Mœllerův rozptyl

1. Základní popis a Feymanovy diagramy. Chceme popsat rozptyl elektronu na elektronu. Nechť se tedy srazí dva elektrony s (čtyř)hybnostmi p_1 a p_2 a získají hybnosti $\bar{p}_1$ a $\bar{p}_2$. Rovnice

$$p_1 + p_2 = \bar{p}_1 + \bar{p}_2$$

vyjadřuje zákon zachováni hybnosti. V dalším s výhodou použijeme Mandelstamovy proměnné

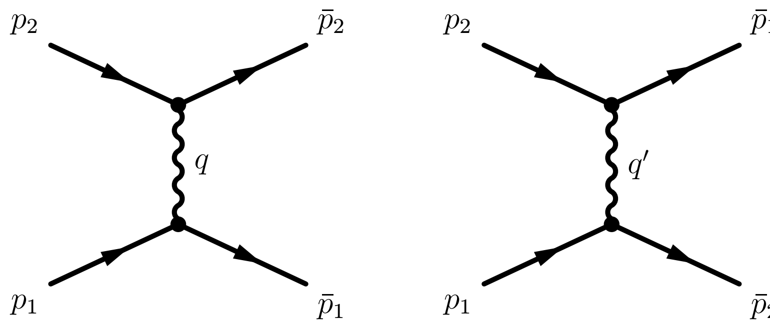
$$\begin{aligned} s &= (p_1 + p_2)^2 = 2(m^2 + p_1 p_2) \\ t &= (p_1 - \bar{p}_1)^2 = 2(m^2 - p_1 \bar{p}_1) \\ u &= (p_1 - \bar{p}_2)^2 = 2(m^2 - p_1 \bar{p}_2), \end{aligned}$$

kde

$$s + t + u = 4m^2.$$

Proces je popsán Feynmanovými diagramy na obrázku, jimž přísluší amplitudy pravděpodobnosti

$$\begin{gathered} e^2 \left(\bar{u}(\bar{p}_2)\gamma^\mu u(p_2)\right) D_{\mu\nu}(q) \left(\bar{u}(\bar{p}_1)\gamma^\nu u(p_1)\right) \\ e^2 \left(\bar{u}(\bar{p}_1)\gamma^\mu u(p_2)\right) D_{\mu\nu}(q') \left(\bar{u}(\bar{p}_2)\gamma^\nu u(p_1)\right). \end{gathered}$$



2. Amplituda pravděpodobnosti. Propagátor fotonu v impulzové reprezentaci je

$$D_{\mu\nu}(q) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{4\pi g_{\mu\nu}}{q^2 + \mathrm{i}\epsilon}$$

Využijeme-li zákona zachování hybnosti pro výpočet hybnosti fotonů q a také q', použijeme-li dále proměnné t resp. u k vyjádření propagátoru fotonu pro první resp. druhý diagram, dostaneme pro amplitudu M vztah

$$\begin{aligned} & e^2\left(\bar{u}(\bar{p}_2)\gamma^\mu u(p_2)\right) D_{\mu\nu}(q)\left(\bar{u}(\bar{p}_1)\gamma^\nu u(p_1)\right) + \\ & \qquad + e^2\left(\bar{u}(\bar{p}_1)\gamma^\mu u(p_2)\right) D_{\mu\nu}(q')\left(\bar{u}(\bar{p}_2)\gamma^\nu u(p_1)\right) = \\ & = 4\pi e^2\left[\frac{1}{t}\left(\bar{u}(\bar{p}_2)\gamma^\mu u(p_2)\right)\left(\bar{u}(\bar{p}_1)\gamma_\mu u(p_1)\right) - \frac{1}{u}\left(\bar{u}(\bar{p}_1)\gamma^\nu u(p_2)\right)\left(\bar{u}(\bar{p}_2)\gamma_\nu u(p_1)\right)\right]. \end{aligned}$$

3. Pravděpodobnost. Pravděpodobnost je dána jako modulus druhé mocniny amplitudy pravděpodobnosti $|M|^2$. Zde použijeme výsledky odvozené již dříve a přepíšeme pravděpodobnost pomocí matic hustoty jednotlivých částic

$$\begin{aligned} 16\pi^2 e^4 \Big\{ & \frac{1}{t^2}\operatorname{Tr}\left[\rho(\bar{p}_2,\bar{a}_2)\gamma^\mu\rho(p_2,a_2)\gamma^\nu\right]\operatorname{Tr}\left[\rho(\bar{p}_1,\bar{a}_1)\gamma_\mu\rho(p_1,a_1)\gamma_\nu\right] + \\ & + \frac{1}{u^2}\operatorname{Tr}\left[\rho(\bar{p}_1,\bar{a}_1)\gamma^\mu\rho(p_2,a_2)\gamma^\nu\right]\operatorname{Tr}\left[\rho(\bar{p}_2,\bar{a}_2)\gamma_\mu\rho(p_1,a_1)\gamma_\nu\right] - \\ & - \frac{1}{tu}\operatorname{Tr}\left[\rho(\bar{p}_2,\bar{a}_2)\gamma^\mu\rho(p_2,a_2)\gamma^\nu\rho(\bar{p}_1,\bar{a}_1)\gamma_\mu\rho(p_1,a_1)\gamma_\nu\right] - \\ & - \frac{1}{tu}\operatorname{Tr}\left[\rho(\bar{p}_1,\bar{a}_1)\gamma^\mu\rho(p_2,a_2)\gamma^\nu\rho(\bar{p}_2,\bar{a}_2)\gamma_\mu\rho(p_1,a_1)\gamma_\nu\right]\Big\}. \end{aligned}$$

Ve výpočtu je použito označení $\rho(p,a)$, což značí polarizační matici pro elektron s hybností p a polarizačním vektorem a. V dalším pro jednoduchost budeme uvažovat rozptyl nepolarizovaných elektronů, tj. matice $\rho(p) = \frac{1}{2}(\not{p}+m)$ (normujeme $\operatorname{Tr}\rho = 2m$). Po dosazení máme v $\{\cdots\}$ závorkách

$$\begin{aligned} = \frac{1}{16}\Big\{ & \frac{1}{t^2}\operatorname{Tr}\left[(\bar{\not{p}}_2+m)\gamma^\mu(\not{p}_2+m)\gamma^\nu\right]\operatorname{Tr}\left[(\bar{\not{p}}_1+m)\gamma_\mu(\not{p}_1+m)\gamma_\nu\right] + \\ & + \frac{1}{u^2}\operatorname{Tr}\left[(\bar{\not{p}}_1+m)\gamma^\mu(\not{p}_2+m)\gamma^\nu\right]\operatorname{Tr}\left[(\bar{\not{p}}_2+m)\gamma_\mu(\not{p}_1+m)\gamma_\nu\right] - \\ & - \frac{1}{tu}\operatorname{Tr}\left[(\bar{\not{p}}_2+m)\gamma^\mu(\not{p}_2+m)\gamma^\nu(\bar{\not{p}}_1+m)\gamma_\mu(\not{p}_1+m)\gamma_\nu\right] - \\ & - \frac{1}{tu}\operatorname{Tr}\left[(\bar{\not{p}}_1+m)\gamma^\mu(\not{p}_2+m)\gamma^\nu(\bar{\not{p}}_2+m)\gamma_\mu(\not{p}_1+m)\gamma_\nu\right]\Big\}. \end{aligned}$$

První a druhý sčítanec mají stejnou strukturu až na záměnu $\bar{p}_1 \leftrightarrow \bar{p}_2$, což odpovídá záměně $t \leftrightarrow u$. Totéž platí pro třetí a čtvrtý sčítanec. Stačí tedy, když explicitně spočteme např. první a třetí sčítanec.

Výpočet prvního sčítance:

$$\mathrm{Tr}\left[(\bar{\not p}_2 + m)\gamma^\mu(\not p_2 + m)\gamma^\nu\right] = \mathrm{Tr}\left[(\gamma^\alpha \bar{p}_{2,\alpha} + m)\gamma^\mu(\gamma^\beta p_{2,\beta} + m)\gamma^\nu\right] =$$
$$= \mathrm{Tr}\left(m^2\gamma^\mu\gamma^\nu + \bar{p}_{2,\alpha}p_{2,\beta}\gamma^\alpha\gamma^\mu\gamma^\beta\gamma^\nu\right) = 4\left(m^2 g^{\mu\nu} + \bar{p}_2^\mu p_2^\nu + \bar{p}_2^\nu p_2^\mu - (\bar{p}_2\cdot p_2)g^{\mu\nu}\right),$$

přičemž jsme využili již dokázané skutečnosti, že stopa lichého počtu γ-matic je nulová. Samozřejmě rovněž

$$\mathrm{Tr}\left[(\bar{\not p}_1 + m)\gamma_\mu(\not p_1 + m)\gamma_\nu\right] = 4\left(m^2 g_{\mu\nu} + \bar{p}_{1,\mu}p_{1,\nu} + \bar{p}_{1,\nu}p_{1,\mu} - (\bar{p}_1\cdot p_1)g_{\mu\nu}\right).$$

Celkem tedy v prvním sčítanci dostaneme

$$\frac{1}{16}\mathrm{Tr}\left[(\bar{\not p}_2 + m)\gamma^\mu(\not p_2 + m)\gamma^\nu\right]\mathrm{Tr}\left[(\bar{\not p}_1 + m)\gamma_\mu(\not p_1 + m)\gamma_\nu\right] =$$
$$= 4m^4 - 2m^2(\bar{p}_1\cdot p_1) - 2m^2(\bar{p}_2\cdot p_2) + 2(\bar{p}_2\cdot\bar{p}_1)(p_2\cdot p_1) + 2(\bar{p}_2\cdot p_1)((\bar{p}_1\cdot p_2).$$

Druhý sčítanec je analogicky

$$\frac{1}{16}\mathrm{Tr}\left[(\bar{\not p}_1 + m)\gamma^\mu(\not p_2 + m)\gamma^\nu\right]\mathrm{Tr}\left[(\bar{\not p}_2 + m)\gamma_\mu(\not p_1 + m)\gamma_\nu\right] =$$
$$= 4m^4 - 2m^2(\bar{p}_2\cdot p_1) - 2m^2(\bar{p}_1\cdot p_2) + 2(\bar{p}_1\cdot\bar{p}_2)(p_2\cdot p_1) + 2(\bar{p}_1\cdot p_1)((\bar{p}_2\cdot p_2).$$

Výpočet třetího sčítance: Při výpočtu využijeme vztahy (tyto si dokažte jako cvičení)

$$\begin{aligned}
\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\kappa\gamma_\mu &= -2\gamma^\kappa\gamma^\beta\gamma^\alpha\\
\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma_\mu &= 4g^{\alpha\beta}\\
\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma_\mu &= -2\gamma^\alpha\\
\gamma^\mu\gamma_\mu &= 4.
\end{aligned}$$

Spočtěme tedy z třetího sčítance napřed $\star$

$$\mathrm{Tr}\left[(\bar{p}_{2,\alpha}\gamma^\alpha + m)\underbrace{\gamma^\mu(p_{2,\beta}\gamma^\beta + m)\gamma^\nu(\bar{p}_{1,\kappa}\gamma^\kappa + m)\gamma_\mu}_{\star}(p_{1,\lambda}\gamma^\lambda + m)\gamma_\nu\right],$$

$$\begin{aligned}
\star = {}& \gamma^\mu\gamma^\beta\gamma^\nu\gamma^\kappa\gamma_\mu p_{2,\beta}\bar{p}_{1,\kappa} + \gamma^\mu\gamma^\beta\gamma^\nu\gamma_\mu m p_{2,\beta} + \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\kappa\gamma_\mu m\bar{p}_{1,\kappa} + \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\mu m^2 =\\
&= -2\gamma^\kappa\gamma^\nu\gamma^\beta p_{2,\beta}\bar{p}_{1,\kappa} + 4g^{\beta\nu}m p_{2,\beta} + 4g^{\nu\kappa}m\bar{p}_{1,\kappa} - 2\gamma^\nu m^2.
\end{aligned}$$

Máme tedy

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\left[(\bar p_{2,\alpha}\gamma^\alpha + m)\left(-2\gamma^\kappa\gamma^\nu\gamma^\beta p_{2,\beta}\bar p_{1,\kappa} + 4g^{\beta\nu} m p_{2,\beta} + 4g^{\nu\kappa} m \bar p_{1,\kappa} - 2\gamma^\nu m^2\right)(p_{1,\lambda}\gamma^\lambda + m)\gamma_\nu\right] = \\ = \mathrm{Tr}\left\{(\bar p_{2,\alpha}\gamma^\alpha + m)\left[-2p_{1,\beta}\bar p_{1,\kappa}p_{1,\lambda}\gamma^\kappa\gamma^\nu\gamma^\beta\gamma^\lambda\gamma_\nu - 2m p_{2,\beta}\bar p_{1,\kappa}\gamma^\kappa\gamma^\nu\gamma^\beta\gamma_\nu + \right.\right. \\ \left.\left. + \left(4g^{\beta\nu}m^2 p_{2,\beta} + 4g^{\nu\kappa}m^2\bar p_{1,\kappa}\right)\left(p_{1,\lambda}\gamma^\lambda + m\right)\gamma_\nu - 2m^2 p_{1,\lambda}\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma_\nu - 2m^3\gamma^\nu\gamma_\nu\right]\right\} = \\ = -32(\bar p_2\cdot\bar p_1)(p_2\cdot p_1) + 16m^2\left[(p_2\cdot\bar p_2) + (p_2\cdot\bar p_2) + (p_1\cdot\bar p_2) + (p_2\cdot\bar p_1) + (p_1\cdot\bar p_1) + (\bar p_1\cdot\bar p_2)\right] - 32m^4.\end{aligned}$$

Čtvrtý sčítanec opět analogicky

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tr}\left[(\bar{\not p}_1 + m)\gamma^\mu(\not p_2 + m)\gamma^\nu(\bar{\not p}_2 + m)\gamma_\mu(\not p_1 + m)\gamma_\nu\right] = \\ &\quad = -32(\bar p_1\cdot\bar p_2)(p_2\cdot p_1) + 16m^2\left[(p_2\cdot\bar p_1) + (p_2\cdot\bar p_1) + (p_1\cdot\bar p_1) + \right. \\ &\qquad\qquad \left. + (p_2\cdot\bar p_2) + (p_1\cdot\bar p_2) + (\bar p_2\cdot\bar p_1)\right] - 32m^4.\end{aligned}$$

4. Vyjádření pomocí Mandelstamových proměnných. Z definičních vztahů dostáváme pro různé skalární součiny hybností

$$\begin{aligned} 2(p_1\cdot p_2) &= s - 2m^2 & 2(\bar p_1\cdot\bar p_2) &= s - 2m^2 \\ 2(p_1\cdot\bar p_1) &= 2m^2 - t & 2(p_2\cdot\bar p_2) &= 2m^2 - t \\ 2(p_1\cdot\bar p_2) &= 2m^2 - u & 2(p_2\cdot\bar p_1) &= 2m^2 - u. \end{aligned}$$

V prvním sčítanci v $|M|^2$ dostávám

$$\begin{aligned}&\frac{1}{16t^2}\,\mathrm{Tr}\left[(\bar{\not p}_2 + m)\gamma^\mu(\not p_2 + m)\gamma^\nu\right]\mathrm{Tr}\left[(\bar{\not p}_1 + m)\gamma_\mu(\not p_1 + m)\gamma_\nu\right] = \\ &= \frac{1}{t^2}\left[4m^4 - m^2(2m^2 - t) - m^2(2m^2 - t) + \tfrac{1}{2}(s - 2m^2)^2 + \tfrac{1}{2}(2m^2 - u)^2\right] = \\ &\qquad\qquad = \frac{1}{t^2}\left[\frac{s^2 + u^2}{2} + m^2(t - m^2)\right] =: F(s,t,u).\end{aligned}$$

Druhý sčítanec je potom ze symetrie roven $F(s,u,t)$. Pro třetí sčítanec dostáváme po dosazení

$$-\frac{1}{16tu}\,\mathrm{Tr}\left[(\bar{p}_{2,\alpha}\gamma^\alpha+m)\underbrace{\gamma^\mu(p_{2,\beta}\gamma^\beta+m)\gamma^\nu(\bar{p}_{1,\kappa}\gamma^\kappa+m)\gamma_\mu}_{\star}(p_{1,\lambda}\gamma^\lambda+m)\gamma_\nu\right]=$$

$$=\frac{1}{tu}\left[\frac{(s-2m^2)^2}{2}-\frac{m^2}{2}(s-2m^2+2m^2-t+2m^2-u+\right.$$

$$\left.+2m^2-u+2m^2-t+s-2m^2)+2m^4\right]=$$

$$=\frac{2}{tu}\left(\frac{s}{2}-m^2\right)\left(\frac{s}{2}-3m^2\right)=:G(s,t,u).$$

Čtvrtý a poslední sčítanec dostaneme jako $G(s,u,t)$ (dokonce je $G(s,u,t)=G(s,t,u)$).

5. Diferenciální účinný průřez. Dále pomocí pravděpodobnosti spočteme diferenciální účinný průřez, vyjádřený pomocí Mandelstamových proměnných s, t a u

$$\mathrm{d}\sigma=\frac{|M|^2\mathrm{d}t}{16\pi s(s-4m^2)}.$$

Po dosazení spočteného $|M|^2$ dostáváme

$$\mathrm{d}\sigma=\frac{4\pi e^2\mathrm{d}t}{s(s-4m^2)}\left\{\frac{1}{t^2}\left[\frac{s^2+u^2}{2}+4m^2(t-m^2)\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{u^2}\left[\frac{s^2+t^2}{2}+4m^2(u-m^2)\right]+\frac{4}{tu}\left(\frac{s}{2}-m^2\right)\left(\frac{s}{2}-3m^2\right)\right\}.$$

6. Výpočet $\mathrm{d}\sigma$ v těžišťovém systému. Zde platí $p_1=(\epsilon,\boldsymbol{p})$, $p_2=(\epsilon,-\boldsymbol{p})$, $\bar{p}_1=(\epsilon',\boldsymbol{p}')$, $\bar{p}_2=(\epsilon',-\boldsymbol{p}')$, přičemž ze zákona zachování energie plyne $\epsilon=\epsilon'$ a tedy kvůli $\epsilon^2=\boldsymbol{p}^2+m^2$ také $|\boldsymbol{p}|=|\boldsymbol{p}'|$. Odtud dostáváme

$$s=(p_1+p_2)^2=4\epsilon^2$$

$$t=(p_1-\bar{p}_1)^2=-\boldsymbol{p}^2-\boldsymbol{p}'^2+2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{p}'|\cos\theta=-2\boldsymbol{p}^2(1-\cos\theta)=-4\boldsymbol{p}^2\sin^2\theta$$

$$u=(p_1-\bar{p}_1)^2=-\boldsymbol{p}^2-\boldsymbol{p}'^2+2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{p}'|\cos\theta=-2\boldsymbol{p}^2(1+\cos\theta)=-4\boldsymbol{p}^2\cos^2\theta.$$

Označme

$$K = \frac{(\epsilon^2 + \boldsymbol{p}^2)^2}{\boldsymbol{p}^4}.$$

Potom výraz pro diferenciální účinný průřez lze upravit na

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{e^4}{4\epsilon^2}\left[\left(\frac{4}{\sin^4\theta} - \frac{3}{\sin^2\theta}\right)K + 1 + \frac{4}{\sin^2\theta}\right]\mathrm{d}\Omega,$$

kde $\mathrm{d}\Omega = 2\pi\sin\theta\mathrm{d}\theta$ je element prostorového úhlu.

7. Nerelativistický a ultrarelativistický případ. V nerelativistickém případě platí $|\boldsymbol{p}| \ll m$. Výraz pro diferenciální účinný průřez lze napsat jako

$$a\frac{K^2}{\epsilon} + b\frac{1}{\epsilon^2} = a\left(\frac{\epsilon}{\boldsymbol{p}^2} + 1\right)^2 + b\frac{1}{\boldsymbol{p}^2 + m^2} = a\frac{(1 + 2\frac{\boldsymbol{p}^2}{m^2})^2}{\frac{\boldsymbol{p}^2}{m^2}\left(1 + \frac{\boldsymbol{p}^2}{m^2}\right)} + b\frac{1}{m^2\frac{\boldsymbol{p}^2}{m^2}} \approx$$

$$\approx a\frac{m^4}{\boldsymbol{p}^4} = \frac{e^4(1 + 3\cos^2\theta)\mathrm{d}\Omega}{16E^2\sin^4\theta},$$

kde $E = \boldsymbol{p}^2/2m$.

Naopak v ultrarelativistickém případě platí $|\boldsymbol{p}| \gg m$. A dostáváme celkem

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{e^4 m^2(\sin^2\theta - 4)^2\mathrm{d}\Omega}{4\boldsymbol{p}^2\sin^4\theta}.$$