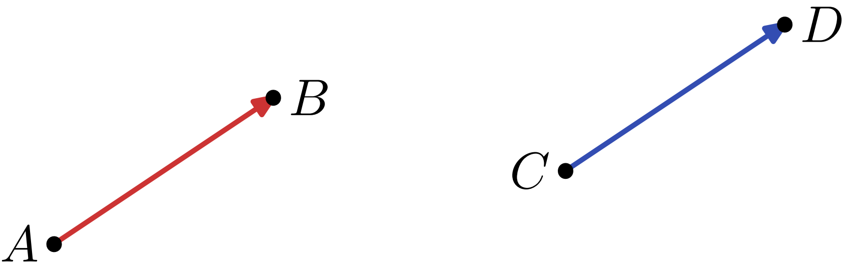
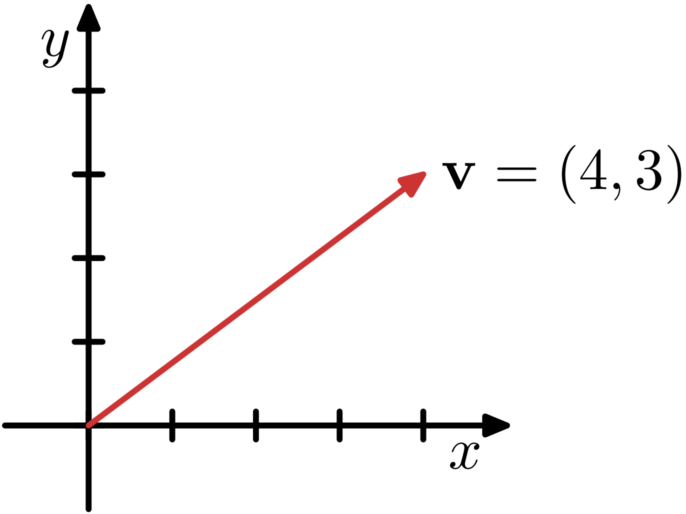
Základy geometrie v rovině a prostoru

Michael Krbek

1. Vektory. Během následujícího semestru se seznámíte s náležitě abstraktní definicí vektoru, zde si pouze ukážeme, co se rozumí pod pojmem volný vektor v euklidovském prostoru (dále jen volný vektor). Mějme dva body A, B; volným vektorem $\overrightarrow{AB}$ rozumíme orientovanou úsečku s počátečním bodem A a koncovým bodem B s tím, že orientovanou úsečku $\overrightarrow{AB}$ považujeme za ekvivalentní orientované úsečce $\overrightarrow{CD}$, pokud jednu převedeme na druhou pomocí posunutí. Třídu ekvivalence těchto úseček značme $\mathbf{v}$.



Pro počítání s vektory je velmi výhodné popsat je v nějakém ortonormálním souřadnicovém systému $0xyz$, kde 0 je počátek soustavy souřadnic a x, y, z jsou navzájem kolmé souřadnicové osy se stejnými měřítky. Pro tento účel je vhodné za počáteční bod všech vektorů vzít počátek soustavy souřadnic 0 a vektory potom můžeme ztotožnit s jejich koncovými body.

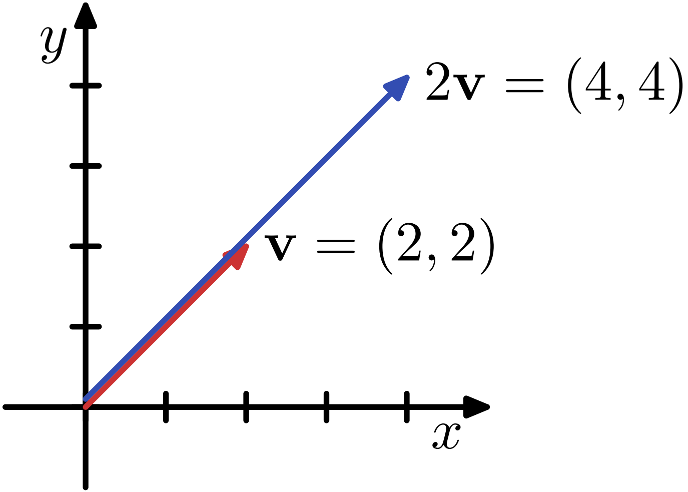


V dané kartézské souřadné soustavě můžeme tedy vektor **v** v prostoru zadat pomocí uspořádané trojice čísel (x, y, z), kterou nazýváme souřadnice vektoru v. V jiné vztažné soustavě $O'x'y'z'$ odpovídá tomuto vektoru obecně jiná trojice čísel (x', y', z').

2. Základní operace s vektory.

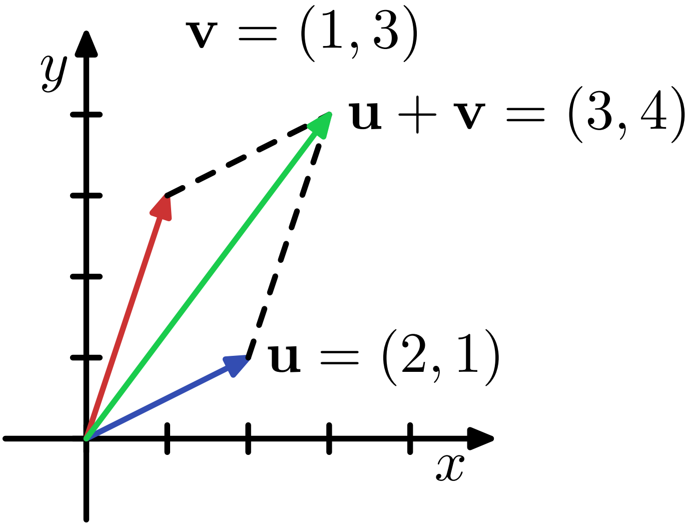
Násobení vektoru číslem. Číslu α a vektoru $\mathbf{v}$ přiřadíme vektor $\alpha\mathbf{v}$, v souřadnicovém vyjádření máme

$$(\alpha, (x, y, z)) \mapsto (\alpha x, \alpha y, \alpha z).$$



Sčítání vektorů. Dvojici vektorů $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ přiřadíme vektor $\mathbf{u}+\mathbf{v}$, v souřadnicovém vyjádření máme

$$((x,y,z),(x',y',z')) \mapsto (x+x',y+y',z+z').$$



Skalární součin. Dvojici vektorů $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ přiřadíme číslo $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, v souřadnicovém vyjádření máme

$$((x, y, z), (x', y', z')) \mapsto xx' + yy' + zz'.$$

Pomocí skalárního součinu můžeme definovat velikost vektoru $\mathbf{v}$ jako

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle},$$

v souřadnicovém vyjádření máme pro velikost vektoru

$$(x, y, z) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

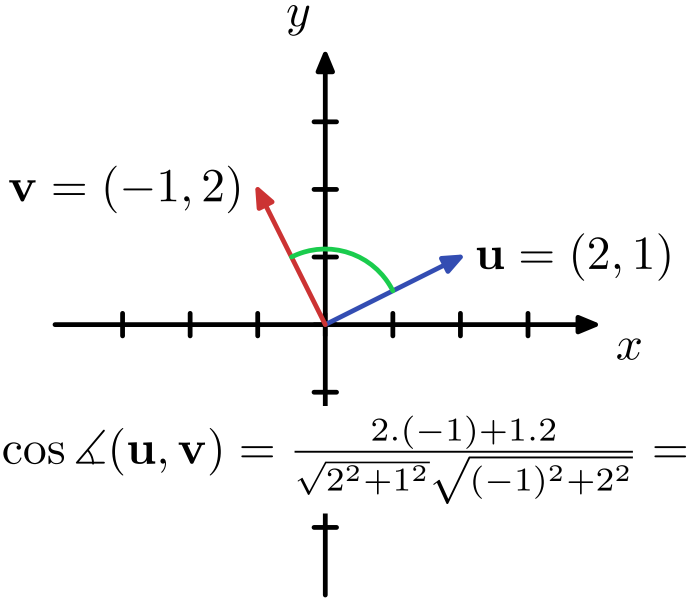
Toto tvrzení je obsahem *Pythagorovy věty.*

Pomocí skalárního součinu můžeme spočíst úhel, který svírají dva vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ jako

$$\cos \measuredangle(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|},$$

v souřadnicovém vyjádření

$$\cos \measuredangle((x, y, z), (x', y', z')) = \frac{xx' + yy' + zz'}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}$$



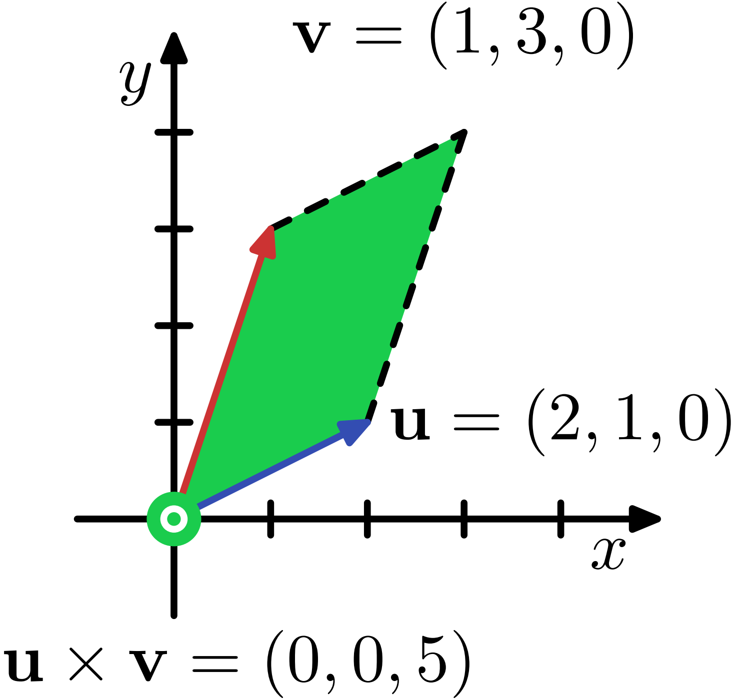
$$\cos \measuredangle(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{2.(-1)+1.2}{\sqrt{2^2+1^2}\sqrt{(-1)^2+2^2}} = 0$$

Jak je zřejmé ze vzorce i obrázku, rozumíme v tomto případě úhlem mezi vektory **u** a **v** jejich *neorientovaný* úhel. Všechny doposud uvedené operace dávaly dobrý smysl i v rovině.

Vektorový součin. Dvojici vektorů $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ přiřadíme vektor $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, v souřadnicovém vyjádření máme

$$((x, y, z), (x', y', z')) \mapsto (yz' - zy', zx' - xz', xy' - yx').$$

Geometrický význam vektorového součinu: vektor $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ je kolmý na každý z vektorů $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$ a to tak, že uspořádaná trojice $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \times \mathbf{v})$ tvoří pravotočivý souřadný systém. Velikost vektoru $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ je rovna ploše rovnoběžníka určeného vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$.


$\mathbf{v} = (1,3,0)$
y
$\mathbf{u} = (2,1,0)$
x
$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (0,0,5)$

Smíšený součin. Trojici vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ a $\mathbf{w}$ v prostoru přiřadí orientovaný objem rovnoběžnostěnu jehož hrany tvoří vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ a $\mathbf{w}$, tedy

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \mapsto \langle \mathbf{u} \times \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle,$$

v souřadnicích máme

$$((x, y, z), (x', y', z'), (x'', y'', z'')) \mapsto \det \begin{pmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{pmatrix} =$$
$$= xy'z'' + yz'x'' + zx'y'' - xz'y'' - yx'z'' - zy'x''$$

(Některá) pravidla pro počítání s vektorovým součinem.

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2$$
$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} \neq \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$$
$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$$

(Některá) pravidla pro počítání se smíšeným součinem.

$$\langle \mathbf{u} \times \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v} \times \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{w} \times \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle =$$
$$= -\langle \mathbf{v} \times \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = -\langle \mathbf{u} \times \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle = -\langle \mathbf{w} \times \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$$

3. Geometrie přímek v rovině. Existují v zásadě dva způsoby, jak definovat přímku v rovině. První způsob po vzoru Euklida bere přímku jako primitivní objekt, který splňuje jisté axiomy. Tuto možnost nebudeme dále rozvádět. Druhý způsob po vzoru Descarta definuje přímku v kartézské rovině $0xy$ jako objekt splňující lineární rovnici

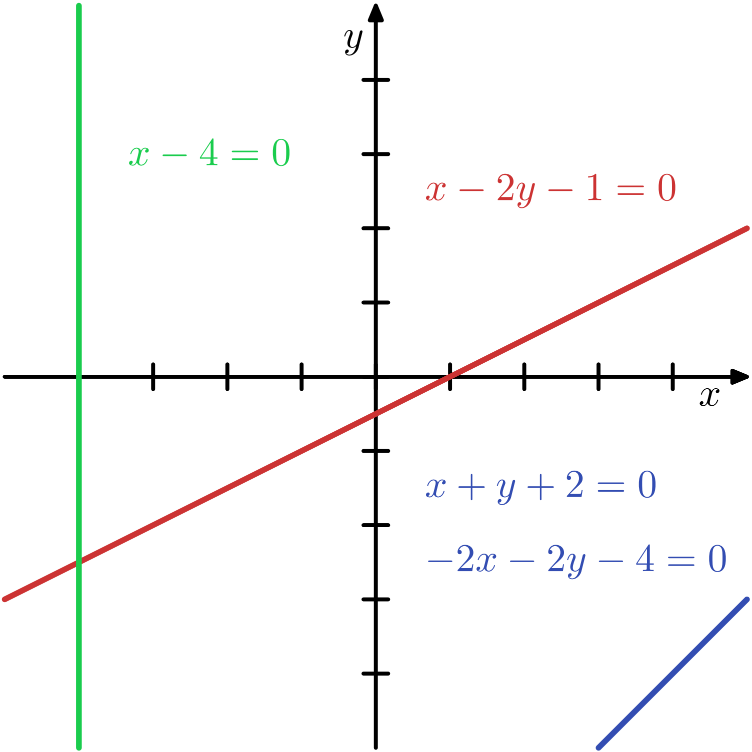
$$ax + by + c = 0$$

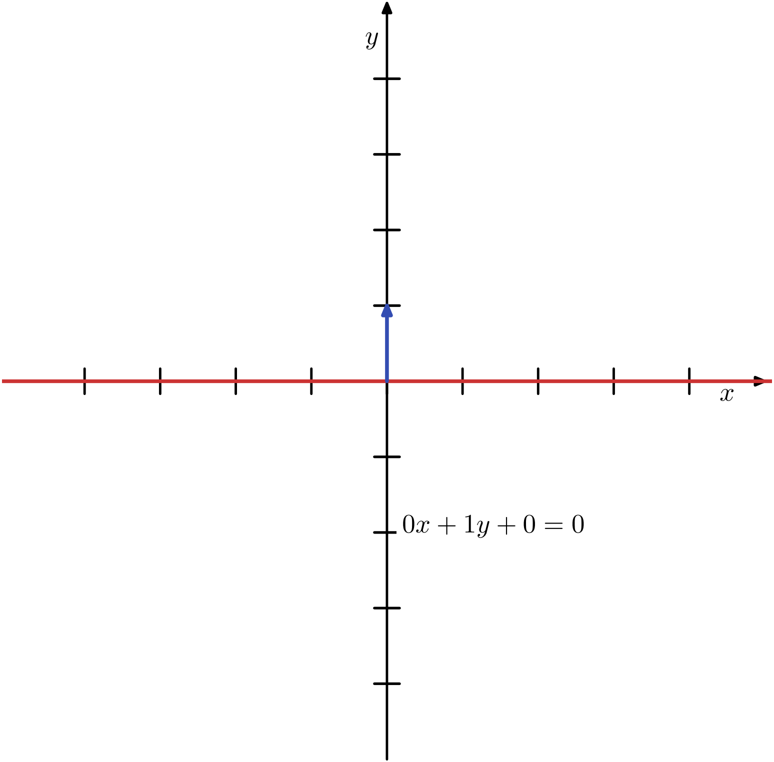
pro jistá daná $a, b, c \in \mathbf{R}$, říkáme, že se jedná o *implicitní rovnici přímky*.

Obrázek na další straně zobrazuje několik (částí) přímek a jejich rovnice. Povšimněte si, že jedné přímce může odpovídat mnoho lineárních rovnic, všechny tyto rovnice jsou si navzájem ekvivalentní, tj. jednu z druhé dostaneme vynásobením nenulovým číslem.

Dále si povšimněme (viz animace dále), že vektor o souřadnicích (a, b) je vždy kolmý na přímku danou rovnicí $ax + by + c = 0$. Vektor $(-b, a)$ je tedy vždy rovnoběžný s touto přímkou, jelikož jejich skalární součin je

$$\langle (a, b), (-b, a) \rangle = a.(-b) + b.a = 0.$$


$x - 4 = 0$
$x - 2y - 1 = 0$
$x + y + 2 = 0$
$-2x - 2y - 4 = 0$
x
y


y
x
$0x + 1y + 0 = 0$

Další možností jak zadat přímku v rovině je tzv. parametrické vyjádření přímky. Nejčastěji se využívá tzv. afinní parametrizace přímky

$$\begin{aligned} x &= \alpha t + \xi \\ y &= \beta t + \eta, \end{aligned} \qquad t \in \mathbf{R},$$

kde t je reálný parametr.

Tento způsob vyjádření určuje, jak se křivka vykresluje. Pokud bychom považovali parametr t za čas a chtěli popsat pohyb nějakého bodového objektu na přímce v rovině, udělali bychom to právě tímto způsobem.

Spočtěme nyní nějakou afinní parametrizaci přímky p určené rovnicí $x-2y-1=0$. Dosaďme do rovnice přímky p

$$\begin{gathered} (\alpha t + \xi) - 2(\beta t + \eta) - 1 = 0 \\ (\alpha - 2\beta)t + (\xi - 2\eta - 1) = 0 \end{gathered}$$

Aby mnohočlen v proměnné t byl nulový, musí být nulové všechny jeho koeficienty, přičemž požadujeme α a β nebyly zároveň nulové.

Můžeme tedy zvolit např. $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $\xi = 1$ a $\eta = 0$. Bod (ξ, η) – v našem případě $(1, 0)$ – je libovolný bod ležící na přímce p. Ovšem dvojice (α, β) – v našem případě $(2, 1)$ – *neurčuje* bod v rovině, ale směr pohybu bodu po přímce a vzdálenost, kterou bod urazí po přímce při jejím vykreslování za změnu parametru t o jedničku.

Jedna možná afinní parametrizace přímky p je tedy

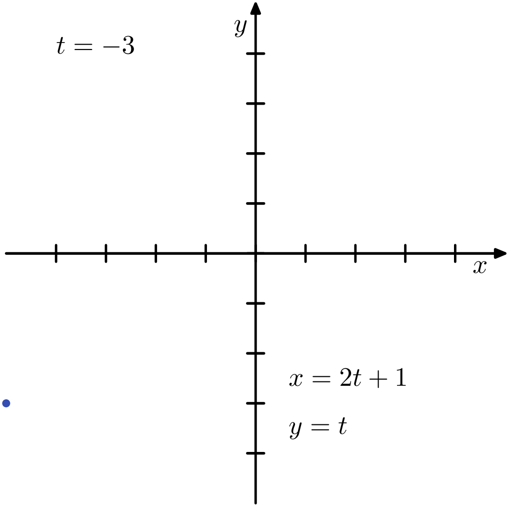
$$\begin{aligned} x &= 2t + 1 \\ y &= t, \end{aligned} \qquad t \in \mathbf{R},$$

jiná možnost je např.

$$\begin{aligned} x &= 4t - 1 \\ y &= 2t - 1, \end{aligned} \qquad t \in \mathbf{R},$$

Situace je znázorněna na animaci dále.

$t = -3$



$$x = 2t + 1$$
$$y = t$$

Pokud z parametrického vyjádření přímky chceme získat implicitní vyjádření, jednoduše vyloučíme parametr t. Z druhé rovnice dostaneme

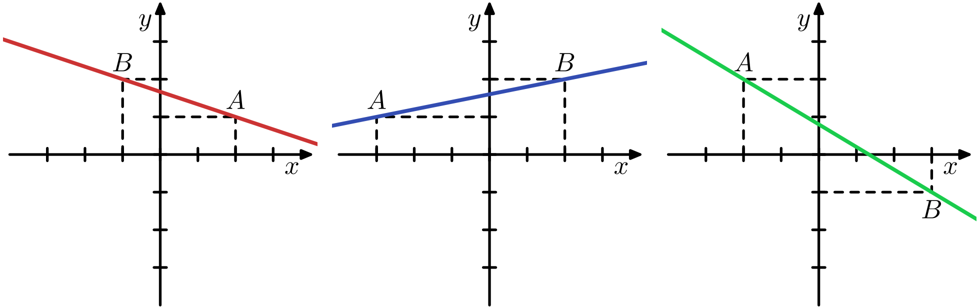
$$\begin{aligned} y &= 2t - 1 \\ 2t &= y + 1 \\ 4t &= 2y + 2, \end{aligned}$$

což dosadíme do rovnice první

$$\begin{aligned} x - 4t + 1 &= 0 \\ x - 2y - 2 + 1 &= 0 \\ x - 2y - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Příklady:

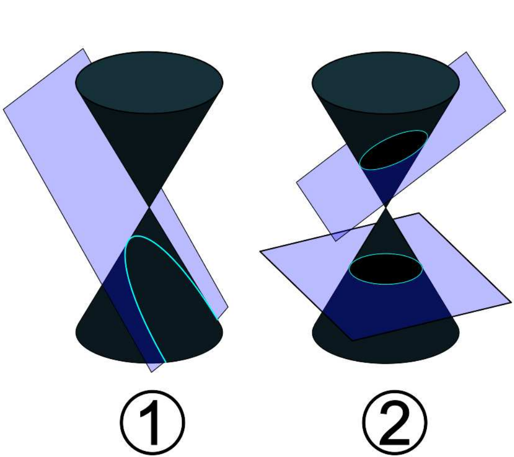
(1) Určete afinní parametrické a implicitní vyjádření přímek na obrázcích



(2) V předchozích obrázcích určete takovou afinní parametrizaci přímek, že bodu A odpovídá hodnota parametru $t = 0$ a bodu B hodnota parametru $t = 1$.

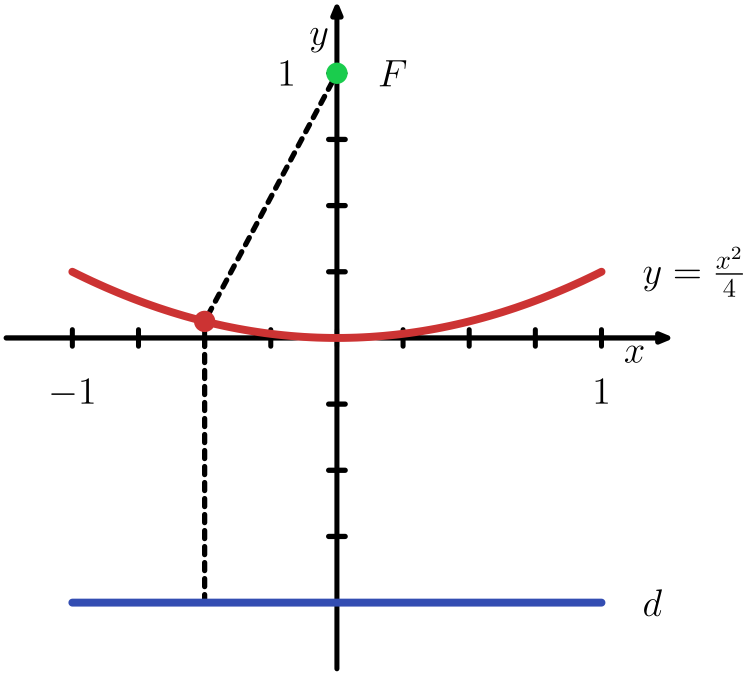
(3) Určete úhel, jež svírá přímka daná svou afinní parametrizací (resp. implicitně) s osou x.

4. Kuželosečky.



1 — Parabola 2 — Elipsa, kružnice 3 — Hyperbola

5. Parabola.



Parabolu $\mathcal{P}$ lze rovněž definovat jako množinu bodů, jež mají stejnou vzdálenost od dané přímky d a bodu F, který neleží na přímce d. Přímku d nazýváme *řídicí přímka* a bod F *ohnisko.*

Buď $p > 0$. Zvolme souřadný systém Oxy v rovině tak, že $F = (0, p)$ a implicitní rovnice řídicí přímky d: $y = -p$. Potom musí platit

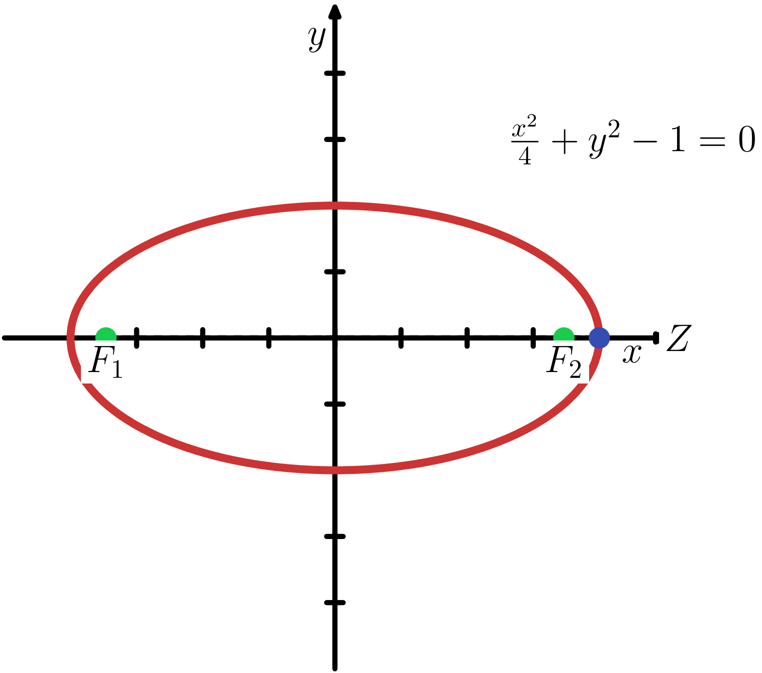
$$\begin{aligned} y + p &= \sqrt{x^2 + (y-p)^2} \\ y^2 + 2py + p^2 &= x^2 + y^2 - 2py + p^2 \\ 4py &= x^2 \\ \mathcal{P} &= \{(x, y)|4py = x^2\}. \end{aligned}$$

Tečnu k parabole $\mathcal{P}$ v bodě $Z = (z, z^2/4p)$ získáme následovně: tato přímka musí procházet bodem Z a přitom nesmí parabolu jinde protínat. Soustava rovnic

$$\begin{aligned} ax + y + c &= 0 \\ 4py - x^2 &= 0 \end{aligned}$$

musí mít právě jedno řešení a navíc přímka $ax + y + c = 0$ musí procházet bodem Z. Pro rovnici tečny celkem dostaneme $-2zx + y + z^2 = 0$.

6. Elipsa.



Elipsu lze definovat jako množinu bodů $Z = (x, y)$, součet jejichž vzdáleností od dvou daných bodů F_1 a F_2 je konstantní. Tedy

$$\|F_1 Z\| + \|F_2 Z\| = 2a.$$

Body F_1 a F_2 se nazývají ohniska elipsy. Zvolme souřadnicový systém tak, že $F_1 = (-f, 0)$ a $F_2 = (f, 0)$, kde $f^2 = a^2 - b^2$, a je *hlavní poloosa elipsy*, b je *vedlejší poloosa elipsy*. Potom pro body Z elipsy musí platit

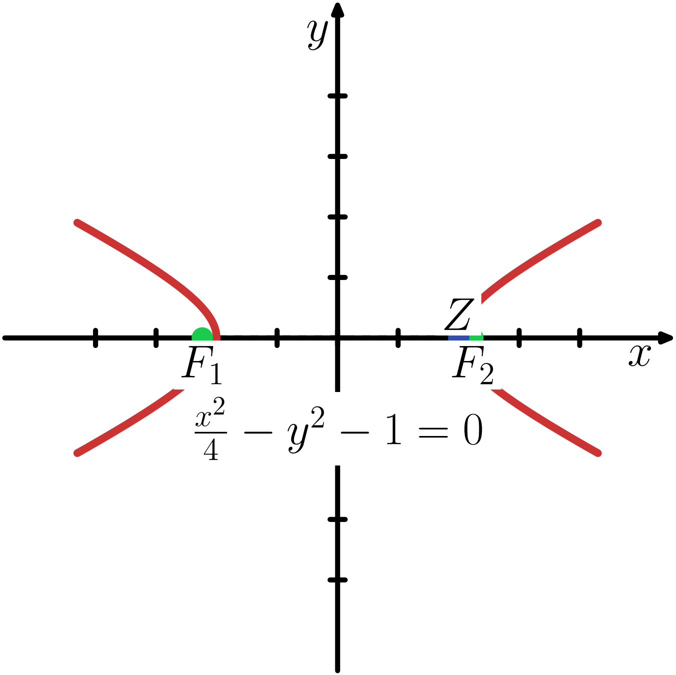
$$\begin{aligned}
\sqrt{(x+f)^2 + y^2} + \sqrt{(x-f)^2 + y^2} &= 2a \\
x^2 + y^2 + f^2 - 2a^2 &= -\sqrt{[(x+f)^2 + y^2].[(x-f)^2 + y^2]} \\
\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 &= 0.
\end{aligned}$$

Jedno z možných parametrických vyjádření elipsy je

$$x = a\cos\xi, \quad y = b\sin\xi,$$

kde $\xi \in [0, 2\pi)$. Pokud $F_1 = F_2$, potom $f = 0$, $a = b$ a dostáváme kružnici o poloměru a.

7. Hyperbola.



Hyperbolu lze definovat jako množinu bodů $Z = (x, y)$, u nichž absolutní hodnota rozdílu vzdáleností od dvou daných bodů F_1 a F_2 je konstantní. Tedy

$$|\|F_1Z\| - \|F_2Z\|| = 2a.$$

Body F_1 a F_2 se nazývají ohniska hyperboly. Zvolme souřadnicový systém tak, že $F_1 = (-f, 0)$ a $F_2 = (f, 0)$, kde $f^2 = a^2 + b^2$, a je *hlavní poloosa hyperboly*, $2a$ je vzdálenost vrcholů, b je *vedlejší poloosa hyperboly*, b je svislá vzdálenost od vrcholu k bližší asymptotě hyperboly. Potom pro body Z hyperboly musí platit

$$\begin{aligned}
\left|\sqrt{(x+f)^2+y^2} - \sqrt{(x-f)^2+y^2}\right| = 2a \\
x^2 + y^2 + f^2 - 2a^2 &= \sqrt{[(x+f)^2+y^2].[(x-f)^2+y^2]} \\
\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 &= 0.
\end{aligned}$$

Jedno z možných parametrických vyjádření hyperboly je

$$x = \pm a \cosh \xi, \quad y = b \sinh \xi,$$

kde $\xi \in [-\infty, \infty)$. Pokud $a = b$ a dostáváme tzv. *rovnoosou hyperbolu.*