ZÁPOČTOVÝ PŘÍKLAD 1

Varieta všech orientovaných přímek v euklidovském prostoru

řeší Adam Čepil

(a) Ukažte, že na množině orientovaných přímek v euklidovském prostoru $\mathbb{E}^3$ lze zavést hladkou strukturu.

(b) Dále ukažte, že tato varieta je izomorfní ke kotečnému prostoru ke sféře $\mathbb{S}^2$.

(c) Jak jsou reprezentovány body $\mathbb{E}^3$ v $T^*\mathbb{S}^2$?

(d) Na $T^*\mathbb{S}^2$ je kanonická symplektická struktura ω daná jako vnější derivace tautologické lineární formy λ. Určete symplektickou strukturu na množině všech přímek v $\mathbb{E}^3$.

(e) Uvažte hamiltonián pro volnou částici na sféře, jemu příslušné hamiltonovské vektorové pole a jeho tok, který určuje časový vývoj ve fázovém prostoru.

(f) Jaký hamiltonián, hamiltonovské vektorové pole a jaký tok odpovídá hamiltoniánu z (e) přes izomorfizmus z (b)?

ZÁPOČTOVÝ PŘÍKLAD 2

Izometrie Minkowského prostoročasu

řeší David Daniš

Buď $V = \mathbb{R}^{n+1}$ vektorový prostor dimenze $n+1$ a g metrické tenzorové pole na V. Vektorový prostor V uvažme jako hladkou varietu s globálním souřadnicovým systémem $(x^i)_{i=0\dots n}$ daným volbou (pseudo)ortonormální báze. Vzhledem k tomuto souřadnicovému systému je g dáno takto

$$g = \mathrm{d}x^0 \odot \mathrm{d}x^0 - \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}x^i \odot \mathrm{d}x^i.$$

Buď dále $\phi\colon V \to V$ hladké zobrazení, pro které platí $\phi^* g = g$ tj. $g(\phi_* X, \phi_* Y) = g(X, Y)$ pro X, Y vektorová pole na V.

(a) Ukažte, že ϕ je afinní zobrazení, $\phi(x) = Ax + b$, kde $A^T G A = G$, A je (pseudo)ortogonální transformace, $b \in V$ a $G = \operatorname{diag}(1, -1, \dots, -1)$ je symetrická bilineární forma.

(b) Dokažte, že všechna taková zobrazení tvoří grupu P (zvanou Poincarého grupa) vzhledem k operaci skládání zobrazení.

(c) Ukažte, že i matice A splňující $A^T G A = G$ tvoří grupu L a že každý prvek z P lze zapsat jako kompozici prvku z L a prvku z V.

(d) Dokažte, že L a P jsou hladké variety a grupová operace $.\colon L \times L \to L$ resp. $.\colon P \times P \to P$ je hladké zobrazení.

(e) Určete všechny souvislé komponenty L. Využijte skutečnosti, že pro variety splývají pojmy souvislost a oblouková souvislost (tj. množina je souvislá, právě lze-li každé její dva body spojit hladkou křivkou). Využijte polární rozklad matic z L.