle \frac{p^4}{4m^2} \right\rangle - \left\langle \frac{p^2}{2m} \right\rangle^2} = \frac{1}{2m}\sqrt{\langle p^4 \rangle - \langle p^2 \rangle^2}, \tag{7}$$

odkud

$$\langle \Delta E \rangle = \frac{\sqrt{6}}{2} k_{\mathrm{B}} T. \tag{8}$$

(c) Zde zřejmě vyjde $\frac{1}{2}$.