Exponenciála a logaritmus

Michael Krbek

1. Mocniny, odmocniny a jejich zobecnění. Mocninu reálného čísla a s mocnitelem (exponentem) n, který je přirozeným číslem, definujeme

$$a^n = \underbrace{a.a.\ldots.a}_{n-\text{krát}}. \tag{1}$$

Číslo a tedy pouze n-krát vynásobíme samo sebou, např.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2}{3}.\frac{2}{3}.\frac{2}{3}.\frac{2}{3} = \frac{2.2.2.2}{3.3.3.3} = \frac{16}{81}.$$

Zde je vhodné místo upozornit na pravidla, týkající se uzávorkování výrazů obsahujících mocniny. Mocnina se vždy týká pouze výrazu, který se vyskytuje bezprostředně před ní, např.

$$-2^4 = -(2.2.2.2) = -16 \quad \neq \quad (-2)^4 = (-2).(-2).(-2).(-2) = 16.$$

Pro $a \in \mathbf{R}$ a $m, n \in \mathbf{N}$ platí

$$a^{m+n} = a^m.a^n, \tag{2}$$

důkaz si proveďte rozepsáním pravé i levé podle definice. Dále platí

$$(a^m)^n = a^{m.n} = (a^n)^m. \tag{3}$$

Důkaz: levá strana je

$$\underbrace{\underbrace{a.a.\ldots.a}_{m-\text{krát}}.\underbrace{a.a.\ldots.a}_{m-\text{krát}}.\ldots.\underbrace{a.a.\ldots.a}_{m-\text{krát}}}_{n-\text{krát}}.$$

Celkem se tedy jedná o $m.n$ násobení, druhá rovnost je tím pádem zřejmá (pouze prohodíme m a n). ■

Pro záporné celočíselné mocnitele lze pro $a \neq 0$ dodefinovat

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

tak, že stále platí jak (2) tak i (3).

Pro $a > 0$ budeme v dalším definovat mocniny s racionálním mocnitelem, tj.

$$a^{\frac{m}{n}},$$

přičemž budeme požadovat, aby stále platilo (2) i (3). S využitím vlastnosti (3) se stačí omezit na výrazy typu $a^{\frac{1}{n}}$, $n \in \mathbf{N}$ rovněž označovaným jako $\sqrt[n]{a}$, nazývaným n-tá odmocnina. Funkce $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ je inverzní funkcí k funkci mocninné $x \mapsto x^n$, této skutečnosti se obvykle využívá při jejím výpočtu.

Příklady:

(1) Umocněte čísla a upravte

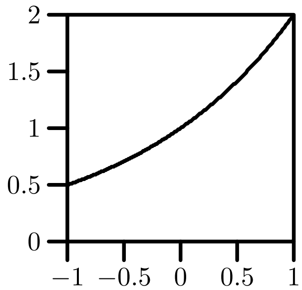
$$\text{(a) } 4^{\frac{3}{2}}, \quad \text{(b) } \left(\frac{3}{2}\right)^3, \quad \text{(c) }, \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

(2) Najděte příklad posloupnosti racionálních čísel, která se blíží k nějakému reálnému číslu, které není racionální.

(3) Krystal roste tak, že každým rokem má přesně 1.22-krát větší objem. Dne 12.2.1997 byl objem krystalu 154.8 mm^3. Jaký objem má krystal dnes?

(4) Jak se změní výsledky v předchozím příkladu, pokud změníme počáteční objem krystalu o $\pm 0.1\ \mathrm{mm}^3$? A co když změníme roční nárůst krystalu o ± 0.01?

2. Exponenciální funkce. Každé reálné číslo $x \in \mathbf{R}$ lze přesněji a přesněji vyjadřovat pomocí čísel racionálních.



Pokud nyní chceme pro $a > 0$ reálné definovat reálnou mocninu, můžeme tak učinit pomocí stále se zpřesňující posloupnosti racionálních mocnitelů. Využíváme zde přímo definiční vlastnosti reálných čísel, která jsou definována jako limity posloupností čísel racionálních. Pro reálné $a > 0$ tedy můžeme definovat funkci $x \mapsto a^x$ s definičním oborem $\mathbf{R}$ a oborem hodnot $(0, \infty)$, které říkáme exponenciální funkce se základem a. Po levé straně je načrtnut typický graf takové funkce (je zvoleno $a = 2$). Naproti tomu pro $0 < a < 1$ jde o klesající funkci, pro $a = 1$ jde zřejmě o konstantní funkci 1.

Základní vlastnosti exponenciální funkce jsou:

(a) Graf exponenciální funkce $x \mapsto a^x$ vždy prochází bodem $(0, 1)$.

(b) Pro všechna $a > 0$ je i $a^x > 0$.

(c) Platí-li $a^x = a^y$, pak $x = y$.

Věnujme se nyní přírůstku exponenciální funkce $x \mapsto a^x$ a směrnici sečny k jejímu grafu. Označme (x, a^x) a $(x + h, a^{x+h})$ body na grafu této funkce; potom směrnice sečny procházející těmito body je

$$k(x,h) = \frac{a^{x+h} - a^x}{x + h - x} = a^x \frac{a^h - 1}{h}. \tag{4}$$

Dá se ukázat, že pro $h \to 0$ se zlomek

$$\frac{a^h - 1}{h}$$

blíží konstantě nezávislé na h, jak je vidět z tabulky níže pro základ $a = 2$.

h	1.000 000	0.100 000	0.010 000	0.001 000
$(2^h - 1)/h$	1.000 000	0.717 735	0.695 555	0.693 387

Výsledná hodnota $k(x, h \to 0)$ (tzv. limita) je směrnicí tečny v bodě x. Hodnota a, pro kterou je výraz $\frac{a^h-1}{h} = 1$ se nazývá Eulerovo číslo e, jeho hodnota je

$$\mathrm{e} = 2.718\,281\,828\,459\,045\,235\,360\,287\,471\,353\ldots$$

Podívejme se opět na tabulku

Základ a	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3.0
$(a^h - 1)/h$ pro $h \to 0$	0.916	0.955	0.993	1.030	1.065	1.099

Funkce $x \mapsto \mathrm{e}^x$ má tedy následující vlastnost: směrnice tečny zkonstruované v každém jejím bodě je rovna funkční hodnotě v tomtéž bodě. Této exponenciální funkci říkáme přirozená exponenciální funkce.

Příklady:

(5) Načrtněte graf funkcí $x \mapsto a^x$ a $x \mapsto \left(\frac{1}{a}\right)^x$, $a > 0$.

(6) Řešte rovnice

$$3^{2x-1} = 81^x, \quad 4^{2x-3} = 256^{x-1}.$$

3. Logaritmy. Logaritmy jsou inverzními funkcemi k funkcím exponenciálním. Značíme

$$\log_a x = y \quad \text{právě když} \quad a^y = x, \quad a > 0.$$

Logaritmus x se základem e značíme obvykle $\ln x$ a nazýváme jej přirozený logaritmus. Základní vlastnosti logaritmů vyplývají z vlastností exponenciálních funkcí:

(a) $\log_a a = 1$ je důsledkem $a^1 = a$,

(b) $\log_a 1 = 0$ je důsledkem $a^0 = 1$,

(c) $a^{\log_a x} = x$

(d) a $\log_a a^x = x$ jsou důsledkem skutečnosti, že $x \mapsto a^x$ a $x \mapsto \log_a x$ jsou inverzní funkce,

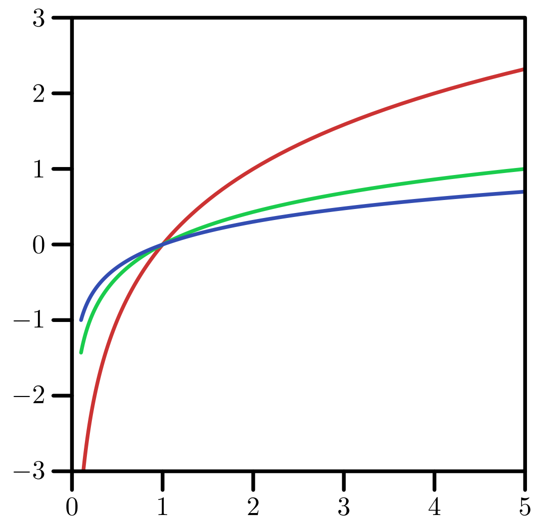
(e) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ je důsledkem $a^{x+y} = a^x a^y$,

(f) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ je důsledkem $a^{x-y} = a^x/a^y$,

(g) $\log_a x^y = y \log_a x$ plyne z $(a^y)^x = a^{xy}$

(h) a platí $\log_a x = \log_a y$ právě když $x = y$; důsledek existence inverze.

Graf logaritmické funkce $x \mapsto \log_a x$ o základu $a = 2, 5, 10$ je uveden na obrázku níže



Příklady:

(7) Načrtněte graf funkcí $x \mapsto \log_a x$ a $x \mapsto \log_{\frac{1}{a}} x$, $a > 0$.

(8) Řešte exponenciální rovnice pro neznámou x

$$5^x = 7, \quad 4^{x-1} + 2 = 1, \quad \mathrm{e}^2 x - 4\mathrm{e}^x + 3 = 0.$$

(9) Řešte logaritmické rovnice pro neznámou x

$$\log_2 \frac{2}{x} = 8, \quad 3 \ln 3x = 7, \quad \ln(x-3) + \ln(x+2) = \ln(x-2),$$

$$\log_2(x-2) + \log_2(x+2) = 2, \quad \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} = y$$

(10) Řešte exponenciální nerovnice

$$9^x - 3^{x+1} + 2 > 0, \quad \left|2^{4x^2-1} - 5\right| \leq 3, \quad 4^{2x} - 2.4^x < 0.$$

(11) Řešte logaritmické nerovnice

$$\ln x - \ln(x+1) \geq 0, \quad |3 - \log_2| < 2, \quad \ln x + \ln(x+1) > \ln(2x).$$

(12) Určete definiční obor výrazů

$$\ln \frac{x^2 - 2x + 1}{2x + 1}, \quad \mathrm{e}^{-x^2}, \quad \mathrm{e}^{\frac{x+1}{x-1}}.$$

4. Přirozený logaritmus. Nechť směrnice tečny ke grafu funkce f v bodě $(x, f(x))$ je k. Potom směrnice tečny ke grafu inverzní funkce f^{-1} v odpovídajícím bodě $(f(x), x)$ je $1/k$. Pro přirozenou exponenciální funkci je směrnice ke grafu rovna funkční hodnotě v daném bodě. V bodě (e^x, x) je tedy směrnice rovna e^{-x}, označíme-li tedy $\mathrm{e}^x = t$, dostáváme, že směrnice v bodě $(t, \ln t)$ je rovna $1/t$. Inverzní operací k výpočtu směrnic ke grafům funkcí se ukazuje být určení plochy uzavřené mezi grafem funkce a souřadnicovou osou reprezentující definiční obor. Tyto úvahy jsou předmětem studia v diferenciálním (směrnice) a integrálním (plochy) počtu. S uvážením dříve řečeného lze přirozený logaritmus $\ln t$ definovat i jinak, a to jako plochu obrazce omezeného v souřadnicové rovině přímkami $x = 1$, $x = t$, $y = 0$ a grafem funkce $x \mapsto 1/x$. Hodnotu bereme kladnou, je-li $t > 1$, zápornou pro $0 < t < 1$. Na níže uvedeném obrázku je situace znázorněna pro $t = 0.1$ (pozor, na osách jsou různá měřítka).