

Domácí úkoly – Matematika 1

Podzim 2019

13. prosince 2019

1. DÚ

1. Mějme dvě komplexní čísla $x = 3 - 2i$, $y = 4 + 4i$, $x, y \in \mathbb{C}$. Spočítejte:

$$x + y, \quad x - y, \quad x \cdot y, \quad x/y, \quad x^5, \quad y^{63}. \quad (1)$$

Všechna řešení uveďte v algebraickém, goniometrickém i exponenciálním tvaru.

2. Řešte následující rovnice nad \mathbb{C} :

(a) $z^5 = -8i$,

(b) $z^2 - (2 + 3i)z + 5i - 5 = 0$,

(c) $|z - 2 + i| + i\bar{z} = 3$,

3. Řešte soustavu lineárních rovnic Gaußovou eliminační metodou pro proměnné x, y, z :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + y - z = 3 \\ 3x + y + 2z = 10 \end{cases}$$

Uveďte všechna řešení, hodnotu matice a rozšířené matice soustavy.

4. Řešte soustavu lineárních rovnic Gaußovou eliminační metodou pro proměnné x, y, z, t :

$$\begin{cases} 2t + x + y + 2z = 2 \\ t + x + 2y + 3z = 3 \\ 3t + x + z = a \end{cases}$$

Uveďte všechna řešení v závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$, hodnotu matice a rozšířené matice soustavy.

5. Řešte soustavu lineárních rovnic Gaußovou eliminační metodou pro proměnné x, y, z :

$$\begin{cases} az + x + y = 1 \\ (2 + 3a)z + 3x + 4y = 5 \\ -x + y + z = b \end{cases}$$

Uveďte všechna řešení v závislosti na parametrech a, b , hodnotu matice a rozšířené matice soustavy.

6. (Opakování střední školy) Mějme zadané roviny ρ, σ a dvě přímky p, q . Rovina ρ je zadaná třemi body

$$\rho : A = (4, 5, 6), B = (9, 4, 9), C = (1, 7, 5), \quad (2)$$

přímka σ je zadaná obecnou rovnicí roviny

$$\sigma : 5x + 4y + -7z + 8 = 0, \quad (3)$$

přímka p je zadaná parametricky

$$p : x = 1 + 3t, y = 2 + 5t, z = 5 + 5t, \quad (4)$$

a přímka q je zadaná jako průsečnice dvou rovin

$$q : x + y = 6, y + 2z = 8. \quad (5)$$

Určete vzájemnou polohu všech přímek a rovin. Nakreslete náčrtek (bez souřadnicových os).

2. DÚ

1. Pro zadané matice spočítejte inverzní matice:

(a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(c)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(d)

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 23 & 18 & -1 \\ -4 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

2. Spočítejte determinanty matic:

(a)

$$\begin{pmatrix} 13247 & 13347 \\ 28469 & 28569 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} \cosh(x) & \sinh(x) \\ \sinh(x) & \cosh(x) \end{pmatrix}$$

(c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 9 & 5 \\ 2 & 4 & 7 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(d)

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

3. Určete, zda se jedná o lineárně závislé/nezávislé vektory. Pokud jsou závislé, doplňte na bázi prostoru \mathbb{R}^4 :

(a) $c_1 = (1, 0, 2, 3)$, $c_2 = (1, 3, 0, 0)$, $c_3 = (2, 0, 1, 1)$, $c_4 = (1, 6, 1, 4)$,

(b) $v_1 = (2, 4, 12, 0)$, $v_2 = (0, 21, 18, 5)$, $v_3 = (-2, 3, -4, 5)$, $v_4 = (-1, -2, -3, 5)$.

3. DŮ

1. Vyjádřete jako součet polynomu a racionální lomenné funkce

$$R(x) = \frac{2x^6 - 9x^4 + 4x^3 + 8x^2 - 7x + 4}{x^4 - 3x^2 + 2x - 1}, \quad (6)$$

$$R(x) = \frac{3x^5 - 3x^2 + 2x - 5}{x^3 - x + 1}. \quad (7)$$

2. Určete definiční obor funkce $f(x)$:

$$f(x) = \frac{\ln(2x-3)}{\sqrt{x^2-1}} + \arcsin \frac{x-4}{7}, \quad (8)$$

$$f(x) = \frac{x^2(x-2)(x+3)}{x+1}. \quad (9)$$

3. Určete limity v \mathbb{R} (bez LP):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\sqrt{x^2 + 16} - 4}, \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^3 - x^2 + 1}). \quad (11)$$

4. DÚ

1. Derivujte a upravte

$$y = \sqrt{\frac{1 - e^x}{1 + e^x}} \quad (12)$$

$$y = \frac{\arctan x}{\ln x} \quad (13)$$

2. Vyšetřete průběh následující funkce, načrtněte graf

$$y = \arctan \frac{x - 1}{x} \quad (14)$$

3. Vypočtěte integrály

$$\int x^3 e^x dx \quad (15)$$

$$\int \frac{\sin 2x}{\sin x} \quad (16)$$

$$\int \frac{3 - \sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (17)$$