ZÁPOČTOVÝ PŘÍKLAD 1

Diferenciálně geometrická formulace nelineárního $\mathrm{O}(N)$ σ**-modelu**

Radek Sláma

(a) Uvažujme hladké Riemannovy variety (Σ, g) a (M, h) a hladké zobrazení $F\colon \Sigma \to M$. Připomeňme, že $g \in \Gamma(S^2T^*\Sigma)$ a $h \in \Gamma(S^2T^*M)$ jsou pozitivně definitní. Potom pullback $F^*h \in \Gamma(S^2T^*\Sigma)$. Vždy můžeme získat $g^{-1} \in \Gamma(S^2T\Sigma)$ a vyčíslením g^{-1} na F^*h získat funkci $F^*h(g^{-1})$. Pomocí objemového elementu vol_g spojeného s Riemannovou metrikou g na Σ můžeme zkonstruovat integrál

$$I(F) = \frac{1}{2}\int_\Sigma F^*h(g^{-1})\mathrm{vol}_g\,.$$

Vyjádřete tento integrál pomocí lokálních souřadnicových map na Σ a M.

(b) Uvažme hladkou funkci $f \in C^\infty(\Sigma)$ a Riemannovu metriku $g' = \mathrm{e}^{2f}\,g$ na Σ. Zjistěte $\mathrm{vol}_{g'}$, $F^*h((g')^{-1})$. Kdy platí $F^*h(g^{-1})\mathrm{vol}_g = F^*h((g')^{-1})\mathrm{vol}_{g'}$?

(c) Zvolme $M = \mathrm{S}^{N-1}$ jako $(N-1)$-rozměrnou sféru, standardní vložení $\iota\colon Sf^{N-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ a standardní metriku $h = \iota^*k$, která je pullbackem kanonické metriky k na $\mathbb{R}^n$, v kanonických souřadnicích (r^i), $i \in \{1,\dots,N\}$ je tedy k dáno jako

$$k \;= \sum_{i=1}^{N}(\mathrm{d}r^i)^2.$$

Vyjádřete $I(F)$ v hypersférických souřadnicích na S^{N-1} (viz. např. `https://en.wikipedia.org/wiki/N-sphere#Spherical_coordinates`).

ZÁPOČTOVÝ PŘÍKLAD 2

Geodetické sférické normální souřadnice na sféře S^{N-1}

Michal Valentík

(a) Uvažujme S^{N-1} jako $(N-1)$-rozměrnou sféru, standardní vložení $\iota\colon Sf^{N-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ a standardní metriku $h = \iota^*k$, která je pullbackem kanonické metriky k na $\mathbb{R}^n$, v kanonických souřadnicích (r^i), $i \in \{1,\dots,N\}$ je tedy k dáno jako

$$k \;= \sum_{i=1}^{N}(\mathrm{d}r^i)^2.$$

Vyjádřete h v hypersférických souřadnicích na S^{N-1} (viz. např. `https://en.wikipedia.org/wiki/N-sphere#Spherical_coordinates`) pomocí ortonormálního korepéru, tj. duální ortonormální báze.

(b) Zvolte bod $p \in \mathrm{S}^{N-1}$ libovolně a uvažujme tečný vektor $\xi \in T_p\mathrm{S}^{N-1} \cong \mathbb{R}^{N-1}$. V tomto tečném prostoru uvažujme kulové souřadnice $(r, \theta^1, \dots, \theta^{N-2})$ pro vektor ξ. Vektoru ξ přiřadíme bod $q \in \mathrm{S}^{N-1}$ kam se z bodu p dostaneme po geodetice ve směru vektoru ξ v jednotkovém čase. Potom geodetické sférické normální souřadnice bodu q jsou $(r, \theta^1, \dots, \theta^{N-2})$.

(c) Vyjádřete metrické tenzorové pole h v geodetických sférických normálních souřadnicích.

(d) Vyjádřete Hodge-Laplaceův operátor v geodetických sférických normálních souřadnicích.

ZÁPOČTOVÝ PŘÍKLAD 3

Varieta všech orientovaných přímek v euklidovském prostoru

(a) Ukažte, že na množině orientovaných přímek v euklidovském prostoru $\mathbb{E}^3$ lze zavést hladkou strukturu.

(b) Dále ukažte, že tato varieta je izomorfní ke kotečnému prostoru ke sféře $\mathbb{S}^2$.

(c) Jak jsou reprezentovány body $\mathbb{E}^3$ v $T^*\mathbb{S}^2$?

(d) Na $T^*\mathbb{S}^2$ je kanonická symplektická struktura ω daná jako vnější derivace tautologické lineární formy λ. Určete symplektickou strukturu na množině všech přímek v $\mathbb{E}^3$.

(e) Uvažte hamiltonián pro volnou částici na sféře, jemu příslušné hamiltonovské vektorové pole a jeho tok, který určuje časový vývoj ve fázovém prostoru.

(f) Jaký hamiltonián, hamiltonovské vektorové pole a jaký tok odpovídá hamiltoniánu z (e) přes izomorfizmus z (b)?

ZÁPOČTOVÝ PŘÍKLAD 4

Izometrie Minkowského prostoročasu

Buď $V = \mathbb{R}^{n+1}$ vektorový prostor dimenze $n+1$ a g metrické tenzorové pole na V. Vektorový prostor V uvažme jako hladkou varietu s globálním souřadnicovým systémem $(x^i)_{i=0\dots n}$ daným volbou (pseudo)ortonormální báze. Vzhledem k tomuto souřadnicovému systému je g dáno takto

$$g = \mathrm{d}x^0 \odot \mathrm{d}x^0 - \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}x^i \odot \mathrm{d}x^i.$$

Buď dále $\phi\colon V \to V$ hladké zobrazení, pro které platí $\phi^* g = g$ tj. $g(\phi_* X, \phi_* Y) = g(X,Y)$ pro X,Y vektorová pole na V.

(a) Ukažte, že ϕ je afinní zobrazení, $\phi(x) = Ax + b$, kde $A^T G A = G$, A je (pseudo)ortogonální transformace, $b \in V$ a $G = \mathrm{diag}(1, -1, \dots, -1)$ je symetrická bilineární forma.

(b) Dokažte, že všechna taková zobrazení tvoří grupu P (zvanou Poincarého grupa) vzhledem k operaci skládání zobrazení.

(c) Ukažte, že i matice A splňující $A^T G A = G$ tvoří grupu L a že každý prvek z P lze zapsat jako kompozici prvku z L a prvku z V.

(d) Dokažte, že L a P jsou hladké variety a grupová operace $.\colon L \times L \to L$ resp. $.\colon P \times P \to P$ je hladké zobrazení.

(e) Určete všechny souvislé komponenty L. Využijte skutečnosti, že pro variety splývají pojmy souvislost a oblouková souvislost (tj. množina je souvislá, právě lze-li každé její dva body spojit hladkou křivkou). Využijte polární rozklad matic z L.