Pokročilé disperzní modely v optice tenkých vrstev
Lekce 5: Rovinné vlny v homogenních prostředí

Daniel Franta

Ústav fyzikální elektroniky, Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita

4. 4. 2022

Obsah

Řešení vlnové rovnice

Vlnovou rovnici

$$\hat{\boldsymbol{k}} \times \hat{\boldsymbol{\mu}}^{-1}(\hat{\boldsymbol{k}} \times \hat{\boldsymbol{E}}) + \frac{\omega^2}{c^2}\,\hat{\varepsilon}\,\hat{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{0}$$

lze maticově psát následovně (**homogenní lineární rovnice**)

$$[(\star\hat{\boldsymbol{k}})^2 + k_0^2\hat{\varepsilon}]\hat{\boldsymbol{E}} = \hat{\boldsymbol{W}}(\omega,\hat{\boldsymbol{k}})\,\hat{\boldsymbol{E}} = 0$$

kde

$$\star\hat{\boldsymbol{k}} = \begin{pmatrix} 0 & \hat{k}_z & -\hat{k}_y \\ -\hat{k}_z & 0 & \hat{k}_x \\ \hat{k}_y & -\hat{k}_x & 0 \end{pmatrix}$$

Výraz $(\star\hat{\boldsymbol{k}})^2$ je symetrická matice invariantní vůči libovolné rotaci, která jde napsat též pomocí rozdílu vnějšího a skalárního součinu vektoru sama se sebou

$$(\star\hat{\boldsymbol{k}})^2 = (\star\hat{\boldsymbol{k}})(\star\hat{\boldsymbol{k}}) = (\hat{\boldsymbol{k}} \otimes \hat{\boldsymbol{k}}) - (\hat{\boldsymbol{k}} \cdot \hat{\boldsymbol{k}})\boldsymbol{1} = \begin{pmatrix} \hat{k}_x^2 & \hat{k}_x\hat{k}_y & \hat{k}_x\hat{k}_z \\ \hat{k}_y\hat{k}_x & \hat{k}_y^2 & \hat{k}_y\hat{k}_z \\ \hat{k}_z\hat{k}_x & \hat{k}_z\hat{k}_y & \hat{k}_z^2 \end{pmatrix} - (\hat{k}_x^2 + \hat{k}_y^2 + \hat{k}_z^2)\boldsymbol{1}$$

$$= \begin{pmatrix} -\hat{k}_y^2 - \hat{k}_z^2 & \hat{k}_x\hat{k}_y & \hat{k}_x\hat{k}_z \\ \hat{k}_y\hat{k}_x & -\hat{k}_z^2 - \hat{k}_x^2 & \hat{k}_y\hat{k}_z \\ \hat{k}_z\hat{k}_x & \hat{k}_z\hat{k}_y & -\hat{k}_x^2 - \hat{k}_y^2 \end{pmatrix}$$

Řešení vlnové rovnice

Matice vlnové rovnice

$$\hat{\boldsymbol{W}}(\omega, \hat{\boldsymbol{k}}) = \begin{pmatrix} k_0^2\hat{\varepsilon}_{xx} - \hat{k}_y^2 - \hat{k}_z^2 & k_0^2\hat{\varepsilon}_{xy} + \hat{k}_x\hat{k}_y & k_0^2\hat{\varepsilon}_{xz} + \hat{k}_x\hat{k}_z \\ k_0^2\hat{\varepsilon}_{yx} + \hat{k}_y\hat{k}_x & k_0^2\hat{\varepsilon}_{yy} - \hat{k}_z^2 - \hat{k}_x^2 & k_0^2\hat{\varepsilon}_{yz} + \hat{k}_y\hat{k}_z \\ k_0^2\hat{\varepsilon}_{zx} + \hat{k}_z\hat{k}_x & k_0^2\hat{\varepsilon}_{zy} + \hat{k}_z\hat{k}_y & k_0^2\hat{\varepsilon}_{zz} - \hat{k}_x^2 - \hat{k}_y^2 \end{pmatrix}$$

Homogenní systém lineárních rovnic má netriviální řešení pro vlnové vektory $\hat{\boldsymbol{k}}_\nu$ takové, že platí

$$\det(\hat{\boldsymbol{W}}(\omega, \hat{\boldsymbol{k}}_\nu)) = 0$$

Pro každý směr daný směrovými vektory $\boldsymbol{\nu}$ a $\boldsymbol{\kappa}$ existují dva vlnové vektory (módy šíření)

$$\hat{\boldsymbol{k}}_\nu = k_{\mathrm{r},\nu}\boldsymbol{\nu} + \mathrm{i}k_{\mathrm{i},\nu}\boldsymbol{\kappa} \qquad \nu = 1, 2$$

V případě, že $\hat{\boldsymbol{k}}_\nu$ je ryze reálné $\Rightarrow$

$$\hat{\boldsymbol{W}}(\omega, \boldsymbol{k}_{\mathrm{r},\nu}) = \hat{\boldsymbol{W}}^\dagger(\omega, \boldsymbol{k}_{\mathrm{r},\nu}) \qquad \Rightarrow \qquad \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\omega, \boldsymbol{k}_{\mathrm{r},\nu}) = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^\dagger(\omega, \boldsymbol{k}_{\mathrm{r},\nu})$$

Každému módu šíření potom můžeme definovat jednotkový polarizační vektor vyhovující rovnici

$$\hat{\boldsymbol{W}}(\hat{\boldsymbol{k}}_\nu)\hat{\boldsymbol{p}}_\nu = 0 \qquad \hat{\boldsymbol{p}}_\nu\hat{\boldsymbol{p}}_\nu^* = 1$$

Řešení vlnové rovnice

Intenzita pokud se šíří v daném směru jednomódová vlna

$$I_\nu = |\hat{E}_\nu|^2 = \hat{E}_\nu \hat{E}_\nu^* = |\hat{\boldsymbol{E}}_\nu|^2 = \hat{\boldsymbol{E}}_\nu \hat{\boldsymbol{E}}_\nu^*$$

V případě dvojného kořenu můžeme $\hat{\boldsymbol{k}}_1 = \hat{\boldsymbol{k}}_2$ lze provést ortogonalizaci

$$\hat{\boldsymbol{p}}_1 \hat{\boldsymbol{p}}_2^* = 0$$

tak aby platilo, že celková intenzita dvou módů je daná následujícím vztahem

$$I_{1+2} = I_1 + I_2 = |\hat{\boldsymbol{E}}_1 + \hat{\boldsymbol{E}}_2|^2$$

Pozor, tento vztah obecně neplatí! Problém je však komplikovanější. Nekonečná rovinná vlna je problematická abstrakce.

Obsah

Homogenní vlny v anizotropním prostředí bez prostorové disperze

Zvolíme směr šíření homogenní vlny podél osy z: $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\kappa} \equiv (0, 0, 1)$

$$\hat{\boldsymbol{k}}_\nu = \hat{k}_\nu \boldsymbol{\nu} = (0, 0, \hat{k}_\nu) = (0, 0, k_{\mathrm{r},\nu} + \mathrm{i} k_{\mathrm{i},\nu}) = k_0 (0, 0, \hat{n}_\nu) \,,$$

Matice vlnové rovnice

$$\hat{\boldsymbol{W}}(\omega, \hat{\boldsymbol{k}}_\nu) = k_0^2 \begin{pmatrix} \hat{\varepsilon}_{xx} - \hat{n}_\nu^2 & \hat{\varepsilon}_{xy} & \hat{\varepsilon}_{xz} \\ \hat{\varepsilon}_{yx} & \hat{\varepsilon}_{yy} - \hat{n}_\nu^2 & \hat{\varepsilon}_{yz} \\ \hat{\varepsilon}_{zx} & \hat{\varepsilon}_{zy} & \hat{\varepsilon}_{zz} \end{pmatrix}$$

Determinant vede k bikvadratické rovnici

$$\det(\hat{\boldsymbol{W}}(\omega, \hat{\boldsymbol{k}}_\nu)) = \hat{a}\, \hat{n}_\nu^4 + \hat{b}\, \hat{n}_\nu^2 + \hat{c} = 0$$

s koeficienty

$$\begin{aligned} \hat{a} &= \hat{\varepsilon}_{zz} \\ \hat{b} &= \hat{\varepsilon}_{yz}\hat{\varepsilon}_{zy} + \hat{\varepsilon}_{xz}\hat{\varepsilon}_{zx} - \hat{\varepsilon}_{xx}\hat{\varepsilon}_{zz} - \hat{\varepsilon}_{zz}\hat{\varepsilon}_{yy} \\ \hat{c} &= \hat{\varepsilon}_{xx}\hat{\varepsilon}_{yy}\hat{\varepsilon}_{zz} + \hat{\varepsilon}_{xy}\hat{\varepsilon}_{yz}\hat{\varepsilon}_{zx} + \hat{\varepsilon}_{yx}\hat{\varepsilon}_{zy}\hat{\varepsilon}_{xz} - \hat{\varepsilon}_{xx}\hat{\varepsilon}_{yz}\hat{\varepsilon}_{zy} - \hat{\varepsilon}_{yy}\hat{\varepsilon}_{zx}\hat{\varepsilon}_{xz} - \hat{\varepsilon}_{zz}\hat{\varepsilon}_{yx}\hat{\varepsilon}_{xy} \end{aligned}$$

vede ke dvěma kořenům

$$\hat{n}_\nu = \sqrt{\frac{-\hat{b} \pm \sqrt{\hat{b}^2 - 4\hat{a}\hat{c}}}{2\hat{a}}} \,, \qquad \nu = 1, 2$$

Homogenní vlny v anizotropním prostředí bez prostorové disperze

Pokud nám vyjdou dva nezávislé kořeny, tak každému řešení odpovídá homogenní rovinná vlna s vlnovým vektorem $\hat{\boldsymbol{k}}_\nu = k_0 \hat{n}_\nu (0,0,1)$ a jednotkovým vektorem polarizace $\hat{\boldsymbol{p}}_\nu$ splňující rovnice

$$\begin{pmatrix} \hat{\varepsilon}_{xx} - \hat{n}_\nu^2 & \hat{\varepsilon}_{xy} & \hat{\varepsilon}_{xz} \\ \hat{\varepsilon}_{yx} & \hat{\varepsilon}_{yy} - \hat{n}_\nu^2 & \hat{\varepsilon}_{yz} \\ \hat{\varepsilon}_{zx} & \hat{\varepsilon}_{zy} & \hat{\varepsilon}_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{p}_{x,\nu} \\ \hat{p}_{y,\nu} \\ \hat{p}_{z,\nu} \end{pmatrix} = 0 \qquad |\hat{p}_{x,\nu}|^2 + |\hat{p}_{y,\nu}|^2 + |\hat{p}_{z,\nu}|^2 = 1$$

V případě anizotropních médií existuje jeden nebo dva směry, kdy obdržíme dvojný kořen, jinak řečeno pro tyto směry platí $\hat{b}^2 - 4\hat{a}\hat{c} = 0$. V tomto případě polarizační vektory jsou určeny nejednoznačně, což nám ale umožňuje přidat ještě podmínku ortogonality

$$\hat{p}_{x,1}\hat{p}_{x,2}^* + \hat{p}_{y,1}\hat{p}_{y,2}^* + \hat{p}_{z,1}\hat{p}_{z,2}^* = 0\,.$$

Tyto dvojné kořeny odpovídají vlnám šířícím se podél optických os, kdy index lomu nezávisí na polarizačním vektoru.

- jednoosá – fixní optická osa totožné s hlavní osou
- orthorhombická – dvě fixní optické osy na spojnici mezi dvěma hlavními osy
- monoklinická a triklinická – dvě pohyblivé optické osy

Obsah

Homogenní vlny v izotropním prostředí bez optické aktivity

Dielektrický tenzor

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\omega) = \hat{\varepsilon}(\omega)\mathbf{1}$$

Matice vlnové rovnice

$$\hat{\boldsymbol{W}}(\omega, \hat{\boldsymbol{k}}_\nu) = k_0^2 \begin{pmatrix} \hat{\varepsilon} - \hat{n}_\nu^2 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{\varepsilon} - \hat{n}_\nu^2 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{\varepsilon} \end{pmatrix}$$

$$\det(\hat{\boldsymbol{W}}(\omega, \hat{\boldsymbol{k}}_\nu)) = k_0^2 \left(\hat{\varepsilon} - \hat{n}_\nu^2\right)^2 \hat{\varepsilon} = 0$$

což vede k dvojnému kořenu $\hat{n}_{1,2} = \sqrt{\hat{\varepsilon}}$ a dvěma vlnovým vektorům:

$$\hat{\boldsymbol{k}}_{1,2} = k_0 \left(0, 0, \sqrt{\hat{\varepsilon}}\right)$$

a dvojici ortogonálních polarizačních vektorů v rovině xy:

$$\hat{\boldsymbol{p}}_1 = (1,0,0) \quad \hat{\boldsymbol{p}}_2 = (0,1,0) \qquad \text{nebo} \qquad \hat{\boldsymbol{p}}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0) \quad \hat{\boldsymbol{p}}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$$

$$\text{nebo} \qquad \hat{\boldsymbol{p}}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,\mathrm{i},0) \quad \hat{\boldsymbol{p}}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-\mathrm{i},0)$$

Optické konstanty (**optické funkce** $\hat{n}(\omega) = \sqrt{\hat{\varepsilon}(\omega)}$) lze chápat jako reprezentaci dielektrické odezvy. Lze definovat tři základní vlastnosti dielektrické odezvy.

Obsah

Homogenní vlny v izotropním prostředí s optickou aktivitou

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\omega,\boldsymbol{\nu}) = \begin{pmatrix} 1+\hat{\chi}(\omega)-\tau(\omega)\nu_x^2 & \mathrm{i}\hat{\theta}(\omega)\nu_z-\tau(\omega)\nu_x\nu_y & -\mathrm{i}\hat{\theta}(\omega)\nu_y-\tau(\omega)\nu_x\nu_z \\ -\mathrm{i}\hat{\theta}(\omega)\nu_z-\tau(\omega)\nu_x\nu_y & 1+\hat{\chi}(\omega)-\tau(\omega)\nu_y^2 & \mathrm{i}\hat{\theta}(\omega)\nu_x-\tau(\omega)\nu_y\nu_z \\ \mathrm{i}\hat{\theta}(\omega)\nu_y-\tau(\omega)\nu_x\nu_z & -\mathrm{i}\hat{\theta}(\omega)\nu_x-\tau(\omega)\nu_y\nu_z & 1+\hat{\chi}(\omega)-\tau(\omega)\nu_z^2 \end{pmatrix}$$

Tento tenzor je invariantní vzhledem k libovolné rotaci. Zvolíme si směr šíření podél osy z, tj. $\boldsymbol{\nu} = (0,0,1)$, matice vlnové rovnice má následující formu:

$$\hat{\boldsymbol{W}}(\omega,\hat{\boldsymbol{k}}_\nu) = k_0^2 \begin{pmatrix} \hat{\varepsilon}_\mathrm{T}-\hat{n}_\nu^2 & \mathrm{i}\hat{\theta} & 0 \\ -\mathrm{i}\hat{\theta} & \hat{\varepsilon}_\mathrm{T}-\hat{n}_\nu^2 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{\varepsilon}_\mathrm{L} \end{pmatrix}$$

kde $\hat{\varepsilon}_\mathrm{T}(\omega) = 1+\hat{\chi}(\omega)$ a $\hat{\varepsilon}_\mathrm{L}(\omega) = 1+\hat{\chi}(\omega)-\tau(\omega)$ odpovídají transverzální a longitudinální komponentě dielektrického tenzoru.

$$\det(\hat{\boldsymbol{W}}(\omega,\hat{\boldsymbol{k}}_\nu)) = k_0^2\hat{\varepsilon}_\mathrm{L}(\hat{n}_\nu^4 - 2\hat{\varepsilon}_\mathrm{T}\hat{n}_\nu^2 + \hat{\varepsilon}_\mathrm{T}^2 - \hat{\theta}^2) = 0$$

Existují dva módy šíření odpovídající dvěma různým indexům lomu

$$\hat{n}_1 = \sqrt{\hat{\varepsilon}_\mathrm{T}+\hat{\theta}} \quad \text{a} \quad \hat{n}_2 = \sqrt{\hat{\varepsilon}_\mathrm{T}-\hat{\theta}}$$

Homogenní vlny v izotropním prostředí s optickou aktivitou

Lze ukázat, že tyto módy šíření odpovídají pravotočivé a levotočivé kruhově polarizovaným vlnám šířící se různou fázovou rychlostí:

$$\hat{\boldsymbol{k}}_1 = k_0 \left(0, 0, \sqrt{\hat{\varepsilon}_\mathrm{T} + \hat{\theta}}\right) \qquad \hat{\boldsymbol{p}}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, \mathrm{i}, 0)$$

$$\hat{\boldsymbol{k}}_2 = k_0 \left(0, 0, \sqrt{\hat{\varepsilon}_\mathrm{T} - \hat{\theta}}\right) \qquad \hat{\boldsymbol{p}}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -\mathrm{i}, 0)$$

Je vidět, že výsledek v případě homogenní vlny nezávisí na longitudinální komponentě dielektrického tenzoru $\hat{\varepsilon}_\mathrm{L}(\omega)$ (spektrální funkci $\hat{\tau}(\omega)$), ale pouze na jeho transverzální komponentě $\hat{\varepsilon}_\mathrm{T}(\omega)$ (spektrální funkci $\hat{\chi}(\omega)$) a antisymetrické komponentě $\hat{\theta}(\omega)$. Je tedy zřejmé, že v případě homogenních vln v opticky aktivních izotropních prostředí lineární dielektrická odezva může být reprezentována dvěma spektrálními funkcemi optických konstant odpovídající pravotočivé a levotočivé vlně:

$$\hat{n}_\mathrm{r}(\omega) = \sqrt{\hat{\varepsilon}_\mathrm{T}(\omega) + \hat{\theta}(\omega)} \qquad \text{a} \qquad \hat{n}_\mathrm{l}(\omega) = \sqrt{\hat{\varepsilon}_\mathrm{T}(\omega) - \hat{\theta}(\omega)}$$

Pokud nezávislost dielektrické odezvy na velikosti vlnového vektoru bereme jako aproximaci, tak pro tyto funkce striktně řečeno neplatí Kramers–Kronigovy relace ani sumační pravidla.

Obsah

Nehomogenní vlny v izotropním prostředí bez optické aktivity

Souřadný systém zvolíme následovně

$$\hat{\boldsymbol{k}}_\nu = k_0(\sin\theta_0, 0, \hat{n}_{z,\nu})$$

Matice vlnové rovnice

$$\hat{\boldsymbol{W}}(\omega, \hat{\boldsymbol{k}}_\nu) = k_0^2 \begin{pmatrix} \hat{\varepsilon} - \hat{n}_{z,\nu}^2 & 0 & \hat{n}_{z,\nu}\sin\theta_0 \\ 0 & \hat{\varepsilon} - \sin^2\theta_0 - \hat{n}_{z,\nu}^2 & 0 \\ \hat{n}_{z,\nu}\sin\theta_0 & 0 & \hat{\varepsilon} - \sin^2\theta_0 \end{pmatrix}$$

Determinant opět vede k bikvadratické rovnici

$$\det(\hat{\boldsymbol{W}}(\omega, \hat{\boldsymbol{k}}_\nu)) = \hat{n}_\nu^4 + \hat{b}\,\hat{n}_\nu^2 + \hat{c} = 0$$

s koeficienty

$$\hat{b} = -2(\hat{\varepsilon} - \sin^2\theta_0)$$
$$\hat{c} = (\hat{\varepsilon} - \sin^2\theta_0)^2$$

Protože platí $\hat{b}^2 - 4\hat{c} = 0$ obdržíme dvojný kořen

$$\hat{n}_{z,\nu} = \sqrt{\hat{\varepsilon} - \sin^2\theta_0}$$

Nehomogenní vlny v izotropním prostředí bez optické aktivity

Tento dvojný kořen odpovídá vlnovému vektoru v kladném směru osy z

$$\hat{\boldsymbol{k}}_\nu = k_0 \left(\sin\theta_0, 0, \sqrt{\hat{\varepsilon} - \sin^2\theta_0}\right) = k_0 \hat{n} \left(\sin\hat{\theta}, 0, \cos\hat{\theta}\right)$$

kde index lomu $\hat{n}$ je totožný s indexem definovaným pro případ homogenní vlny

$$\hat{n} = \sqrt{\hat{\varepsilon}}$$

a úhel $\hat{\theta}$ je komplexní úhel, který je dán **Snellovým zákonem**

$$\sin\theta_0 = \hat{n}\sin\hat{\theta}$$

Polarizační vektory jsou určeny nejednoznačně.
Kvůli jednoduchosti zápisu je však výhodné je zvolit tak, že jeden vektor bude paralelní k rovině dopadu xz (německy parallel) a druhý leží na ose y, tedy kolmý na rovinu dopadu (německy senkrecht). V tomto případě index ν rozlišující polarizace nabývá hodnot „p“ a „s“, tj.

$$\hat{\boldsymbol{p}}_\mathrm{p} = \frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{\sin^2\theta_0}{\hat{\varepsilon} - \sin^2\theta_0}}} \left(1, 0, -\frac{\sin\theta_0}{\sqrt{\hat{\varepsilon} - \sin^2\theta_0}}\right) = \left(\cos\hat{\theta}, 0, -\sin\hat{\theta}\right), \qquad \hat{\boldsymbol{p}}_\mathrm{s} = (0, 1, 0)$$

Nehomogenní vlny v izotropním prostředí bez optické aktivity

- Oba polarizační vektory reprezentují lineárně polarizované světlo.
- Polarizační vektor s-vlny reprezentuje lineárně polarizovanou vlnu, kde se vektor $\boldsymbol{E}_{\mathrm{s}}(t,\boldsymbol{r})$ s časem pohybuje po přímce podél osy y.
- Polarizační vektor p-vlny reprezentuje lineárně polarizovanou vlnu, kde se vektor $\boldsymbol{E}_{\mathrm{p}}(t,\boldsymbol{r})$ s časem pohybuje po elipse v rovině xz (x-ová a z-ová složka vektoru polarizace $\hat{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{p}}$ má jinou komplexní fázi).

To znamená, že zatímco s-vlna polarizuje nabité částice hmotného prostředí čistě transverzálně, p-vlna kromě transverzální složky obsahuje též longitudinální složku polarizace. Longitudinální složka samozřejmě vymizí, když prostředí je neabsorbující, v tom případě se prostředím šíří homogenní vlna i v případě nekolmého úhlu dopadu.

Obsah

Nehomogenní vlny v izotropním prostředí s optickou aktivitou

V případě **izotropního prostředí s optickou aktivitou** nelze úlohu řešit analyticky.
Matice vlnové rovnice

$$\hat{\boldsymbol{W}}(\omega, \hat{\boldsymbol{k}}_\nu) = k_0^2 \begin{pmatrix} \hat{\varepsilon}_\mathrm{T} + \nu_x^2 \hat{\tau} - \hat{n}_{z,\nu}^2 & \nu_z \hat{\theta} & \nu_x \nu_z \hat{\tau} + \hat{n}_{z,\nu} \sin\theta_0 \\ -\nu_z \hat{\theta} & \hat{\varepsilon}_\mathrm{T} - \sin^2\theta_0 - \hat{n}_{z,\nu}^2 & \nu_x \hat{\theta} \\ \nu_x \nu_z \hat{\tau} + \hat{n}_{z,\nu} \sin\theta_0 & -\nu_x \hat{\theta} & \hat{\varepsilon}_\mathrm{T} + \nu_z^2 \hat{\tau} - \sin^2\theta_0 \end{pmatrix}$$

Směrový vektor imaginární části vlnového vektoru: $\boldsymbol{\kappa} = (0, 0, 1)$.
Nenulové komponenty směrového vektoru $\boldsymbol{\nu} = (\nu_x, 0, \nu_z)$:

$$\nu_x = \frac{\sin\theta_0}{\sqrt{\sin^2\theta_0 + n_{z,\nu}^2}} \qquad \nu_z = \frac{n_{z,\nu}}{\sqrt{\sin^2\theta_0 + n_{z,\nu}^2}}$$

závisí na reálné části z-ové komponenty indexu lomu $n_{z,\nu}$, která při daném úhlu dopadu závisí na frekvenci ω polarizaci ν, tj. $n_{z,\nu}(\omega)$.
Pomocí vhodné numerické metody najdeme dvojici komplexních indexů lomu $\hat{n}_{z,\nu}$, pro které platí $n_{z,\nu} \geq 0$ a odpovídající polarizační vektory.

Nehomogenní vlny v izotropním prostředí s optickou aktivitou

Abychom si ukázali jak řešení vypadá, je možné otočit souřadný systém tak, aby osa z byla podél směrového vektoru $\boldsymbol{\nu} = (0, 0, 1)$, respektive podél reálné části vlnového vektoru $\boldsymbol{k}_\mathrm{r}$, tj.

$$\hat{\boldsymbol{k}} = k_\mathrm{r}\boldsymbol{\nu} + \mathrm{i}k_\mathrm{i}\boldsymbol{\kappa} = k_0(\mathrm{i}u, 0, \hat{n}_{z,\nu})$$

kde u je kolmá komponenta imaginární části vlnového vektoru na směrový vektor, která není známá před vyřešení vlnové rovnice a musíme ji chápat jako parametr řešení vlnové rovnice.

Matice vlnové rovnice v tomto případě vypadá následovně

$$\hat{\boldsymbol{W}}(\omega, \hat{\boldsymbol{k}}_\nu) = k_0^2 \begin{pmatrix} \hat{\varepsilon}_\mathrm{T} - \hat{n}_{z,\nu}^2 & \hat{\theta} & \mathrm{i}u\hat{n}_{z,\nu} \\ -\hat{\theta} & \hat{\varepsilon}_\mathrm{T} + u^2 - \hat{n}_{z,\nu}^2 & 0 \\ \mathrm{i}u\hat{n}_{z,\nu} & 0 & \hat{\varepsilon}_\mathrm{L} + u^2 \end{pmatrix} .$$

Řešení opět vede na bikvadratickou rovnici s koeficienty

$$\begin{aligned} \hat{a} &= \hat{\varepsilon}_\mathrm{L} \\ \hat{b} &= -2\hat{\varepsilon}_\mathrm{T}(\hat{\varepsilon}_\mathrm{L} + u^2) - (\hat{\varepsilon}_\mathrm{L} - \hat{\varepsilon}_\mathrm{T})u^2 \\ \hat{c} &= (\hat{\varepsilon}_\mathrm{L} + u^2)\left[\hat{\varepsilon}_\mathrm{T}(\hat{\varepsilon}_\mathrm{T} + u^2) + \hat{\theta}^2\right] \end{aligned}$$

Nehomogenní vlny v izotropním prostředí s optickou aktivitou

Na počátku řešení známe úhel dopadu z vnějšího prostředí θ_0 a dielektrický tenzor prostředí, protože ten nezávisí u izotropního materiálu na směru. Neznáme, ale parametr u, který musíme iterativně určit z rovnice

$$u = \frac{k_{z,\nu} \sin\theta_0}{\sqrt{n_{z,\nu}^2 - \sin^2\theta_0}} \, .$$

Tedy v prvním kroku, předpokládáme homogenní vlnu $u = 0$, spočítáme pro zvolený kořen optické konstanty $\hat{n}_{z,\nu} = n_{z,\nu} + \mathrm{i}k_{z,\nu}$, z kterých v druhém kroku určíme pomocí předchozí rovnice hodnotu u. Postup poté opakujeme, tak dlouho, až získáme konečnou hodnotu optických konstant a parametru u.

Nehomogenní vlny v izotropním prostředí s optickou aktivitou

Potom pro vlnové a polarizační vektory platí

$$\hat{\boldsymbol{k}}_\nu = k_0(\mathrm{i}u, 0, \hat{n}_{z,\nu})$$

a

$$\hat{\boldsymbol{p}}_\nu = C_\nu \left(1, \frac{\hat{\theta}}{\hat{\varepsilon}_\mathrm{T} + u^2 - \hat{n}_{z,\nu}^2}, \frac{-\mathrm{i}u\hat{n}_{z,\nu}}{\hat{\varepsilon}_\mathrm{L} + u^2}\right)$$

kde C_ν je normalizační konstanta. Je vidět, že vlnové vektory, a potažmo i polarizační vektory, budou záviset nejenom na transverzální komponentě dielektrického tenzoru $\hat{\varepsilon}_\mathrm{T}$, ale i na jeho longitudinální části $\hat{\varepsilon}_\mathrm{L}$.

- Je tedy zřejmé, že spektrální funkce optických konstant získané pro pravotočivou a levotočivou vlnu v homogenním případě, nebudou totožné s indexy lomu, které obdržíme v případě nehomogenní vlny.
- Tedy tyto dvě spektrální funkce nemohou být úplným popisem izotropního prostředí vykazující optickou aktivitu. Jinými slovy, i když jsme definovali dielektrickou odezvu nezávislou na imaginární části vlnového vektoru, tj na směru nehomogenity vlny, skrze longitudinální komponentu $\hat{\varepsilon}_\mathrm{L}$ dielektrická odezva závisí na směru nehomogenity vlny.
- Navíc je zřejmé, že polarizační vektory reprezentují obecně neortogonální elipticky polarizované vlny a ne kruhově polarizované vlny jako v případě homogenní vlny.

Obsah

Závěr

- Řešení vlnové je v obecném případě numerický problém, i když známe analytické vyjádření odezvového tenzoru v závislosti na frekvenci a vlnovém vektoru.
- Analytické řešení je možné jen za určitých podmínek.
- Optické funkce jako reprezentace dielektrické odezvy mají smysl pouze pro izotropní prostředí bez prostorové disperze (optické aktivity).
- Homogenní vlny v izotropním prostředí budí pouze transverzální složku dielektrické odezvy. Nehomogenní vlny budí i longitudinální komponentu dielektrické odezvy.