Jordanův normální tvar

Michael Krbek

1. Zobecněné vlastní vektory. V dalším budeme uvažovat linearní operátory $\alpha\colon V \to V$, kde V je vektorový prostor dimenze n nad tělesem $\mathbf{C}$. Zatím jsme se zabývali většinou tzv. diagonalizovatelnými lineárními operátory, tj. operátory α, které mají bázi složenou z vlastních vektorů. Ne všechny lineární operátory jsou ovšem diagonalizovatelné.

Příklad 1. Vezměme $\alpha\colon \mathbf{C}^3 \to \mathbf{C}^3$, jehož matice A ve standardní bázi je dána

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Charakteristický polynom této matice (a tedy i operátoru α) je

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 2 & -\lambda & -1 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\lambda^2.$$

Číslo $\lambda = 0$ je tedy dvojnásobným a $\lambda = 1$ je jednoduchým kořenem charakteristického polynomu. Spočtěme vlastní vektory u příslušné vlastní hodnotě $\lambda = 1$,

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 2 & -\lambda & -1 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

je tedy $u^1 = 0$ a $u^2 + u^3 = 0$. Vlastní vektory příslušné k vlastní hodnotě $\lambda = 1$ tvoří jednorozměrný podprostor generovaný např. vektorem u, jehož složky v standardní bázi jsou $(0, 1, -1)^{\mathrm{t}}$ (můžeme také psát $u = (0, 1, -1)^{\mathrm{t}}$).

Spočtěme nyní vlastní vektory příslušné vlastní hodnotě $\lambda = 0$.

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 2 & -\lambda & -1 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

je tedy $v^1 = 0$ a $v^3 = 0$. Vlastní vektory příslušné k dvojnásobné vlastní hodnotě $\lambda = 0$ tvoří jednorozměrný podprostor generovaný např. vektorem $v = (0, 1, 0)^{\mathrm{t}}$.

Dimenze vektorového prostoru, na kterém α působí, je ovšem 3, potřebujeme tedy ještě jeden bázový vektor w takový, že systém (u, v, w) je lineárně nezávislý. Kde nastal problém? Přestože $\lambda = 0$ je dvojnásobným kořenem charakteristického polynomu, je dimenze podprostoru vlastních vektorů příslušných k vlastní hodnotě $\lambda = 0$ pouze 1. Musíme tedy najít nějaký vektor w vztahující se k vlastní hodnotě $\lambda = 0$ (nebude to ale vlastní vektor), který společně s vektory u a v tvoří lineárně nezávislý systém.

Nápad: Zkusme pro $\lambda = 0$ řešit soustavu $(A - \lambda.1)^2 w = 0$. Tato soustava musí mít nenulová řešení, protože hodnost matice $\operatorname{rank}(A - \lambda.1) < 3$ a tedy i hodnost $\operatorname{rank}[(A - \lambda.1)^2] < 3$.

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 2 & -\lambda & -1 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \\ w^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \\ w^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \\ w^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

platí tedy $w^1 = w^3 = 0$ a podprostor těchto vektorů je dvojrozměrný, generovaný například vektory $(0,1,0)^t$ a $(1,0,1)^t$. Tento podprostor je větší než podprostor vlastních vektorů příslušných vlastní hodnotě $\lambda = 0$. Jak vidíme, patří sem každý vlastní vektor v příslušný vlastní hodnotě $\lambda = 0$. Platí-li totiž $(A - \lambda.1)v = 0$, platí také $(A - \lambda.1)^2 v = 0$. Musíme tedy vybrat takový vektor w, který zároveň není vlastním vektorem příslušným k $\lambda = 0$ ani k $\lambda = 1$, např. $w = (1,0,1)^t$. Vektory (u,v,w) potom tvoří lineárně nezávislý systém. Přejděme nyní k bázi tvořené těmito vektory, matice přechodu k této bázi je $S = (u,v,w)$. Lineární operátor α je v této bázi dán maticí

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = J$$

Jedná se v tomto smyslu o nejjednodušší bázi, v níž můžeme operátor α vyjádřit.

Úvahy z úvodního příkladu nás motivují k definici: Vektor $v \in V$ nazveme ***zobecněným vlastním vektorem*** operátoru α příslušným k vlastní hodnotě λ, pokud existuje $k \in \mathbf{N}$ takové, že $(\alpha - \lambda.1)^k v = 0$, k-tou mocninou operátoru zde přitom rozumíme jeho k-násobnou postupnou aplikaci. Pro $k = 1$ dostáváme definici vlastního vektoru.

Ukazuje se tedy nutné studovat vlastnosti mocnin operátoru $\beta\colon V \to V$. Zřejmě to budeme potřebovat pro $\beta = \alpha - \lambda.1$.

Lemma 2. *Buď k přirozené číslo takové, že platí $\ker \beta^{k+1} = \ker \beta^k$. Potom*

$$\{0\} = \ker \beta^0 \subseteq \ker \beta^1 \subseteq \cdots \subseteq \ker \beta^k = \ker \beta^{k+1} = \ker \beta^{k+2} = \cdots.$$

Důkaz. Nechť jsou splněny předpoklady lemmatu. Chceme ukázat, že $\ker \beta^{k+\ell+1} = \ker \beta^{k+\ell}$ pro všechna přirozená ℓ. $v \in \ker \beta^{k+\ell}$ znamená $\beta^{k+\ell} v = 0$. Pokud $\beta^{k+\ell} v = 0$ je i $\beta\beta^{k+\ell} v = \beta^{k+\ell+1} v = 0$ a tedy $v \in \ker \beta^{k+\ell+1}$. Naopak předpokládejme, že $v \in \ker \beta^{k+\ell+1}$, tj. $0 = \beta^{k+\ell+1} v = \beta^{k+1}\beta^\ell v$. Z toho plyne, že $\beta^\ell v \in \ker \beta^{k+1}$ a z předpokladu lemmatu $\beta^\ell v \in \ker \beta^k$, z toho ale plyne $v \in \ker \beta^{k+\ell}$. ■

Můžeme si nyní položit otázku, zda vždy existuje takové k, že platí $\ker \beta^k = \ker \beta^{k+1}$. Odpověď na otázku dává následující lemma, které říká, že v nejhorším případě $k = n = \dim V$. Tento případ skutečně může nastat.

Příklad 3. Vezměme za $\beta\colon \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ operátor, jehož matice B ve standardní bázi je

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & & & 0 & 1 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Spočtěme nyní B^k pro $k \in \{1,\dots,n\}$ a určeme vždy patřičná jádra $\ker B^k$. Jádro $\ker B$ je generováno prvním vektorem standardní báze. Vyšší mocniny matice B mají jedničky vždy posunuty o jednu pozici nad diagonálou a proto $B^{n+\ell} = 0$ pro $\ell \geq 0$. Jádro B^k je tedy vždy generováno prvními k vektory standardní báze. Ve chvíli, kdy k dosáhne hodnoty $n = \dim V$, je již generován celý V a proto jádra nemohou dále narůstat.

Nyní získaný vhled dokážeme.

Lemma 4. *Buď $n = \dim V$. Pak platí $\beta^n = \beta^{n+\ell}$ pro $\ell \in \mathbf{N}$.*

Důkaz. S ohledem na lemma 2 stačí dokázat $\beta^n = \beta^{n+1}$. Budeme dokazovat sporem. Proto předpokládejme, že lemma neplatí a

$$0 = \ker \beta^0 \subset \ker \beta^1 \subset \cdots \subset \ker \beta^n \subset \ker \beta^{n+1},$$

kde každá další podmnožina je ostře větší než předchozí. V každém kroku musí tedy dimenze $\dim \ker \beta^k$ vzrůst nejméně o jedničku. Je tedy $\dim \ker \beta^{n+1} \geq n + 1$. Dimenze libovolného podprostoru V ale nemůže být větší než $n = \dim V$ a toto je spor. ■

Přímým důsledkem předchozího lemmatu 4 je následující věta charakterizující zobecněné vlastní vektory.

Věta 5. *Zobecněné vlastní vektory operátoru α příslušné vlastní hodnotě λ tvoří podprostor* $\ker(\alpha - \lambda.1)^n$.

Důkaz. Nechť $v \in \ker(\alpha - \lambda.1)^n$. Potom v je podle definice zobecněným vlastním vektorem příslušným vlastní hodnotě λ. Naopak nechť v je zobecněným vlastním vektorem k vlastní hodnotě λ. Potom podle definice existuje k tak, že $v \in \ker(\alpha - \lambda.1)^k$. Vzhledem k platnosti lemmatu 4 pro $\beta = \alpha - \lambda.1$ je $k \leq n$ a kvůli lemma 2 je $\ker(\alpha - \lambda.1)^k \subseteq \ker(\alpha - \lambda.1)^n$. ■

Operátor $\nu\colon V \to V$ nazveme ***nilpotentním***, existuje-li $k \in \mathbf{N}$ tak, že $\nu^k = 0$. Příkladem nilpotentního operátoru je operátor β z příkladu 3.

Věta 6. *Buď $\nu\colon V \to V$ nilpotentní operátor a $n = \dim V$. Potom $\nu^n = 0$.*

Důkaz. Protože ν je nilpotentní, je každý vektor $v \in V$ zobecněným vlastním vektorem příslušným vlastní hodnotě $\lambda = 0$. Naše tvrzení je nyní důsledkem věty 5. ■

Vypořádali jsme se s jádry mocnin operátorů, nyní nastal čas věnovat se jejich obrazům. Buď $k \geq 0$ a $\beta\colon V \to V$ lineární operátor. Pokud $w \in \operatorname{im} \beta^{k+1}$ pak z definice existuje v tak, že

$$w = \beta^{k+1} v = \beta^k \beta v \in \operatorname{im} \beta^k.$$

Platí tedy

$$V = \operatorname{im} \beta^0 \supseteq \operatorname{im} \beta^1 \supseteq \cdots \supseteq \operatorname{im} \beta^k \supseteq \operatorname{im} \beta^k + 1 \supseteq \cdots.$$

Výše uvedená posloupnost se opět po $n = \dim V$ krocích stabilizuje.

Lemma 7. *Platí* $\operatorname{im} \beta^n = \operatorname{im} \beta^{n+1} = \operatorname{im} \beta^{n+2} = \cdots$.

Důkaz. Vezměme $m > n$. Potom

$$\dim \operatorname{im} \beta^m = \dim V - \dim \ker \beta^m = n - \dim \ker \beta^n = \dim \operatorname{im} \beta^n$$

s využitím lemmatu 4 a z toho již plyne, že $\operatorname{im} \beta^n = \operatorname{im} \beta^{n+\ell}$ pro $\ell \in \mathbf{N}$. ■

2. Hamilton-Cayleyho věta a rozklad operátoru. Připomeňme, že pro každý operátor α umíme nalézt takovou bázi, že jeho matice v ní je horní trojúhelníková.

Příklad 8. Vezměme operátor α z příkladu 1. Pro operátor nad $\mathbf{C}$ jsem vždy schopni nalézt alespoň jednu vlastní hodnotu a jí příslušný vlastní vektor. Vezměme např. vlastní vektor $(0, 1, -1)^{\mathrm{t}}$ příslušný vlastní hodnotě $\lambda = 1$ a doplňme ho na bázi v $\mathbf{C}^3$. Označme P nějakou matici přechodu k této nové bázi, $P^{-1}AP$ je matice operátoru α v této nové bázi

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Další úpravy již stačí provádět s operátorem B působícím na libovolném doplňku jednorozměrného podprostoru generovaného vlastním vektorem $(0, 1, -1)^{\mathrm{t}}$.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

který na horní trojúhelníkovou matici $Q^{-1}BQ$ převedeme maticí

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q^{-1}BQ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Uvažme nyní matici přechodu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

k bázi (f_1, f_2, f_3). V této bázi je α reprezentován horní trojúhelníkovou maticí

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Věta 9 (Hamilton-Cayleyho)**.** *Buď $p(\lambda)$ charakteristický polynom operátoru α. Potom platí $p(\alpha) = 0$.*

Důkaz. Nechť $(f_1, \dots, f_n)$ je báze, ve které má α horní trojúhelníkovou matici T. Na diagonále matice jsou zjevně vlastní hodnoty operátoru α. Označme je odshora $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (je možné, že $\lambda_i = \lambda_j$ i pro $i \neq j$). Potřebujeme ukázat, že $p(T)f_j = 0$ pro všechna $j \in \{1, \dots, n\}$. Vzhledem k tomu, že T je trojúhelníková, je i $p(T)$ trojúhelníková. Rozložme charakteristický polynom matice $p(T) = (T - \lambda_n.1) \dots (T - \lambda_1.1)$. Stačí tedy dokázat $(T - \lambda_j.1) \dots (T - \lambda_1.1)f_j = 0$ pro $j \in \{1, \dots, n\}$. Zjevně platí

$$(T - \lambda_1.1)f_1 = \begin{pmatrix} 0 & & & * \\ & \lambda_2 - \lambda_1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n - \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

V dalším kroku uvažme $(T-\lambda_2.1)(T-\lambda_1.1)$ působící na první dva bázové vektory f_1 a f_2.

$$(T-\lambda_2.1)(T-\lambda_1.1)f_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1-\lambda_2 & & & * \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n-\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & & & * \\ & \lambda_2-\lambda_1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n-\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Když vezmeme součin trojúhelníkových matic $(T-\lambda_j.1)\dots(T-\lambda_1.1)$ bude mít první aplikovaná matice 0 v prvním řádku, druhá v druhém atd. a j-tá v j-tém řádku na diagonále a v jejich součin bude 0 v prvních j-řádcích, což platí pro každé j. Tím je tvrzení dokázáno. ■

Nyní se zabývejme libovolným polynomem q z operátoru α.

Lemma 10. $\ker q(\alpha)$ *je invariantním podprostorem* α*.*

Důkaz. Nechť $v \in \ker q(\alpha)$, tj. $q(\alpha)v = 0$. Potom ale $q(\alpha)\alpha v = \alpha q(\alpha)v = \alpha(0) = 0$, tj. $\alpha v \in \ker q(\alpha)$. ■

Nyní jsme již schopni dokázat větu o struktuře lineárních operátorů.

Věta 11. *Buď* V *vektorový prostor nad tělesem* $\mathbf{C}$ *dimenze* n, $\alpha\colon V\to V$ *a* $\lambda_1,\dots,\lambda_r$ *všechny různé vlastní hodnoty* α *a* $U_1,\dots,U_r$ *jim příslušné podprostory zobecněných vlastních vektorů. Potom platí*

(1) $V = U_1\oplus\dots\oplus U_r$,

(2) každý U_j *je invariantním podprostorem* α,

(3) každé $(\alpha-\lambda_j.1)|_{U_j}$ *je nilpotentní.*

Důkaz. (2) je důsledkem lemmatu 10 pro polynom $q(z) = (z-\lambda_j)^n$, (3) je přímým důsledkem definic. Abychom ukázali (1), uvědomme si, že $\dim U_j$ je rovna počtu výskytů vlastní hodnoty na diagonále příslušné trojúhelníkové matice. Je tedy zřejmé, že $\dim V = \dim U_1+\dots+\dim U_r$. Buď nyní $U = U_1+\dots+U_r$. Potom je U invariantním podprostorem α. Můžeme tedy definovat $\beta\colon U\to U$ jako restrikci α na U. β má ale stejné vlastní hodnoty, a jelikož v U leží všechny zobecněné vlastní vektory, má i stejné zobecněné vlastní vektory a je tedy $\dim U = \dim V$. Jelikož je U podprostorem V, je tedy $U = V$. ■

Nyní se musíme zabývat strukturou nilpotentních operátorů. Začneme definicí. Podprostor $U\subset V$ se nazývá ***cyklickým*** vzhledem k $\beta\colon V\to V$, existuje-li jeho báze $(e_1,\dots,e_r)$ taková, že $\beta(e_1) = e_2$, $\beta(e_2) = e_3$, …, $\beta(e_r) = 0$, schematicky to lze napsat

$$e_r \xrightarrow{\beta} e_{r-1} \xrightarrow{\beta} e_{r-2} \xrightarrow{\beta} \cdots \xrightarrow{\beta} e_2 \xrightarrow{\beta} e_1 \xrightarrow{\beta} 0\,,$$

báze $(e_1,\dots,e_r)$ se v takovém případě nazývá ***Jordanovou bází***.

Věta 12. *Buď* $\nu\colon V\to V$ *nilpotentní operátor. Potom existují cyklické podprostory* $U_1,\dots,U_s$ *tak, že* $V = U_1\oplus\dots\oplus U_s$.

Důkaz. Označme k stupeň nilpotence operátoru ν, tj nejmenší takové k, že $\nu^k = 0$, ale $\nu^{k-1} \neq 0$. Je tedy $\ker \nu^{k-1} \neq V$.

(a) Zvolíme libovolně bázi v $\ker \nu^{k-1}$ a doplníme ji na bázi ve $V = \ker \nu^k$ nějakými vektory $e_1, \dots, e_{\ell_1}$. Vektory $\nu^{k-1}e_1, \dots, \nu^{k-1}e_{\ell_1}$ tvoří potom bázi v $\operatorname{im} g^{k-1}$.

(b) Zvolíme libovolně bázi v $\ker \nu^{k-2}$ a doplníme ji vektory $\nu e_1, \dots, \nu e_{\ell_1}$. Vzniklý systém je lineárně nezávislý (lineární závislost znamená, že by existovala $a_1\nu(e_1)+\cdots+a_{\ell_1}\nu(e_{\ell_1} \in \ker \nu^{k-2}$. Z toho ale získáme spor s (a)) a doplníme ho na bázi v $\ker \nu^{k-1}$ nějakými vektory $e_{\ell_1+1}, \dots, e_{\ell_2}$.

(c) Zvolíme libovolně bázi v $\ker \nu^{k-3}$ a doplníme ji vektory $\nu^2 e_1, \dots, \nu^2 e_{\ell_1}$, $\nu e_{\ell_1+1}, \dots, \nu e_{\ell_2}$. Vzniklý systém je opět lineárně nezávislý. Systém doplníme na bázi v $\ker \nu^{k-2}$ nějakými vektory $e_{\ell_2+1}, \dots, e_{\ell_3}$.

Podobných kroků provedeme k, kdy v posledním kroku bereme $\ker \nu^0 = \ker 1 = \{0\}$ a celkově získáme bázi

$$
\begin{aligned}
&e_1, \dots, e_{\ell_1}, \\
&\nu e_1, \dots, \nu e_{\ell_1}, e_{\ell_1+1}, \dots, e_{\ell_2} \\
&\nu^2 e_1, \dots, \nu^2 e_{\ell_1}, \nu e_{\ell_1+1}, \dots, \nu e_{\ell_2}, e_{\ell_2+1}, \dots, e_{\ell_3} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

v prostoru V. Podprostory

$$
\begin{aligned}
&[e_1, \nu e_1, \nu^2 e_1, \dots], \dots, [e_{\ell_1}, \nu e_{\ell_1}, \nu^2 e_{\ell_1}, \dots] \\
&[e_{\ell_1+1}, \nu e_{\ell_1+1}, \nu^2 e_{\ell_1+1}, \dots], \dots, [e_{\ell_2}, \nu e_{\ell_2}, \nu^2 e_{\ell_2}, \dots] \\
&\ddots
\end{aligned}
$$

jsou cyklické. Tím je tvrzení dokázáno. ∎

Schematicky můžeme situaci znázornit pomocí diagramu:

$$
\begin{tikzcd}
e_1 \arrow[d, "\nu"] & \cdots & e_{\ell_1} \arrow[d, "\nu"] & & & & & & \\
\bullet \arrow[d, "\nu"] & \cdots & \bullet \arrow[d, "\nu"] & e_{\ell_1+1} \arrow[d, "\nu"] & \cdots & e_{\ell_2} \arrow[d, "\nu"] & & & \\
\bullet \arrow[d, "\nu"] & \cdots & \bullet \arrow[d, "\nu"] & \bullet \arrow[d, "\nu"] & \cdots & \bullet \arrow[d, "\nu"] & e_{\ell_2+1} \arrow[d, "\nu"] & \cdots & e_{\ell_3} \arrow[d, "\nu"] \\
\bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet
\end{tikzcd}
$$

Zřejmě každý blok $(\alpha - \lambda_j.1)|_{U_j}$ z věty 11 je nilpotentní a lze k němu tedy zkonstruovat Jordanovu bázi. Bloky jsou určeny jednoznačně až na jejich pořadí. Cyklické podprostory jsou rovněž určeny jednoznačně až na pořadí. Ukázali jsme, že pro každý operátor lze najít takovouto bázi.