# Příklady z komplexní analýzy

Michael Krbek

4. ledna 2002

Je použito standardní označení funkcí komplexní proměnné

$$w = w(z) = u(z) + \mathrm{i}\, v(z)\,,$$

kde $z = x + \mathrm{i}\, y$ a tedy $u = u(x, y)$ a $v = v(x, y)$, popř. v polárních souřadnicích

$$w = \rho(z)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, \theta(z)}\,,$$

kde $z = r\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, \varphi}$ a tedy $\rho = \rho(r, \varphi)$ a $\theta = \theta(r, \varphi)$.

# 1. Posloupnosti a řady

**Příklad 1.1:** Najděte následující součty

$$1 + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx \,,$$
$$\sin x + \sin 3x + \ldots + \sin(2n-1)x \,,$$
$$\sin x - \sin 2x + \ldots + (-1)^{n-1} \sin nx \,,$$
$$\cos\alpha + \cos(\alpha+\beta) + \ldots + \cos(\alpha + n\beta) \,.$$

**Příklad 1.2:** Najděte poloměr konvergence řad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n \,, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \cos \mathrm{i}\, n\, z^n \,, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (n + a^n) z^n \,.$$

**Příklad 1.3:** Sečtěte řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{n} \,, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(1-z^n)(1-z^{n+1})} \,.$$

**Příklad 1.4:** Vyšetřete chování řady na hranici kruhu konvergence

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{pn}}{n} \,, \quad p \in \mathbb{N} \,.$$



Michael Krbek
WWW

# 2. Funkce komplexní proměnné

## 2.1. Elementární funkce

Podle definice je $\ln z = \ln r + \mathrm{i}\,\phi + 2\pi\,\mathrm{i}\,k$, kde $k \in \mathbb{Z}$ a $\operatorname{Ln} z = \ln r + i\phi$ je *hlavní hodnota*.

**Příklad 2.1:** Určete

$$\ln 4\,, \quad \ln(-1)\,, \quad \operatorname{Ln}(-1)\,, \quad \ln \mathrm{i}\,, \quad \operatorname{Ln} \mathrm{i}\ .$$

**Příklad 2.2:** Najděte chybu v odvození (Bernoulliho paradox)

$$(-z)^2 = z^2\,, \quad 2\ln(-z) = 2\ln z\,, \quad \ln(-z) = \ln z\,.$$

**Příklad 2.3:** Dokažte následující rovnosti (berou se všechny hodnoty odmocnin):

$$\begin{aligned}
\arccos z &= -\,\mathrm{i}\ln(z + \sqrt{z^2-1})\,,\\
\arcsin z &= -\,\mathrm{i}\ln \mathrm{i}(z + \sqrt{z^2-1})\,,\\
\operatorname{arc\,tg} z &= \frac{\mathrm{i}}{2}\ln\frac{\mathrm{i}+z}{\mathrm{i}-z}\,.
\end{aligned}$$



Michael Krbek
WWW

## 2.2. Komplexní funkce reálné a komplexní proměnné

**Příklad 2.4:** Určete křivky dané rovnicemi

$$
\begin{aligned}
&z = t + \mathrm{i}\,t^2\,, && -\infty < t < \infty\,,\\
&z = t + \frac{\mathrm{i}}{t}\,, && -\infty < t < 0\,,\\
&z = \mathrm{i}\,a + at - ib\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t}\,, && 0 \le t \le 2\pi\,, \qquad a > 0\,, \quad b > 0\,.
\end{aligned}
$$

**Příklad 2.5:** Pro funkci $w = 1/z$ najděte obrazy a vzory křivek $x = C$, $y = C$ a $|z| = R$.

**Příklad 2.6:** Určete obraz jednotkové kružnice $|z| = 1$ zobrazením

$$w = \frac{z}{1 - z^2}\,.$$

**Příklad 2.7:** Jsou funkce

$$\frac{1}{1 - z}\,, \qquad \frac{1}{1 + z^2}$$

spojité (resp. stejnoměrně spojité) uvnitř jednotkového kruhu $|z| < 1$?

## 2.3. Regulární a harmonické funkce

**Příklad 2.8:** Níže je zadána reálná část analytické funkce. Použijte Cauchy–Riemannovy podmínky a určete tvar komplexní funkce.

$$\sin x \cosh y\,, \quad \ln(x^2 + y^2) - x^2 + y^2\,, \quad \mathrm{e}^{y^2 - x^2} \cos xy\,, \quad \frac{x}{x^2 + y^2}\,.$$

FKP

Michael Krbek
WWW

**Příklad 2.9:** Ukažte existenci analytické funkce jejíž modul $\rho$ nebo argument $\theta$ je zadán níže ($(r,\varphi)$ jsou polární souřadnice).

$$\rho = (x^2 + y^2)\,\mathrm{e}^x\,, \quad \rho = \mathrm{e}^{r^2 \cos 2\varphi}\,, \quad \theta = xy\,, \quad \theta = \varphi + r \sin\phi\,.$$

**Příklad 2.10:** Ukažte, že reálná a imaginární část analytické funkce splňuje Laplaceovu rovnici. Ukažte, že reálná část tzv. *Žukovského funkce*

$$-E\left(z - \frac{a^2}{z}\right)$$

je elektrostatickým potenciálem uzemněného vodivého nekonečného válce o poloměru $a$ se středem v počátku souřadnic, který je umístěn ve vnějším homogenním elektrickém poli o intenzitě $E$ orientované v kladném směru osy $x$.



Michael Krbek
WWW

# 3. Taylorova řada, Cauchyův vzorec, výpočty integrálů

**Příklad 3.1:** Určete Taylorovu řadu v bodě 0 a poloměr konvergence následujících funkcí:

$$\frac{\sin^2 z}{z^2}\,, \quad \ln(z^2 - 3z + 2)\,, \quad \int_0^z \frac{sinw}{w}\,\mathrm{d}\,w\,.$$

**Příklad 3.2:** Dokažte, že koeficienty $c_n$ rozvoje

$$\frac{1}{1 - z - z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

splňují pro $n \geq 2$ vztahy $c_n = c_{n-1} + c_{n-2}$ (tzv. *Fibonacciho čísla*).

**Příklad 3.3:** Ověřte, že funkce $f(z) = \mathrm{Ln}\, z$ (hlavní hodnota) je holomorfní pro $\Re z > 0$ a lze ji tam vyjádřit jako

$$\mathrm{Ln}\, z = \int_1^z \frac{\mathrm{d}\, w}{w}\,.$$

**Příklad 3.4:** Vypočtěte

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{z}{z^*} dz\,,$$

kde křivka $\mathcal{C}$ je dána jako kladně orientovaná hranice oblasti, která je dána průnikem horní poloroviny Gaussovy roviny a mezikruží s vnitřním poloměrem $r$, vnějším poloměrem $R$ a středem v počátku souřadnicového systému.



Michael Krbek
WWW

**Příklad 3.5:** Vypočtěte integrál

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{\mathrm{e}^z}{z(z+2)}\,\mathrm{d}\,z\,,$$

kde uzavřená křivka $\mathcal{C}$ je kladně orientovaná jednotková kružnice.

**Příklad 3.6:** Nechť $n, k \in \mathbb{N}$ a $r > 0$. Pro křivku

$$\mathcal{C} : t \mapsto \begin{cases} r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t} & \text{pro} \quad 0 \le t \le 2n\pi \\ \frac{r}{2}\left(1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t}\right) & \text{pro} \quad 2n\pi \le t \le 2(n+k)\pi \end{cases}$$

vypočítejte index bodu $\mathrm{ind}_{\mathcal{C}}\, r/2$.



Michael Krbek
WWW

# 4. Klasifikace singularit, Laurentova řada

## 4.1. Klasifikace singularit

**Příklad 4.1:** Klasifikujte singularity následujících funkcí $z$:

$$z^2 \sin \frac{z}{z+1}\,, \quad \mathrm{e}^{\operatorname{cotg} \frac{\pi}{z}}\,, \quad \frac{z^2-1}{z^3-z^2+z-1}\,, \quad \frac{1}{z^2-1} \cos \frac{\pi z}{z+1}\,.$$

## 4.2. Laurentova řada

V následujících příkladech rozviňte funkci $f(z)$ do Laurentovy řady se středem v bodě $z_0$:

**Příklad 4.2:**

$$f(z) = \frac{2z^2-6z-2\,\mathrm{i}}{z(z-\mathrm{i})(z+2)}\,, \quad z_0 = 0\,.$$

**Příklad 4.3:**

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)}\,, \quad z_0 = \mathrm{i}\,.$$

**Příklad 4.4:**

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)^k}\,, \quad k \in \mathbb{N}\,, \quad z_0 = 0\,.$$

**Příklad 4.5:**

$$f(z) = z^2\,\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}\,, \quad z_0 = 0\,.$$



Michael Krbek
WWW

**Příklad 4.6:**

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)^2}\,, \qquad z_0 = 1\,.$$

**Příklad 4.7:**

$$f(z) = \mathrm{Ln}\left(\frac{z-a}{z-b}\right)\,, \qquad z_0 = 0\,.$$

FKP

Michael Krbek
WWW

# 5. Reziduová věta a její důsledky, výpočty integrálů

**Příklad 5.1:** Najděte póly následujících funkcí a spočtěte reziduum v každém pólu:

$$\frac{z+1}{z^2}\,, \quad \frac{\mathrm{e}^{-z}}{z^4}\,, \quad \frac{\sin^2 z}{z^6}\,, \quad \operatorname{cotg} z\,.$$

V následujících příkladech spočtěte integrály

**Příklad 5.2:**

$$\int_{|z|=2} \frac{\mathrm{d}\,z}{(z-3)(z^5-1)}\,,$$

kde po křivce obíháme jednou v kladném smyslu.

**Příklad 5.3:**

$$\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_{\mathcal{C}} \frac{\mathrm{d}\,z}{\sqrt{z^2+z+1}}\,,$$

kde $\mathcal{C}$ je kružnice $|z| = r$ obíhaná jednou v kladném směru.

**Příklad 5.4:**

$$\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_{\mathcal{C}} \frac{\mathrm{d}\,z}{(z^4+1)\sqrt{z^2+1}}\,,$$

kde $\mathcal{C}$ je parabola $y^2 = x$ v komplexní rovině, která je procházena ve směru rostoucího $y$.



Michael Krbek
WWW

V následujících příkladech spočtěte určité integrály. Jedná-li se o integrál nevlastní a divergující, určete jeho hlavní hodnotu (pokud tato existuje).

**Příklad 5.5:**

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\,t}{a + \cos t}\,, \quad a > 1\,.$$

**Příklad 5.6:**

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,\mathrm{d}\,x}{(x^2 + 4x + 13)^2}\,.$$

**Příklad 5.7:**

$$\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}\,x}{(x^2 + 1)^n}\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

**Příklad 5.8:**

$$\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}\,x}{1 + x^n}\,, \quad n \geq 2\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

**Příklad 5.9:**

$$\int_0^{\pi} \mathrm{cotg}(x - a)\,\mathrm{d}\,x\,,$$

kde $a = \alpha + \mathrm{i}\,\beta$.

**Příklad 5.10:**

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\,x}{1 - 2p\cos x + p^2}\,,$$

kde $0 < p < 1$.

FKP

Michael Krbek
WWW

**Příklad 5.11:**

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x \, \mathrm{d}\, x}{(x^2+4)(x-1)} \,.$$

**Příklad 5.12:** Spočtěte

$$\int_0^{\infty} x^{p-1} \cos ax \, \mathrm{d}\, x \,, \quad a > 0 \,, \quad 0 < p < 1$$

a

$$\int_0^{\infty} x^{p-1} \sin ax \, \mathrm{d}\, x \,, \quad a > 0 \,, \quad -1 < p < 1 \,.$$

Pomůcka: Integrujte $\int_{\mathcal{C}} z^{p-1} \, \mathrm{e}^{-az} \, \mathrm{d}\, z$, kde $\mathcal{C}$ je uzavřená křivka v prvním kvadrantu komplexní roviny ohraničená kružnicemi o poloměrech $r \to 0$ a $R \to \infty$.

**Příklad 5.13:**

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x \, \mathrm{d}\, x}{x^2 + a^2} \,, \quad a > 0 \,.$$

**Příklad 5.14:** Nechť $f(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, mz} \, F(z)$, kde $m > 0$ a funkce $F(z)$ nechť má následující vlastnosti:

- má konečný počet singulárních bodů $a_1, \ldots, a_n$ v horní polorovině komplexní roviny
- je analytická ve všech bodech na reálné ose s vyjímkou bodů $x_1, \ldots, x_m$, kde má jednoduché póly



Michael Krbek
WWW

- $\lim\limits_{\substack{z \to \infty \\ \Im z \geq 0}} F(z) = 0.$

Dokažte, že

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}\,x = 2\pi\,\mathrm{i}\left\{\sum_{k=1}^{n} \mathrm{res}_{a_k} f(z) + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{m} \mathrm{res}_{x_l} f(z)\right\},$$

kde integrál bereme ve smyslu hlavní hodnoty jak vzhledem k pólům $x_l$, $l = 1, \ldots, m$, tak vzhledem k $\infty$.

**Příklad 5.15:**

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2\,\mathrm{d}\,x}{(x^2+a^2)^2}, \quad a > 0\,.$$

**Příklad 5.16:**

$$\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}\,x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}, \quad a, b > 0\,.$$

**Příklad 5.17:**

$$\int_0^{\infty} \frac{(x^2+1)\,\mathrm{d}\,x}{x^6+1}\,.$$

**Příklad 5.18:**

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos ax\,\mathrm{d}\,x}{x^2+b^2}, \quad a, b > 0\,.$$



Michael Krbek
WWW

**Příklad 5.19:**

$$\int_0^\infty \frac{x \sin ax \,\mathrm{d}\, x}{x^2 + b^2}\,, \qquad a, b > 0\,.$$

**Příklad 5.20:**

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos tx \,\mathrm{d}\, x}{1 + x^3}\,, \qquad t \in \mathbb{R}\,.$$

**Příklad 5.21:**

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x \,\mathrm{d}\, x}{x^2}\,.$$

**Příklad 5.22:**

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{x \sin x \,\mathrm{d}\, x}{x^2 - 2x + 10}\,.$$

**Příklad 5.23:**

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax \,\mathrm{d}\, x}{x(x^2 + b^2)^2}\,, \qquad a, b > 0\,.$$

**Příklad 5.24:**

$$\int_0^1 \ln\left(\frac{1}{x} - x\right) \frac{\mathrm{d}\, x}{1 + x^2}\,.$$

**Příklad 5.25:**

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\, x}{(x + a)(\ln^2 x + \pi^2)}\,, \qquad a > 0\,.$$



Michael Krbek

# 6. Laplaceova transformace

**Příklad 6.1:** Najděte inverzní Laplaceovu transformaci funkcí

$$\frac{1}{z-\alpha}\,, \qquad \frac{1}{z^n}\,, \qquad \frac{z}{z^2-\alpha^2}\,, \qquad \frac{z}{z^2+\alpha^2}\,,$$

kde $n \in \mathbb{N}$ a $\alpha \in \mathbb{R}$.

**Příklad 6.2:** Využitím Laplaceovy transformace řešte diferenciální rovnici

$$y' + y = \mathrm{e}^{-t} + \sin t$$

s počáteční podmínkou $y(0_+) = 1$.

**Příklad 6.3:** Využitím Laplaceovy transformace řešte soustavu diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' + x + y &= f(t) \\ y' - 3x + y &= 0\,, \end{aligned}$$

kde

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t < 1 \\ \mathrm{e}^{-t} & \text{pro } t \geq 1 \end{cases}$$

a počátečními podmínkami $x(0_+) = 0$ a $y(0_+) = 0$.



Michael Krbek
WWW