

Pokročilé disperzní modely v optice tenkých vrstev

Lekce 4: Klasické disperzní modely

Daniel Franta

Ústav fyzikální elektroniky, Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita

2. 4. 2020

Obsah

- 1 Úvod
- 2 Disperzní model řídkého plazmatu
- 3 Disperzní model harmonického oscilátoru
- 4 Disperzní model volných částic (Drudeho model)
- 5 Disperzní model tlumeného harmonického oscilátoru (Lorentzův model)

Úvod

- Pro odvození klasických disperzních modelů se používají klasické (Newtonovy) pohybové rovnice.
- Ve srovnání s kvantově mechanickými modely jsou relativně jednoduché.
- Jejich použitelnost u kondenzovaných látek je omezena na
 - na fonony (kolektivní kmity mříže) v ideálním krystalu
 - na Cooperovy elektronové páry v supravodičích
 - v ostatních případech jsou klasické modely většinou pouze hrubou aproximací skutečné dielektrické odezvy

Základní předpoklady

- Kvazineutralita systému
- částice interagují pouze prostřednictvím elektrického pole $\hat{\mathbf{E}}(\omega, \hat{\mathbf{k}})$

Obsah

- 1 Úvod
- 2 Disperzní model řídkého plazmatu**
- 3 Disperzní model harmonického oscilátoru
- 4 Disperzní model volných částic (Drudeho model)
- 5 Disperzní model tlumeného harmonického oscilátoru (Lorentzův model)

Disperzní model řídkého plazmatu

- Předpokládáme, že se částice nesráží ani jinak mezi sebou neinteragují (nulový účinný průřez).
- Odvození provedeme v přímém časoprostoru jako odezvu na jednotkový elektrický pulz v čase $t = 0$.

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{E}_p \delta(t)$$

Před příchodem pulsu částice měli nulovou **driftovou rychlost** a po příchodu **elektronů** a **jádra** získaly driftovou rychlost úměrnou jejich náboji a nepřímo úměrnou jejich hmotnosti

$$\mathbf{v}_e(t) = -\frac{e}{m_e} \Theta(t) \mathbf{E}_p \qquad \mathbf{v}_n(t) = \frac{eZ_n}{m_n} \Theta(t) \mathbf{E}_p$$

Tato driftová rychlost po vynásobení nábojem a hustotou částic odpovídá proudové hustotě

$$\mathbf{j}(t) = \left[\frac{N_e e^2}{m_e} + \sum_n \frac{e^2 Z_n^2 N_n}{m_n} \right] \Theta(t) \mathbf{E}_p$$

Disperzní model řídkého plazmatu

- Předpokládáme, že se částice nesráží ani jinak mezi sebou neinteragují (nulový účinný průřez).
- Odvození provedeme v přímém časoprostoru jako odezvu na jednotkový elektrický pulz v čase $t = 0$.

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{E}_p \delta(t)$$

Před příchodem pulsu částice měli nulovou **driftovou rychlost** a po příchodu **elektrony** a **jádra** získaly driftovou rychlost úměrnou jejich náboji a nepřímo úměrnou jejich hmotnosti

$$\mathbf{v}_e(t) = -\frac{e}{m_e} \Theta(t) \mathbf{E}_p \qquad \mathbf{v}_n(t) = \frac{eZ_n}{m_n} \Theta(t) \mathbf{E}_p$$

Tato driftová rychlost po vynásobení nábojem a hustotou částic odpovídá proudové hustotě

$$\mathbf{j}(t) = \left[\frac{\mathcal{N}_e e^2}{m_e} + \sum_n \frac{e^2 Z_n^2 \mathcal{N}_n}{m_n} \right] \Theta(t) \mathbf{E}_p$$

Reálná optická vodivost $\sigma(t - t')$ je Greenova funkce

$$\mathbf{j}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(t - t') \mathbf{E}(t') dt'$$

Disperzní model řídkého plazmatu

- Předpokládáme, že se částice nesráží ani jinak mezi sebou neinteragují (nulový účinný průřez).
- Odvození provedeme v přímém časoprostoru jako odezvu na jednotkový elektrický pulz v čase $t = 0$.

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{E}_p \delta(t)$$

Před příchodem pulsu částice měli nulovou **driftovou rychlost** a po příchodu **elektronů** a **jádra** získaly driftovou rychlost úměrnou jejich náboji a nepřímo úměrnou jejich hmotnosti

$$\mathbf{v}_e(t) = -\frac{e}{m_e} \Theta(t) \mathbf{E}_p \qquad \mathbf{v}_n(t) = \frac{eZ_n}{m_n} \Theta(t) \mathbf{E}_p$$

Tato driftová rychlost po vynásobení nábojem a hustotou částic odpovídá proudové hustotě

$$\mathbf{j}(t) = \left[\frac{\mathcal{N}_e e^2}{m_e} + \sum_n \frac{e^2 Z_n^2 \mathcal{N}_n}{m_n} \right] \Theta(t) \mathbf{E}_p$$

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \left[\frac{\mathcal{N}_e e^2}{m_e} + \sum_n \frac{e^2 Z_n^2 \mathcal{N}_n}{m_n} \right] \Theta(t) \mathbf{1}$$

Výraz v hranatých závorkách je konstanta

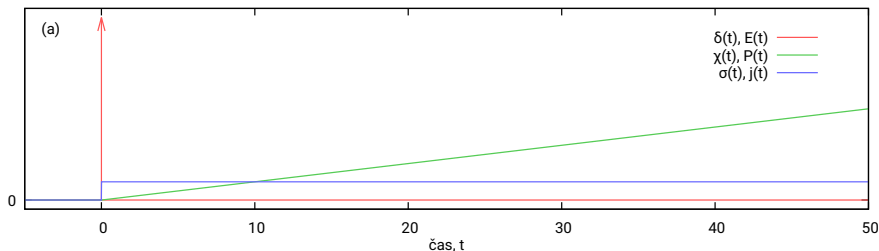
$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \left[\frac{\mathcal{N}_e e^2}{m_e} + \sum_n \frac{e^2 Z_n^2 \mathcal{N}_n}{m_n} \right] \Theta(t) \mathbf{1} = \epsilon_0 \omega_p^2 \Theta(t) \mathbf{1}$$

kde ω_p je **plazmová frekvence** – hustotní konstanta prostředí

$$\omega_p^2 = \frac{e^2 \mathcal{N}_e}{\epsilon_0 m_e} + \sum_n \frac{e^2 Z_n^2 \mathcal{N}_n}{\epsilon_0 m_n}$$

Reálná susceptibilita je integrálem reálné vodivosti

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{\chi}(t)}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\chi}(t) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{-\infty}^t \boldsymbol{\sigma}(t') dt' = \omega_p^2 t \Theta(t) \mathbf{1}$$



Funkce v recipročním prostoru jsou Fourierovými obrazy

$$\hat{\sigma}(\omega) = \epsilon_0 \omega_p^2 \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \frac{i}{\omega + i\eta} \mathbf{1} = \epsilon_0 \omega_p^2 \left[\pi \delta(\omega) + i \frac{1}{\omega} \right] \mathbf{1}$$

$$\hat{\chi}(\omega) = \frac{i}{\epsilon_0 \omega} \hat{\sigma}(\omega) = \omega_p^2 \left[\frac{-1}{\omega^2} + i\pi \frac{\delta(\omega)}{\omega} \right] \mathbf{1} \quad \text{často psaná} \quad \hat{\chi}(\omega) = -\frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

A protože platí:

- 1 $\chi(t)$ je reálná funkce
- 2 $\chi(t) = 0$ pro $t < 0$ je kauzální
- 3 a z definice jde o systém neinteragujících částic

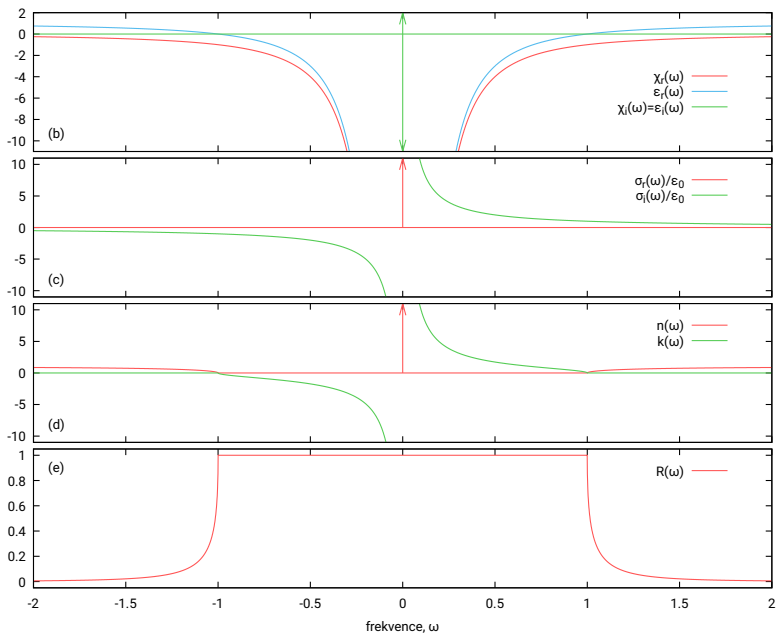
tak potom platí tři základní podmínky pro odezвовou funkci:

- 1 časově reverzní symetrie: $\hat{\chi}(\omega) = \hat{\chi}(-\omega)^*$
- 2 Kramers–Kronigovy relace:

$$\chi_r(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi_i(\xi)}{\xi - \omega} d\xi \quad \chi_i(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi_r(\xi)}{\xi - \omega} d\xi + \frac{\sigma_r(0)}{\epsilon_0 \omega}$$

- 3 sumační pravidla

$$\int_0^{\infty} \omega \chi_i(\omega) d\omega = \frac{\pi}{2} \omega_p^2 \quad \int_0^{\infty} \chi_r(\omega) d\omega = -\frac{\pi}{2} \frac{\sigma_r(0)}{\epsilon_0}$$



- Disperzní model řídkého plazmatu je modelem volných neinteragujících nabitých částic.
- Tento model je vhodný pro popis Cooperových párů v supravodiči. Tyto stavy dvou elektronů s opačným spinem se chovají jako bozony, které mezi sebou vzájemně neinteragují.
- Plazmová frekvence popisuje potom efektivní hustotu těchto stavů v systému, tedy nepopisuje systém jako celek.

Obsah

- 1 Úvod
- 2 Disperzní model řídkého plazmatu
- 3 Disperzní model harmonického oscilátoru**
- 4 Disperzní model volných částic (Drudeho model)
- 5 Disperzní model tlumeného harmonického oscilátoru (Lorentzův model)

Disperzní model harmonického oscilátoru

- Předpokládejme dvě částice s navzájem opačným nábojem a různou hmotností (něco jako atom vodíku).
- Izotropní model.
- Předpokládáme, že se atomy navzájem nesráží ani jinak mezi sebou neinteragují (nulový účinný průřez).
- Odvození provedeme v přímém časoprostoru jako odezvu na jednotkový elektrický pulz v čase $t = 0$.

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{E}_p \delta(t)$$

Pohybové rovnice

$$m_e \frac{d^2 \mathbf{x}_e(t)}{dt^2} = \kappa_r [\mathbf{x}_n(t) - \mathbf{x}_e(t)] \quad m_n \frac{d^2 \mathbf{x}_n(t)}{dt^2} = \kappa_r [\mathbf{x}_e(t) - \mathbf{x}_n(t)]$$

κ_r – **konstanta pružnosti**

\mathbf{x}_e – střední posunutí **elektronu** vzhledem k těžišti

\mathbf{x}_n – střední posunutí **jádra** vzhledem k těžišti

Elektrická síla nemění pohybový stav těžiště díky kvazineutralitě.

Řešení pohybových rovnic:

$$\mathbf{v}_e(t) = \frac{d\mathbf{x}_e(t)}{dt} = -\frac{e}{m_e} \cos(\omega_r t) \Theta(t) \mathbf{E}_p \quad \mathbf{v}_n(t) = \frac{d\mathbf{x}_n(t)}{dt} = \frac{e}{m_n} \cos(\omega_r t) \Theta(t) \mathbf{E}_p$$

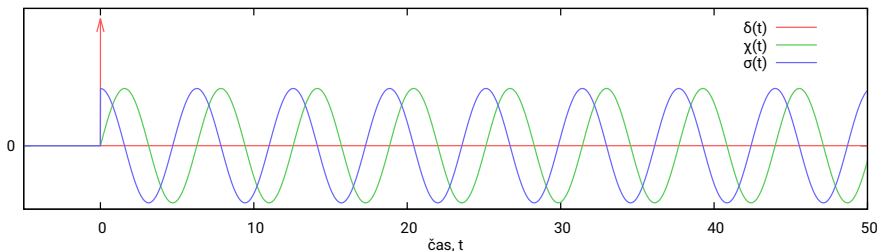
$$\mathbf{x}_e(t) = -\frac{e}{m_e \omega_r} \sin(\omega_r t) \Theta(t) \mathbf{E}_p \quad \mathbf{x}_n(t) = \frac{e}{m_n \omega_r} \sin(\omega_r t) \Theta(t) \mathbf{E}_p$$

$$\omega_r^2 = \frac{\kappa_r}{\mu} \quad \mu = \frac{m_n m_e}{m_n + m_e}$$

Potom

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \epsilon_0 \omega_p^2 \cos(\omega_r t) \Theta(t) \mathbf{1}$$

$$\boldsymbol{\chi}(t) = \frac{\omega_p^2}{\omega_r} \sin(\omega_r t) \Theta(t) \mathbf{1}$$



Funkce v recipročním prostoru jsou Fourierovými obrazy

$$\hat{\sigma}(\omega) = \epsilon_0 \omega_p^2 \left[\frac{\pi}{2} \left(\delta(\omega + \omega_r) + \delta(\omega - \omega_r) \right) + i \frac{\omega}{\omega_r^2 - \omega^2} \right] \mathbf{1}$$

$$\hat{\chi}(\omega) = \omega_p^2 \left[\frac{1}{\omega_r^2 - \omega^2} + i \frac{\pi}{2\omega} \left(\delta(\omega + \omega_r) + \delta(\omega - \omega_r) \right) \right] \mathbf{1}$$

A opět platí tři základní podmínky pro odezvousou funkci:

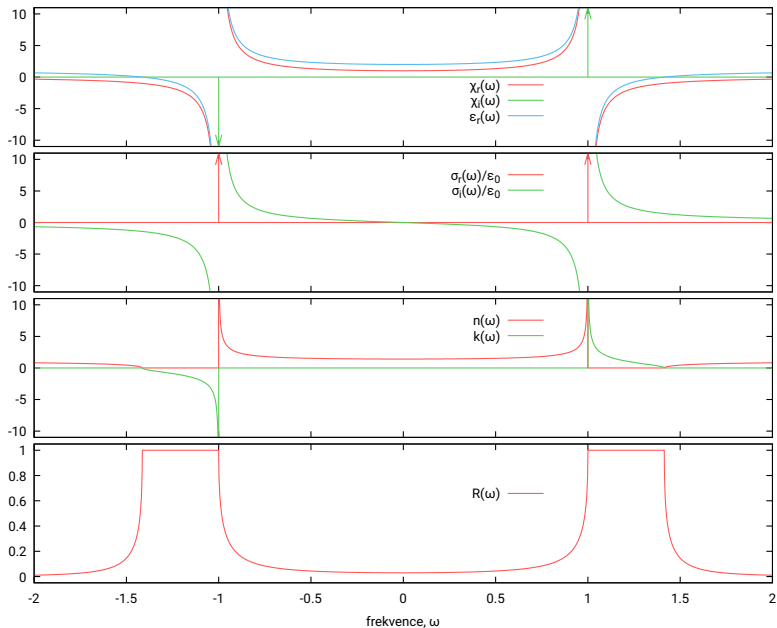
- 1 časově reverzní symetrie: $\hat{\chi}(\omega) = \hat{\chi}(-\omega)^*$
- 2 Kramers–Kronigovy relace:

$$\chi_r(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi_i(\xi)}{\xi - \omega} d\xi \quad \chi_i(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi_r(\xi)}{\xi - \omega} d\xi + \frac{\sigma_r(0)}{\epsilon_0 \omega}$$

- 3 sumační pravidla

$$\int_0^{\infty} \omega \chi_i(\omega) d\omega = \frac{\pi}{2} \omega_p^2 \quad \int_0^{\infty} \chi_r(\omega) d\omega = -\frac{\pi}{2} \frac{\sigma_r(0)}{\epsilon_0} = 0$$

$$\epsilon_r(\omega) = 1 + \chi_r(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_r^2 - \omega^2} = \frac{\omega_s^2 - \omega^2}{\omega_r^2 - \omega^2} \quad \omega_s^2 = \omega_r^2 + \omega_p^2$$



- Disperzní model harmonického oscilátoru není realistickým modelem, s kterým se můžeme setkat.
- Má nezastupitelnou úlohu v teorii, protože popisuje dielektrickou odezvu kvantově mechanického modelu popsaného pomocí **Fermiho zlatého pravidla** (přechod mezi dvěma diskretními energiovými hladinami).
- Fonony v pevné látce – kmity mříže jsou popsány v rámci kvazičásticového přístupu jako fonony (neinteragující bozonové kvazičástice, tj. nezávislé harmonické oscilátory).
- Model harmonického oscilátoru je totožný s empirickým Sellmeierovým modelem:

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 + \sum_i \frac{\omega_{p,i}^2}{\omega_{r,i}^2 - \omega^2}$$

$$n^2(\lambda) = \varepsilon_r(\lambda) = 1 + \sum_i \frac{B_i \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_i^2}$$

Obsah

- 1 Úvod
- 2 Disperzní model řídkého plazmatu
- 3 Disperzní model harmonického oscilátoru
- 4 Disperzní model volných částic (Drudeho model)**
- 5 Disperzní model tlumeného harmonického oscilátoru (Lorentzův model)

Disperzní model volných částic (Drudeho model)

- Předpokládáme, že se částice sráží s určitou pravděpodobností (frekvencí).
- Odvození provedeme v přímém časoprostoru jako odezvu na jednotkový elektrický pulz v čase $t = 0$.

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{E}_p \delta(t)$$

Stejně jako v modelu řídkého plazmatu, před příchodem pulsu částice měli nulovou **driftovou rychlost** a po příchodu **elektronů** a jádra získaly driftovou rychlost úměrnou jejich náboji a nepřímo úměrnou jejich hmotnosti.

- Předpokládáme, že částice každou srážkou ztratí driftovou rychlost (pohyb po srážce je zcela náhodný).

Hustota nesražených elektronů klesá s časem exponenciálně

$$\frac{d\mathcal{N}_e(t)}{dt} = -\gamma \mathcal{N}_e(t) \qquad \mathcal{N}_e(t) = \mathcal{N}_e \exp(-\gamma t) \Theta(t)$$

Distribuční funkce pravděpodobnosti srážky elektronu v čase:

$$f_{i_e}(t) = \gamma \exp(-\gamma t) \qquad \int_0^{\infty} f_{i_e}(t) dt = 1 \quad \text{normalizovaná}$$

Průměrná doba mezi srážkami τ jednoho elektronu je tedy

$$\tau = \int_0^{\infty} t f_{i_e}(t) dt = \frac{1}{\gamma} \qquad \gamma \text{ je srážková frekvence}$$

Na systém se můžeme dívat tak, jako by neklesal počet nesražených částic, ale tak jako by klesala fiktivně driftová rychlost elektronů:

$$\frac{d\mathbf{v}_e(t)}{dt} = -\gamma\mathbf{v}_e(t)$$

respektive můžeme psát fiktivní Newtonovu rovnici obsahující disipativní sílu

$$m_e \frac{d\mathbf{v}_e(t)}{dt} = -\kappa_d \mathbf{v}_e(t) \qquad \kappa_d = m_e \gamma = \frac{m_e}{\tau}$$

Tedy jako by elektron byl tlumen silou úměrnou jeho rychlosti. To stejné platí pro jádra. Navíc platí zákon zachování celkové hybnosti, proto

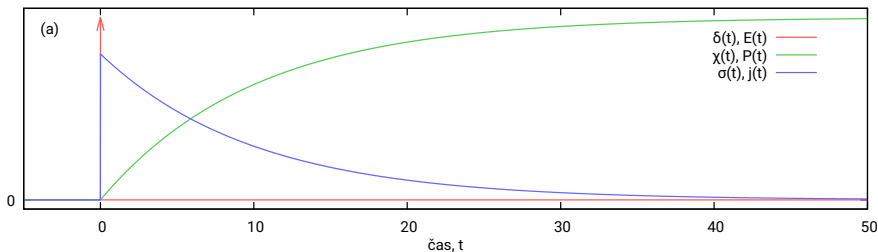
$$\mathbf{v}_e(t) = -\frac{e}{m_e} \exp(-\gamma t) \Theta(t) \mathbf{E}_p \qquad \mathbf{v}_n(t) = \frac{eZ_n}{m_n} \exp(-\gamma t) \Theta(t) \mathbf{E}_p$$

Potom časový vývoj dielektrické odezvy na jednotkový pulz (Greenova funkce) je

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \epsilon_0 \omega_p^2 \exp(-\gamma t) \Theta(t) \mathbf{1}$$

respektive po integraci

$$\boldsymbol{\chi}(t) = \frac{\omega_p^2}{\gamma} [1 - \exp(-\gamma t)] \Theta(t) \mathbf{1}$$



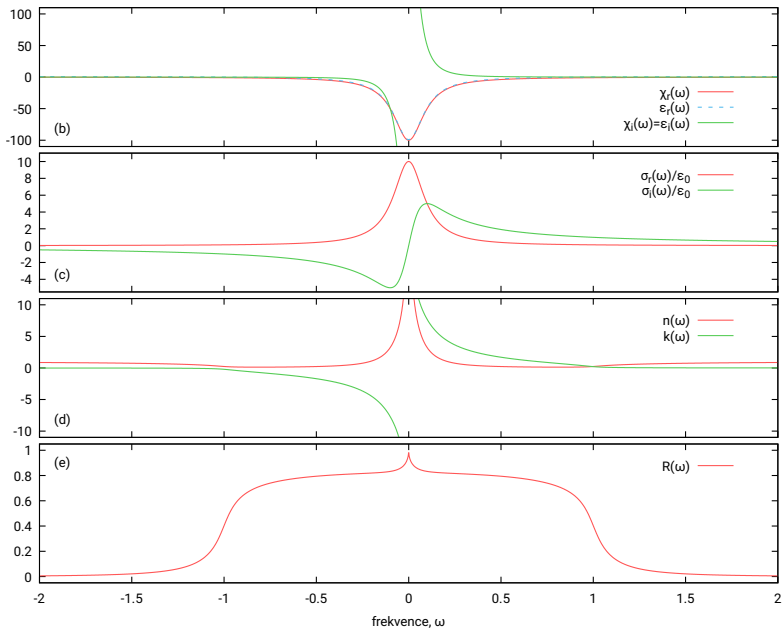
Odezvové funkce v recipročním prostoru jsou Fourierovými obrazy

$$\hat{\sigma}(\omega) = \frac{i\epsilon_0\omega_p^2}{\omega + i\gamma} \mathbf{1} = \epsilon_0\omega_p^2 \left[\frac{\gamma}{\omega^2 + \gamma^2} + i\frac{\omega}{\omega^2 + \gamma^2} \right] \mathbf{1}$$

$$\hat{\chi}(\omega) = \frac{-\omega_p^2}{\omega(\omega + i\gamma)} = \omega_p^2 \left[\frac{-1}{\omega^2 + \gamma^2} + i\frac{\gamma/\omega}{\omega^2 + \gamma^2} \right] \mathbf{1}$$

Statická vodivost

$$\sigma_r(0) = \epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\gamma} \mathbf{1}$$



- Drudeho model je modelem volných interagujících nabitých částic, tedy velmi realistický model plazmatu.
- V rámci pevných látek se často používá pro modelování volných nositelů v kovech nebo polovodičích. Skutečnou dielektrickou odezvu modeluje většinou v celku obstojně, ale často je nutné zavést nějaké korekce.
- Plazmová frekvence popisuje efektivní hustotu volných nositelů, ne tedy skutečnou hustotu. V praxi se místo efektivní hustoty používá efektivní hmotnost m^* . Například pro fosforem dopovaný křemík sumační pravidlo pro volné elektrony vypadá následovně:

$$\int_0^{\infty} \omega \varepsilon_i^{\text{fe}}(\omega) d\omega = \frac{\pi e^2}{2m^* m_e \varepsilon_0} \mathcal{N}_P$$

kde pro efektivní hmotnost můžeme najít hodnotu $m^* \approx m_e/3$. Tedy vodivostní elektrony přispívají do sumy jaky by jich bylo $3 \times$ více.

Obsah

- 1 Úvod
- 2 Disperzní model řídkého plazmatu
- 3 Disperzní model harmonického oscilátoru
- 4 Disperzní model volných částic (Drudeho model)
- 5 Disperzní model tlumeného harmonického oscilátoru (Lorentzův model)

Disperzní model tlumeného harmonického oscilátoru (Lorentzův model)

- Předpokládejme dvě částice s navzájem opačným nábojem a různou hmotností (něco jako atom vodíku).
- Izotropní model.
- Předpokládáme, že se atomy navzájem sráží s určitou frekvencí.
- Odvození provedeme v přímém časoprostoru jako odezvu na jednotkový elektrický pulz v čase $t = 0$.

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{E}_p \delta(t)$$

Před příchodem pulzu se neutrální atomy pohybují náhodně a navíc elektron a jádro asynchronně kmitají vzhledem k těžišti vlastní rezonanční frekvencí, tudíž tyto pohyby nepřispívají do vystředovaného polarizačního vektoru $\mathbf{P}(t, \mathbf{r})$.

Uvažujme, že každou srážkou atomy zapomenou na vibrační stav před srážkou, podobně jako v Drudeho modelu částice po srážce zapomněly na driftovou rychlost:

$$\mathbf{v}_e(t) = -\frac{e}{m_e} \cos(\omega_r t) \exp(-\gamma t) \Theta(t) \mathbf{1}$$

$$\mathbf{x}_e(t) = -\frac{e}{m_e} \frac{[\omega_r \sin(\omega_r t) - \gamma \cos(\omega_r t)] \exp(-\gamma t) + \gamma}{\omega_r^2 + \gamma^2} \Theta(t) \mathbf{1}$$

Disperzní model tlumeného harmonického oscilátoru (Lorentzův model)

- Předpokládejme dvě částice s navzájem opačným nábojem a různou hmotností (něco jako atom vodíku).
- Izotropní model.
- Předpokládáme, že se atomy navzájem sráží s určitou frekvencí.
- Odvození provedeme v přímém časoprostoru jako odezvu na jednotkový elektrický pulz v čase $t = 0$.

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{E}_p \delta(t)$$

Před příchodem pulzu se neutrální atomy pohybují náhodně a navíc elektron a jádro asynchronně kmitají vzhledem k těžišti vlastní rezonanční frekvencí, tudíž tyto pohyby nepřispívají do vystředovaného polarizačního vektoru $\mathbf{P}(t, \mathbf{r})$.

Uvažujme, že každou srážkou atomy zapomenou na vibrační stav před srážkou, podobně jako v Drudeho modelu částice po srážce zapomněly na driftovou rychlost:

$$\mathbf{v}_e(t) = -\frac{e}{m_e} \cos(\omega_r t) \exp(-\gamma t) \Theta(t) \mathbf{1}$$

$$\mathbf{x}_e(t) = -\frac{e}{m_e} \frac{[\omega_r \sin(\omega_r t) - \gamma \cos(\omega_r t)] \exp(-\gamma t) + \gamma}{\omega_r^2 + \gamma^2} \Theta(t) \mathbf{1}$$

Toto je špatně!

- Chyba je v tom, že jsme předpokládali, že po srážce se částice v atomech pohybují vzhledem ke kmitům před srážkou zcela asynchronně.
- Toto tvrzení je pravdivé pouze, pakliže srážka přišla v okamžiku uzlového bodu t kdy posunutí bylo nulové, tj. $x_e(t) = 0$.
- V případě, že srážka přišla v okamžiku mimo uzlový bod, tj. kdy hodnota posunutí byla nenulová, toto tvrzení neplatí.
- Naopak, když srážka přišla v okamžiku, kdy posunutí bylo v bodě obratu, tj. maximální nebo minimální, tak se srážka atomů do koherentní části vibračního stavu po srážce vůbec neprojeví.

Proto exponenciální faktor musíme dát k posunutí a ne k driftové rychlosti. Navíc frekvenci musíme podělit dvěma:

$$\mathbf{x}_e(t) = -\frac{e}{m_e \omega_r} \sin(\omega_r t) \exp\left(-\frac{\gamma t}{2}\right) \Theta(t) \mathbf{1}$$

$$\mathbf{v}_e(t) = \frac{d\mathbf{x}_e(t)}{dt} = -\frac{e}{m_e} \left[\cos(\omega_r t) - \frac{\gamma}{2\omega_r} \sin(\omega_r t) \right] \exp\left(-\frac{\gamma t}{2}\right) \Theta(t) \mathbf{1}$$

Tím se nám u rychlosti objeví fázově posunutý člen.

Tyto časové závislosti jsou řešením následujících pohybových rovnic s fiktivním tlumením:

$$m_e \frac{d^2 \mathbf{x}_e(t)}{dt^2} = \kappa_c [\mathbf{x}_n(t) - \mathbf{x}_e(t)] + \kappa_d \left[\frac{d\mathbf{x}_n(t)}{dt} - \frac{d\mathbf{x}_e(t)}{dt} \right]$$

$$m_n \frac{d^2 \mathbf{x}_n(t)}{dt^2} = \kappa_c [\mathbf{x}_e(t) - \mathbf{x}_n(t)] + \kappa_d \left[\frac{d\mathbf{x}_e(t)}{dt} - \frac{d\mathbf{x}_n(t)}{dt} \right]$$

Podobné rovnice jako v případě harmonického oscilátoru s přidaným tlumícím faktorem, který je popsán fiktivní silou s koeficientem:

$$\kappa_d = \gamma \mu$$

μ redukovaná hmotnost

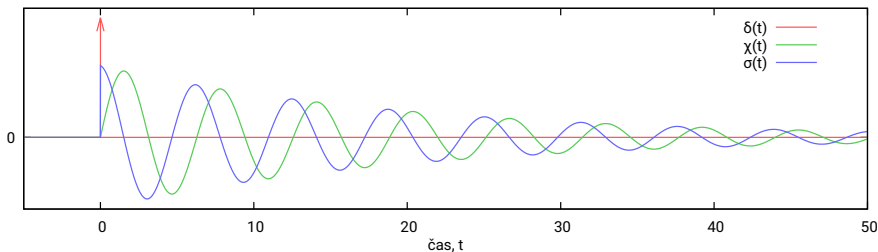
a jinou fiktivní konstantou pružnosti

$$\kappa_c = \omega_r^2 \mu + \frac{\gamma^2}{4} \mu = \kappa_r + \frac{\kappa_d^2}{4\mu}$$

Časové závislosti susceptibility (Greenova funkce) a vodivosti systému jsou následující

$$\chi(t) = \frac{\omega_p^2}{\omega_r} \sin(\omega_r t) \exp\left(-\frac{\gamma t}{2}\right) \Theta(t) \mathbf{1}$$

$$\sigma(t) = \epsilon_0 \omega_p^2 \left[\cos(\omega_r t) - \frac{\gamma}{2\omega_r} \sin(\omega_r t) \right] \exp\left(-\frac{\gamma t}{2}\right) \Theta(t) \mathbf{1}$$



Odezvové funkce v recipročním prostoru jsou Fourierovými obrazy

$$\hat{\chi}(\omega) = \frac{\omega_p^2}{2\omega_r} \left[\frac{1}{\omega + \omega_r + i\gamma/2} - \frac{1}{\omega - \omega_r + i\gamma/2} \right] \mathbf{1} = \frac{\omega_p^2}{\omega_c^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \mathbf{1}$$

kde ω_c je **centrální frekvence**

$$\omega_c^2 = \frac{\kappa_c}{\mu} = \omega_r^2 + \frac{\gamma^2}{4}$$

$$\hat{\varepsilon}(\omega) = 1 + \hat{\chi}(\omega) = \frac{\omega_s^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}{\omega_c^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \mathbf{1} \quad \text{kde} \quad \omega_s^2 = \omega_c^2 + \omega_p^2$$

