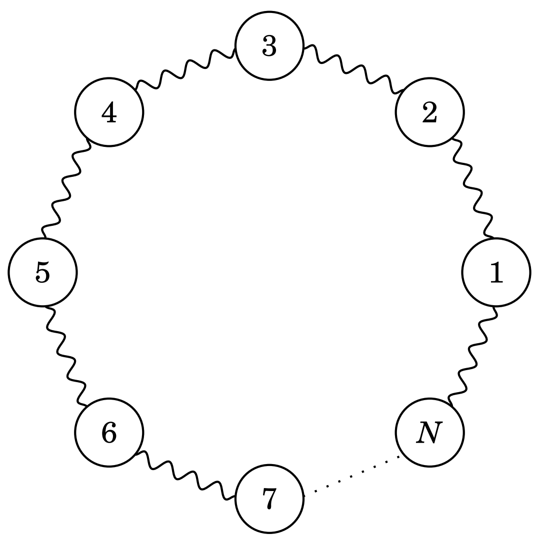
1. Pokyny pro vypracování

Zvolený příklad z druhé kapitoly vypracujte písemně (nejlépe vysázejte pomocí LaTeXu) a dodejte osobně po předchozí domluvě mailem na `krbek@physics.muni.cz`. Dále si vyberte tři z jednodušších úloh v třetí kapitole a rovněž je vypracujte. Řešení budeme následně diskutovat. Pokud bude řešení správné a úplné, bude Vám udělen zápočet. Žádní dva studenti nemohou řešit stejný příklad, proto se mezi sebou musíte domluvit.

2. Příklady na udělení zápočtu z variačního počtu

2.1. Soustava harmonických oscilátorů, její symetrie a přechod od této soustavy ke spojité struně. Uvažujme soustavu N harmonických oscilátorů: každý o hmotnosti m, jež jsou spojeny N pružinami o tuhosti k, tak, že j-tý oscilátor je spojen s $(j+1)$-ním, $j \in \{1,\ldots,N-1\}$ a N-tý opět s prvním (viz obrázek 1).



Obrázek 1: Konfigurace soustavy harmonických oscilátorů

(a) Napište lagrangián a akci pro tuto soustavu oscilátorů a napište rovněž příslušné pohybové rovnice. Využijte maticový zápis soustavy rovnic,

$$\ddot{u} = -\omega^2 A u, \tag{1}$$

kde $\omega^2 = k/m$ a u je vektor výchylek oscilátorů, A je jistá $N \times N$ matice. Můžete využít maticového zápisu i pro potenciální a kinetickou energii soustavy.

(b) Vyřešte soustavu rovnic pro $N = 4$.

(c) Uvažte symetrii soustavy oscilátorů vzhledem k otočení, které přesune první oscilátor do druhého, j-tý do $(j+1)$-ního a N-tý do prvního. Tuto symetrii vyjádřete maticí S.

(d) Skutečnost, že S je symetrií soustavy oscilátorů znamená, že je rovněž symetrií soustavy rovnic (1) a tedy platí, že rovnice

$$S\ddot{u} = -\omega^2 A\, S u \tag{2}$$

je stejná jako rovnice (1). Z toho plyne $SA = AS$. Ověřte to přímo.

(e) Matice S a A komutují, mají tedy shodné systémy vlastních vektorů. Nalezněte vlastní hodnoty a vektory S a tím i vlastní vektory A. Uvědomte si, že $S^N = 1_N$ (jednotková matice).

(f) Ukažte, že vlastní hodnoty A jsou

$$\lambda_k = 2\left(1 - \cos\frac{2\pi k}{N}\right). \tag{3}$$

(g) Proveďte přechod $N \to \infty$ od součtů k integraci přes úhlovou souřadnici φ pro akci z (a) a získejte tím Lagrangeovu hustotu.

(h) Odvoďte a obecně řešte pohybové rovnice pro získanou Lagrangeovu hustotu.

(i) Jaký operátor v tomto spojitém případě odpovídá operátoru S a jaký zákon zachování mu odpovídá?

2.2. Minimální plochy v $\mathbb{R}^3$**.** Minimální plocha je plocha s okrajem, jejíž každý bod mimo hranici má okolí, které má minimální možnou plochu vzhledem k dané hranici tohoto okolí.

(a) Zformulujte předchozí zadání jako variační úlohu pro jistý variační funkcionál pro funkci $f(x,y)$, jež popisuje plochu.

(b) Spočtěte Euler–Lagrangeovy rovnice příslušné tomuto funkcionálu a tím i nutnou podmínku pro minimální plochu.

(c) Nalezněte minimální plochu ve speciálním případě, kdy se jedná o plochu vzniklou rotací křivky kolem jisté osy.

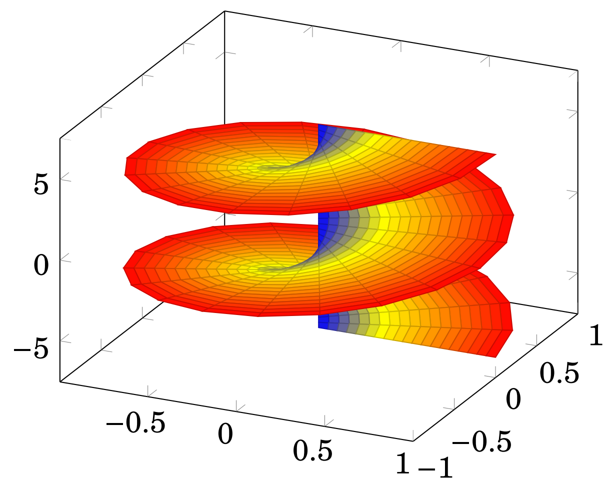
(d) Formulujte a řešte úlohu rovněž pro případ, kdy je plocha zadána parametricky jako $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.

(e) Dokažte, že helikoida (viz obrázek 2) je minimální plochou. Parametrické vyjádření helikoidy (tj. její vložení do $\mathbb{R}^3$) je dáno

$$F: \quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \tag{4}$$

$$\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos a\varphi \\ r\sin a\varphi \\ \varphi \end{pmatrix}, \tag{5}$$

kde $a \in \mathbb{R}$ je parametr.



Obrázek 2: Závit helikoidy s parametrem $a = 1$

(f) Ukažte, že Euler-Lagrangeovy rovnice z části (d) jsou ekvivalentní požadavku, aby tzv. střední křivost H byla nulová. Střední křivost je aritmetickým průměrem obou hlavních křivostí, tedy

$$H = \tfrac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2). \tag{6}$$

O střední křivosti se více dovíte na `http://en.wikipedia.org/wiki/Mean_curvature`, o hlavních křivostech potom na `http://en.wikipedia.org/wiki/Principal_curvature`.

2.3. Hamiltonián z lagrangiánu řešením variačního problému s vazbou. Mějme klasický variační problém, tj. hledáme minimum funkcionálu

$$\min_u \int_a^b L(x,u,u')\,\mathrm{d}x. \tag{7}$$

(a) Ukažte, že výše uvedenou minimalizaci (7) lze ekvivalentně popsat jako variační problém hledání minima
$$\min_{u,v} \int_a^b L(x,u,v)\,\mathrm{d}x \tag{8}$$
doplněného podmínkou $u'(x) = v(x)$.

(b) Tento problém řešte metodou Lagrangeových multiplikátorů, viz.

`http://en.wikipedia.org/wiki/Lagrange_multiplier`

adaptovanou pro variační počet. Lagrangeův multiplikátor označíme $p(x)$. Hledáme tedy
$$\min_{u,v} \max_{p} \int_a^b \left[L(x,u,v) - p(u' - v)\right] \mathrm{d}x. \tag{9}$$

(c) Předchozí výraz upravte užitím metody per partes na integrand $pu'\,\mathrm{d}x$, dále užijte max-min nerovnost `http://en.wikipedia.org/wiki/Max-min_inequality`

(d) Pro nově vzniklý funkcionál napište první variaci. (lagrangián nezávisí na u' ani v'). Získejte p a p' jako funkce u a v.

(e) Z funkcionálu vyloučete funkce p a p'. Co získáme?

(f) Vyloučete funkce u a v. Získáme tzv. duální variační problém vzniklý Legendreovou transformací.

(g) Vyloučete v a p'. Získáme Hamiltonovu formulaci variačního problému.

(h) Předchozí proveďte konkrétně pro lagrangiány příslušné harmonickému oscilátoru a také pohybu částice v homogenním poli.

(i) Na příkladech z (h) ověřte, že Legendreova transformace je involutivní (tj. její aplikace dvakrát po sobě je identita).

2.4. Vlastnosti extremality pro vlastní hodnoty operátorů. Uvažte problém vlastních hodnot pro Laplaceův operátor na "dostatečně regulární" oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ s Dirichletovými okrajovými podmínkami, tj.
$$-\Delta u = \lambda u, \quad u = 0 \text{ na } \partial\Omega. \tag{10}$$

(a) Ukažte, že nejmenší vlastní hodnota λ_1 je kladná, má násobnost rovnu jedné a že k ní příslušná vlastní funkce u_1 nemá na Ω nulové body.

(b) Označme $\mathscr{O}$ množinu všech "dostatečně regulárních" oblastí v $\mathbb{R}^2$. Uvažujte variační problém

$$\min_{\Omega\in\mathscr{O}} \lambda_1(\Omega), \quad \mu(\Omega) = A, \tag{11}$$

kde μ je Jordanova míra a $\mu(\Omega)$ je tedy plocha oblasti Ω, $A > 0$. Ukažte, že minimy tohoto variačního problému jsou kruhy o ploše A a řešení je až na translaci určeno jednoznačně.

2.5. Variační funkcionál k zobecněné Poissonově rovnici. Uvažujte variační funkcionál

$$\int_\Omega [\langle K(\nabla u), \nabla u\rangle - f u]\,\mathrm{d}x \tag{12}$$

pro dostatečně hladkou funkci

$$u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \tag{13}$$
$$x \mapsto u(x) \tag{14}$$

na regulární oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Ve funkcionálu (12) je dále K v každém bodě x oblasti Ω lineární, symetrický a pozitivní operátor, (K je zadáno jako $n \times n$ matice funkcí na Ω), ∇ je gradient, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ značí skalární součin a f je zadaná funkce.

(a) Odvoďte Eulerovu–Lagrangeovu rovnici pro výše uvedený funkcionál (12).

(b) Jakou volbou K a f dostaneme standardní Poissonovu rovnici?

(c) Jaký je fyzikální význam K a f?

(d) Uvažte rovinný problém, tedy $n = 2$, a polární souřadnice. Dále vezměte K diagonální a závisející pouze na polární souřadnici r. Napište a obecně řešte Lagrangeovy rovnice pro tento případ. Objasněte zase fyzikální význam rovnice.

(e) Diskutujte jednoznačnost Dirichletovy úlohy pro rovnici z (a). Dirichletova úloha je rovnice (a) doplněná okrajovou podmínku $u = 0$ na $\partial\Omega$.

2.6. Geodetické křivky na válci. Uvažujte nekonečný válec o poloměru R, jehož osou je osa z.

(a) Spočtěte element délky oblouku ve válcových souřadnicích φ a z.

(b) Napište vztah pro délku křivky zadané ve válcových souřadnicích, nalezněte a řešte Euler-Lagrangeovy rovnice.

(c) Je řešení úlohy (b) jednoznačné? Formulujte podmínku pro minimum.

(d) Stejnou úlohu řešte v kartézských souřadnicích s vazební podmínkou $x^2 + y^2 = R^2$ pomocí metody Lagrangeových multiplikátorů.

3. Jednodušší úlohy k zápočtu

Příklady jsou vesměs vybrány z doporučené učebnice Gelfand, Fomin: Calculus of Variations.

3.1. Euler–Lagrangeovy rovnice a jejich řešení.

(1) Najděte a řešte Euler–Lagrangeovy rovnice pro funkcionál

$$\int_a^b \left(\tfrac{1}{2}m\dot{u}^2 - \tfrac{1}{2}ku^2 - Au\sin\Omega t\right) \mathrm{d}t$$

Na jakou fyzikální úlohu se předchozí funkcionál vztahuje?

(2) Najděte obecné řešení Euler–Lagrangeovy rovnice pro funkcionál

$$\int_a^b f(x)\sqrt{1+(y')^2}\,\mathrm{d}x.$$

(3) Najděte rovnovážnou polohu homogenního řetězu, jehož konce jsou upevněny na svislé stěně (obecně v různých výškách).

(4) Mezi všemi křivkami v rovině xy spojujícími bod $(0,b)$ na ose y s osou x a jež společně se souřadnicovými osami ohraničuje obsah S najděte takovou, jejíž rotací kolem osy x získáme rotační plochu, která má co nejmenší možný obsah.

3.2. Obecné vlastnosti funkcionálů.

(5) Najděte Hamiltonovy rovnice pro extremály funkcionálu

$$\int_a^b \sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1+(y')^2}\,\mathrm{d}x$$

a pomocí nich určete první integrál pro Eulerovy–Lagrangeovy rovnice.

(6) Spočtěte druhou variaci funkcionálu $\exp(S[u])$, kde $S[u]$ je dvakrát diferencovatelný funkcionál.

(7) Dokažte, že u funkcionálu typu

$$\int_a^b L(t,\dot{x})\,\mathrm{d}t$$

se nevyskytují sdružené body.

3.3. Variační úlohy pro vícerozměrné oblasti, zákony zachování.

(8) Najděte extremály níže zadaného funkcionálu na oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n.$$

(9) Odvoďte Euler–Lagrangeovy rovnice pro Lagrangeovu hustotu

$$\mathscr{L} = \sum_{i=0}^3 h_i \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} - eA_i\right)^2 + m^2u^2 + \sum_{i=0}^3 h_i h_j \left(\frac{\partial A_i}{\partial x^j}\right)^2 + m\sum_{i=0}^3 h_i A_i^2,$$

kde pole jsou skalární u a čtyřvektorové (A_0, A_1, A_2, A_3). Dále $h_0 = 1$, $h_1 = h_2 = h_3 = -1$.

(10) Uvažujte Lagrangeovu hustotu z předchozí úlohy. Ukažte, že je invariantní vůči Lorentzovým transformacím (x_0, x_1, x_2, x_3).

(11) Odvoďte zákony zachování pro transformaci z předchozí úlohy.

3.4. Přibližné metody.

(12) Ritzova variační metoda (metoda konečných prvků): zvolme posloupnost funkcí $\{u_n\}$ splňující okrajové podmínky daného variačního problému. Potom můžeme uvažovat podprostory V_n prostoru přípustných funkcí generované lineárními kombinacemi typu $a_1u_1 + \cdots + a_nu_n$. Zjevně je V_n vektorovým podprostorem ve V_{n+1}. Variační funkcionál můžeme vyčíslit na takové lineární kombinaci a minimalizovat funkcionál pouze na V_n jako funkci n proměnných $a_1, \dots, a_n$. V příznivých případech pro $n \to \infty$ získáme řešení. Pro variační funkcionál

$$\int_0^1 \left(\tfrac{1}{2}\dot{u}^2 - \tfrac{1}{2}u^2 - 2tu\right) \mathrm{d}t$$

s okrajovými podmínkami $u(0) = u(1) = 0$ předchozí postup proveďte pro posloupnost $\{u_n\}$, kde

$$u_n = t^n(1-t).$$

Srovnejte s přesným řešením.

(13) Původní Eulerův přístup (metoda konečných diferencí): Uvažte variační úlohu např. pro funkcionál z předchozí úlohy (12) se stejnými okrajovými podmínkami. Interval $[0,1]$ rozdělíme na $n+1$ stejně dlouhých dílků, každý o šířce $\Delta t = 1/(n+1)$. Označme $t_k = k\Delta t$ a $u_k = u(t_k)$, $k \in \{0,\dots,n+1\}$. Potom $u_0 = u_{n+1} = 0$. Funkci $u(t)$ nahradíme lomenou čarou s vrcholy $(t_0,u_0),\dots,(t_{n+1},u_{n+1})$. Derivace $\dot{u}$ v bodě t_k aproximujeme např. konečnými dopřednými diferencemi $(u_{k+1}-u_k)/\Delta t$ a integrál aproximujeme patřičným Riemannovým součtem. Potom variační funkcionál můžeme aproximovat funkcí n proměnných $u_1,\dots,u_n$ a její extrémy hledat tradičními metodami z diferenciálního počtu více proměnných. Proveďte pro výše uvedený funkcionál!