Abbeova teorie zobrazování

J. Kuběna

Učení text pro studenty nefyzikálních oborů

Abbeova teorie zobrazování

Abbeova teorie tvrdí, že optický obraz předmětu osvětleného rovinnou vlnou (rovnoběžným svazkem) vzniká dvojnásobnou Fourierovou transformací. První Fourierův obraz předmětu vznikne v obrazové ohniskové rovině a odpovídá komplexní amplitudě při Fraunhoferově difrakci. Další Fraunhoferovou difrakcí této komplexní amplitudy dostaneme komplexní amplitudu v obrazové rovině a ta odpovídá zvětšenému obrazu předmětu.

Nyní toto tvrzení prokážeme výpočtem.

Fourierova transformace

Když funkce *f(x)* je kvadraticky integrovatelná, má Fourierovu transformaci (FT) danou vztahem

$$F(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(ix\xi) dx \tag{1}$$

Říkáme, že $F(\xi)$ je Fourierův obraz (spektrum) funkce *f(x)* . Dále platí (zpětná FT)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) \exp(-ix\xi) d\xi \tag{2}$$

Fourierův obraz je komplexní funkce. Aplikujeme-li na *f(x)* lineární transformaci $x' = x_0 + x$, pak platí, že reálné a imaginární složky jejich obrazů před a po lineární transformaci proměnné x se navzájem liší, ale kvadráty absolutní hodnoty Fourierových obrazů se sobě rovnají.

$$\begin{gathered} f(x) \rightarrow F(\xi) = \mathrm{Re}(F) + i\,\mathrm{Im}(F) \\ f(x_0 + x) \rightarrow F_L(\xi) = \mathrm{Re}(F_L) + i\,\mathrm{Im}(F_L) \\ \mathrm{Re}(F) \neq \mathrm{Re}(F_L) \\ \mathrm{Im}(F) \neq \mathrm{Im}(F_L) \\ F(\xi)F(\xi)^* = F_L(\xi)F_L(\xi)^* \end{gathered} \tag{3}$$

Fraunhoferova difrakce

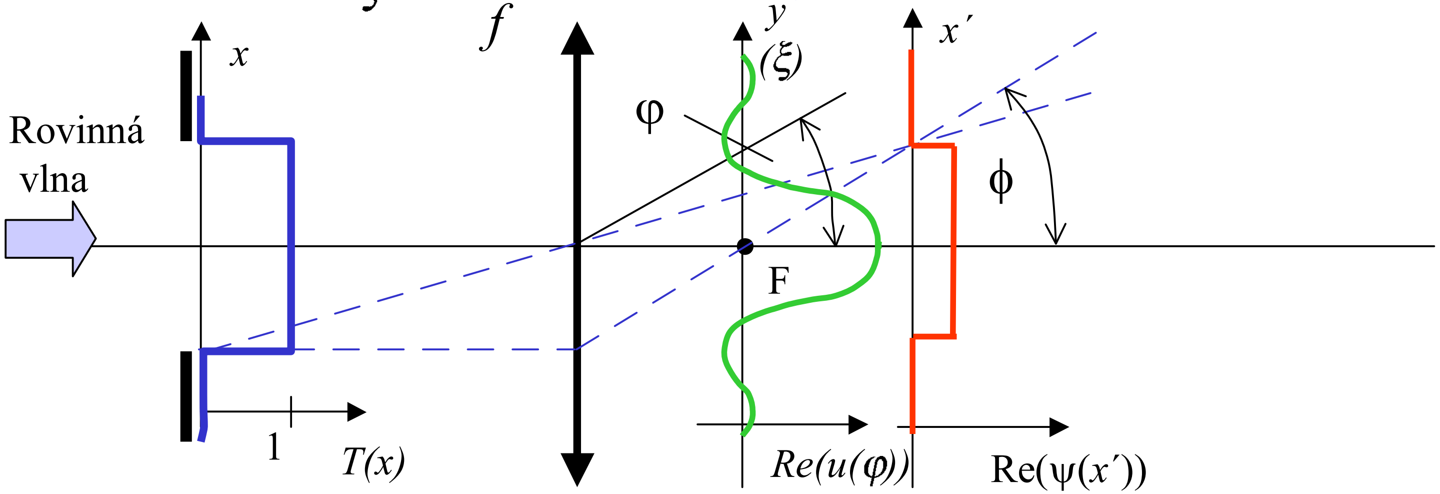
Kirchhoffův difrakční integrál v aproximaci rovinných vln (Fraunhoferova difrakce – FD) má tvar

$$u(\varphi) = A\int_{-\infty}^{\infty} T(x)\exp(ikx\sin(\varphi))dx, \qquad (4)$$

u(φ) je amplituda rovinné vlny šířící se pod úhlem *φ*, *T(x)* je propustnost difrakčního stínítka, *k* je vlnové číslo. Při pozorování FD čočkou v její ohniskové rovině je difrakční úhel φ (v paraxiálním přiblížení, ohnisková vzdálenost *f*) roven

$$\sin(\varphi) \cong \varphi = \frac{y}{f} \qquad (5)$$

Označíme-li dále $\xi = k\dfrac{y}{f}$, s využitím (5) nastane formální shoda rovníce (4) a (1).



Abbeova teorie (1)

Nechť komplexní amplituda za předmětem je *T(x)*.

Komplexní amplituda FD v ohniskové rovině je

$$u(y) = A\int_{-\infty}^{\infty} T(x)\exp(ikx\frac{y}{f})dx, \tag{6}$$

Komplexní amplituda v obrazové rovině $\psi(x')$ je rovna FD $u(y)$

$$\psi(x') = A\int_{-\infty}^{\infty} u(y)\exp(iky\sin(\phi))dy = A\int_{-\infty}^{\infty} A\left[\int_{-\infty}^{\infty} T(x)\exp(ikx\frac{y}{f})dx\right]\exp(iky\frac{x'}{b-f})dy \tag{7}$$

Difrakční úhel ϕ při difrakci z ohniskové roviny do obrazové v paraxiálním přiblížení byl nahrazen výrazem

$$\sin\phi \cong \phi = \frac{x'}{b-f} \tag{8}$$

Abbeova teorie (2)

Provedením integrace rovnice (7) podle y dostaneme

$$\psi(x') = AA2\pi \int_{-\infty}^{\infty} T(x)\delta\left(\frac{x}{f} + \frac{x'}{b-f}\right)dx \qquad (9)$$

kde δ je Diracova distribuce. Další integrací (9) podle x dostaneme

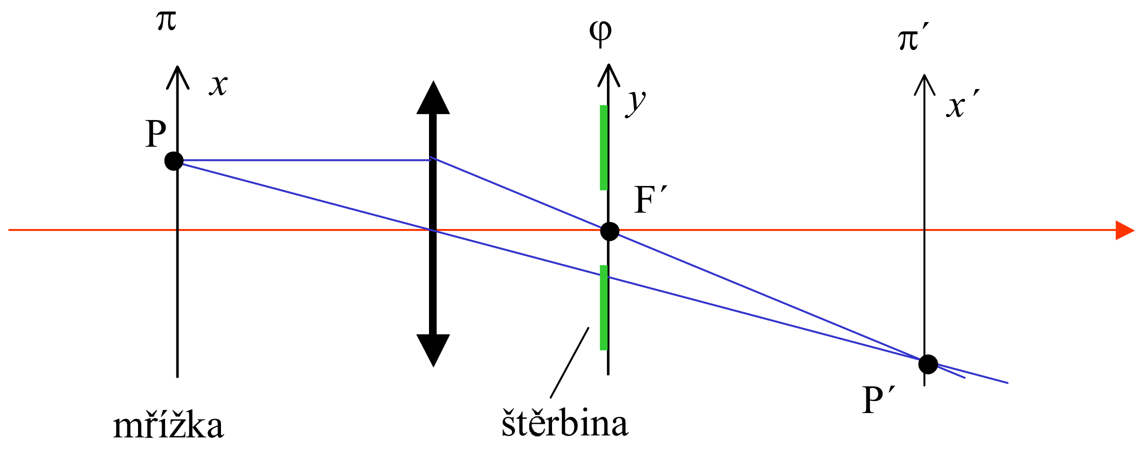
$$\psi(x') = 2\pi AAT\left(\frac{-fx'}{b-f}\right) = 2\pi AAT(\gamma x') \qquad (10)$$

Faktor γ u x' má význam **zvětšení obrazu**. Vidíme tedy, že komplexní amplituda v obrazové rovině je až na faktor zvětšení úměrná amplitudě za předmětem. Tím je tvrzení Abbeovy teorie dokázáno.

Prostorová frekvence předmětu je $\xi = k\dfrac{y}{f} = \dfrac{2\pi}{\lambda}\dfrac{y}{f}$

Pro kvalitní zobrazení je třeba, aby nebyla prostorově omezována ohnisková rovina, aby se do obrazové roviny přenesly všechny prostorové frekvence předmětu.

Experimentální ověření



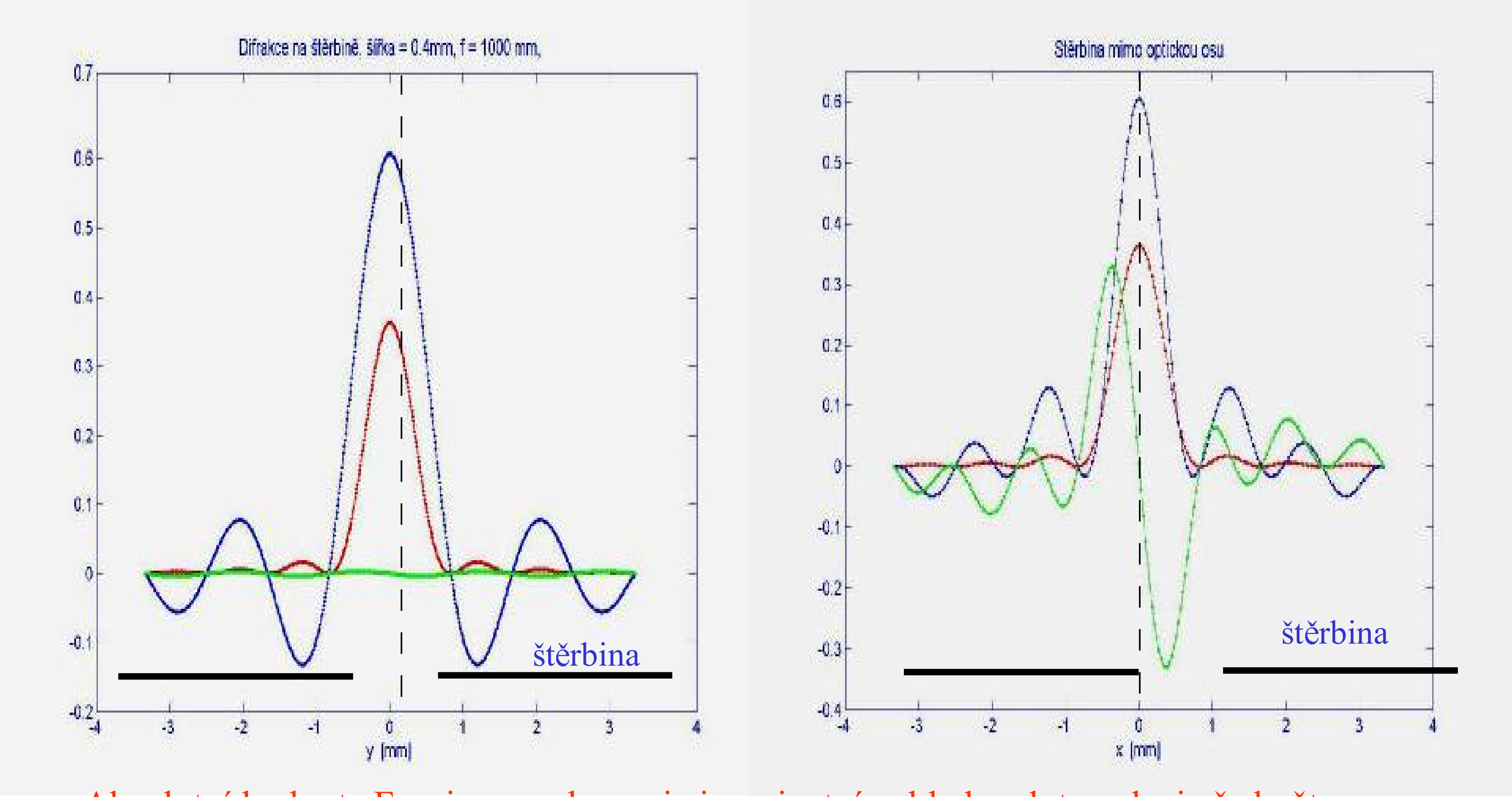
f = 1000 mm
b = 5000 mm
λ = 0.0005 mm
ξ = 12.57*y [mm^{-1}]
γ = -4

Transparentní preparát, který má strukturu plošné mřížky, osvětlíme rovnoběžným svazkem a zobrazíme na stínítko. V ohniskové rovině pozorujeme Fraunhoferovu difrakci na preparátu. Když do ohniskové roviny vložíme štěrbinu, která propustí jen jednu řadu difrakčních maxim, například svislou, tak obraz mřížky na stínítku se změní v soustavu vodorovných řádků.
Zamezili jsme štěrbinou přenos celého souboru prostorových frekvencí.

Následující obrázky jsou jen ilustrativní výpočty některých efektů filtrace prostorových frekvencí

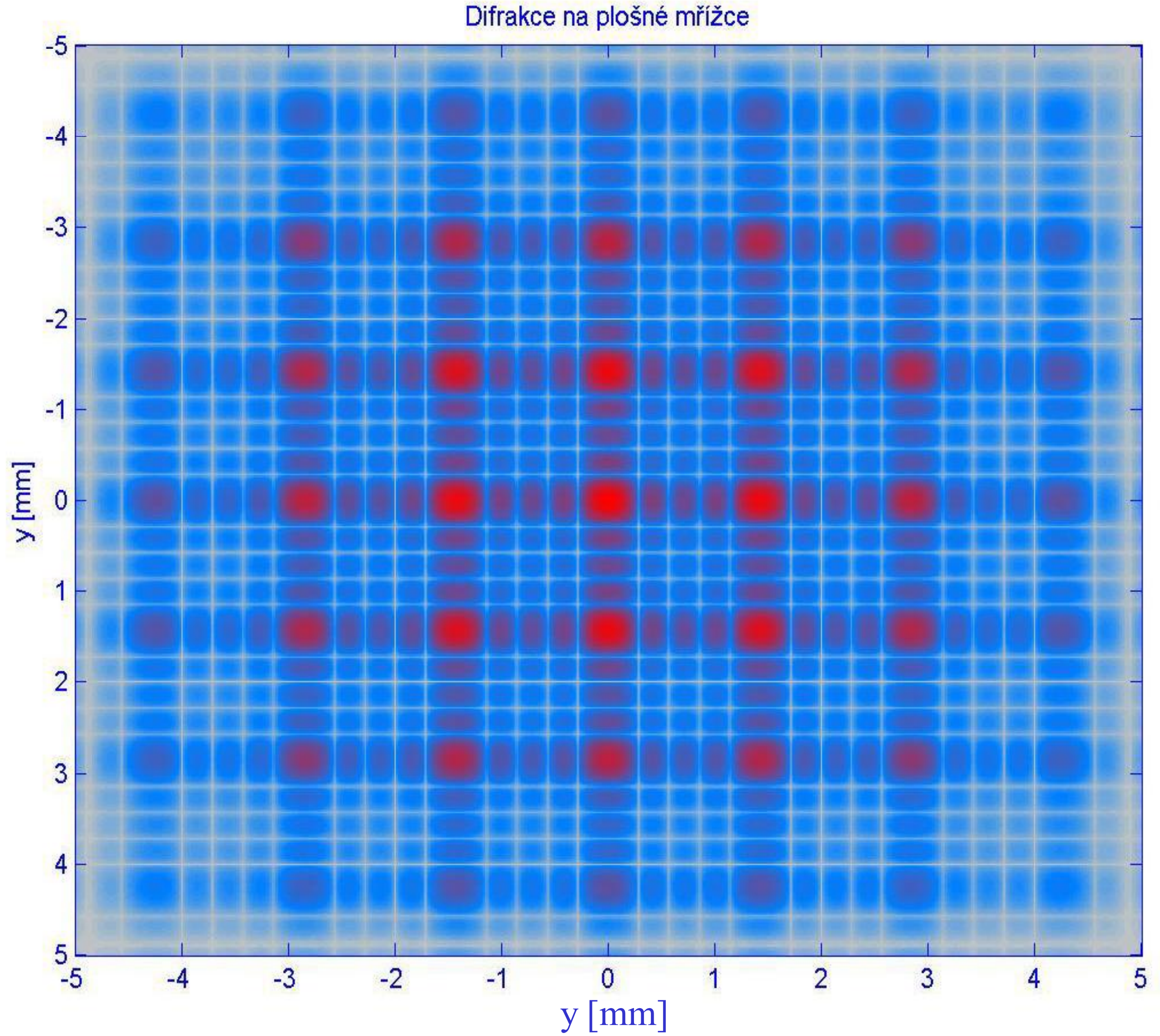
Fraunhoferova difrakce na štěrbině

Intenzita červeně, reálná část Fourierova obrazu modře a imaginární část zeleně

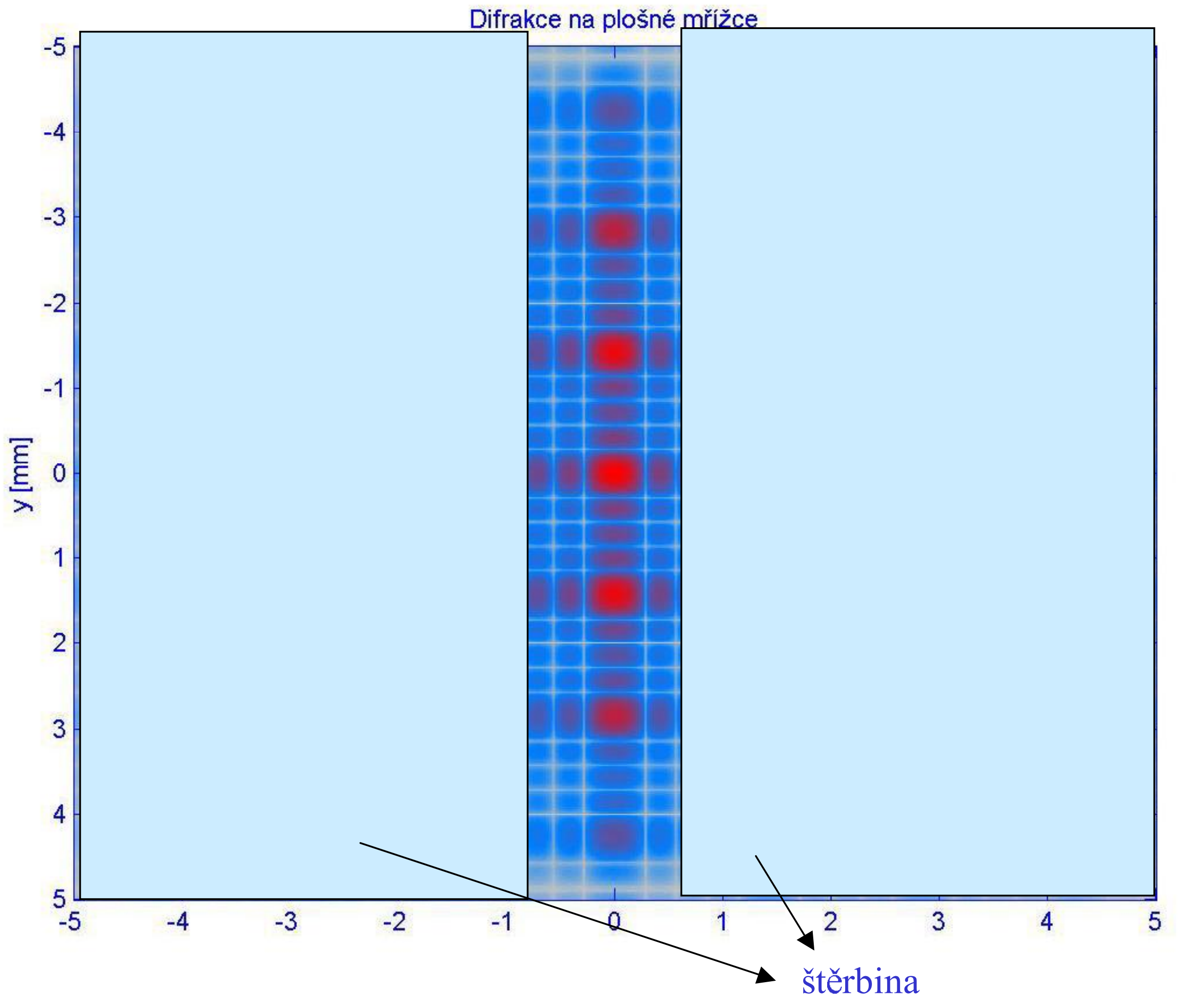


Absolutní hodnota Fourierova obrazu je invariantní vzhledem k translaci předmětu.

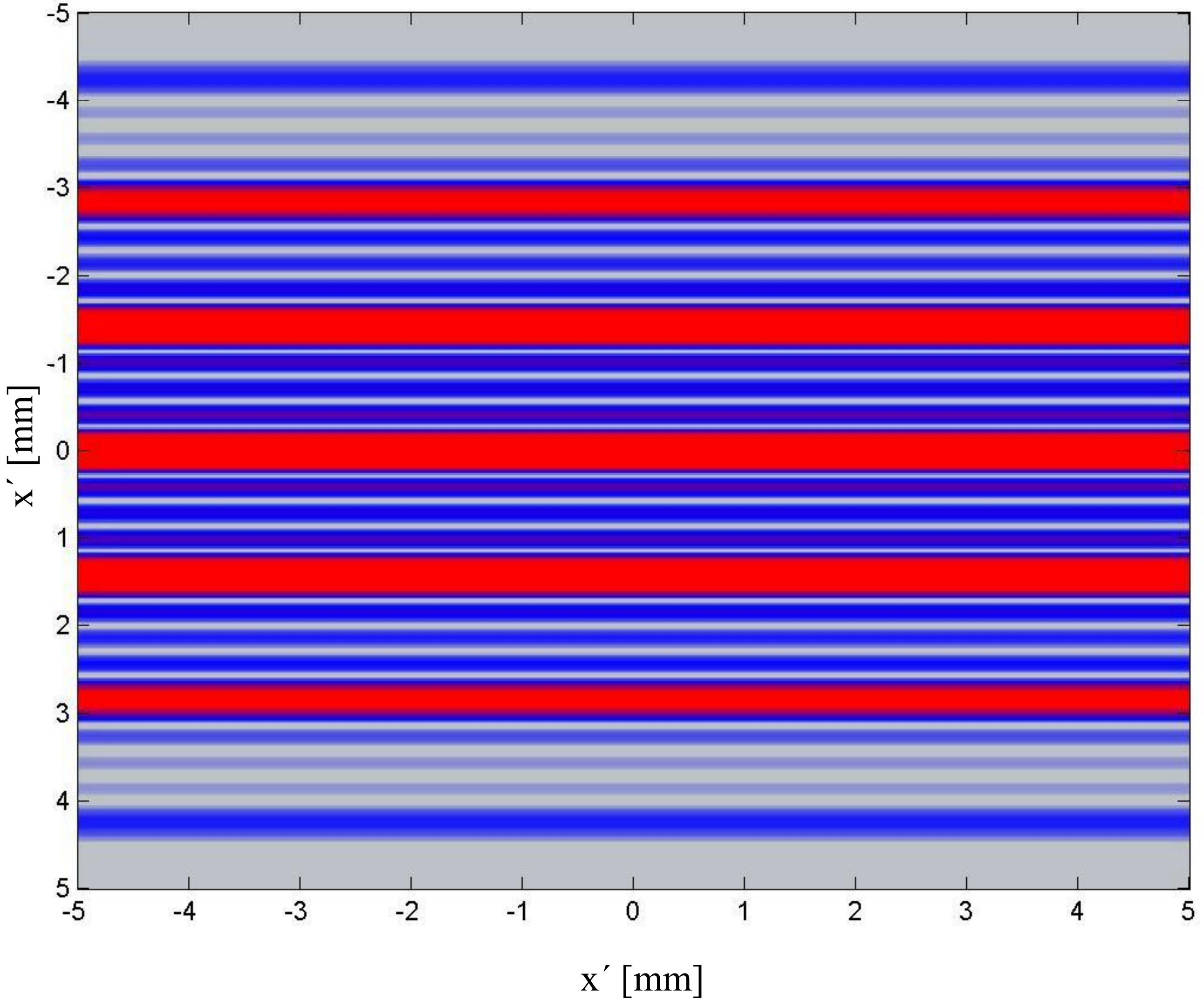
Fraunhoferova difrakce na mřížce



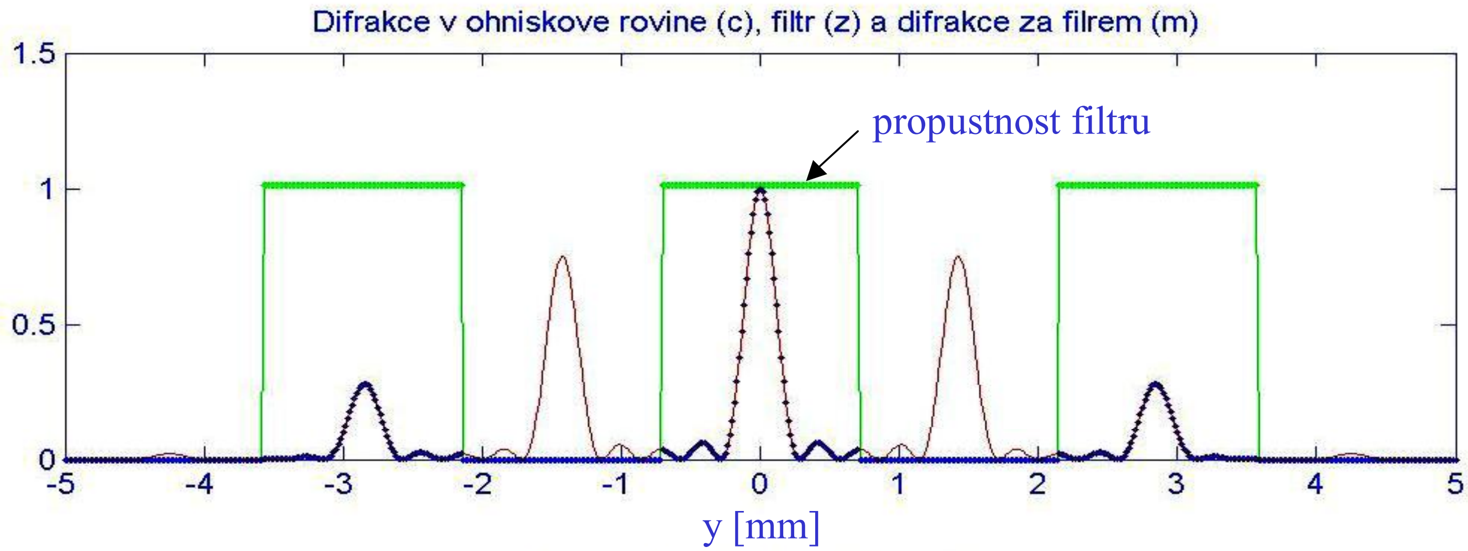
Filtrace prostorových frekvencí štěrbinou

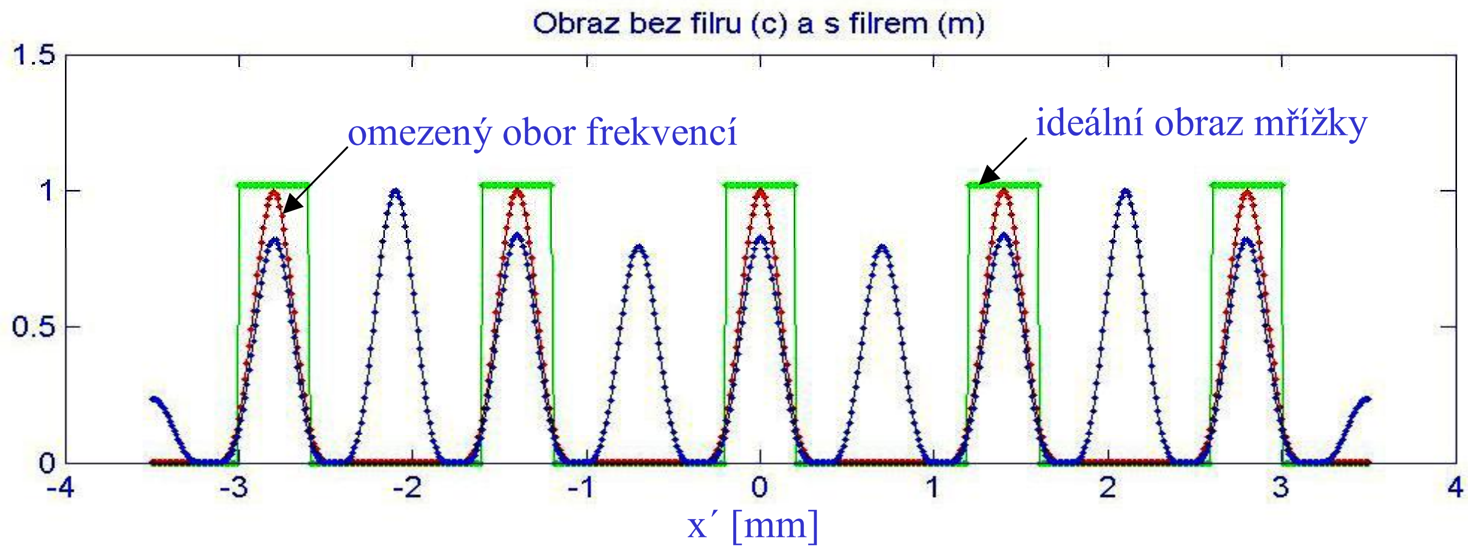


Obraz mřížky po filtraci štěrbinou

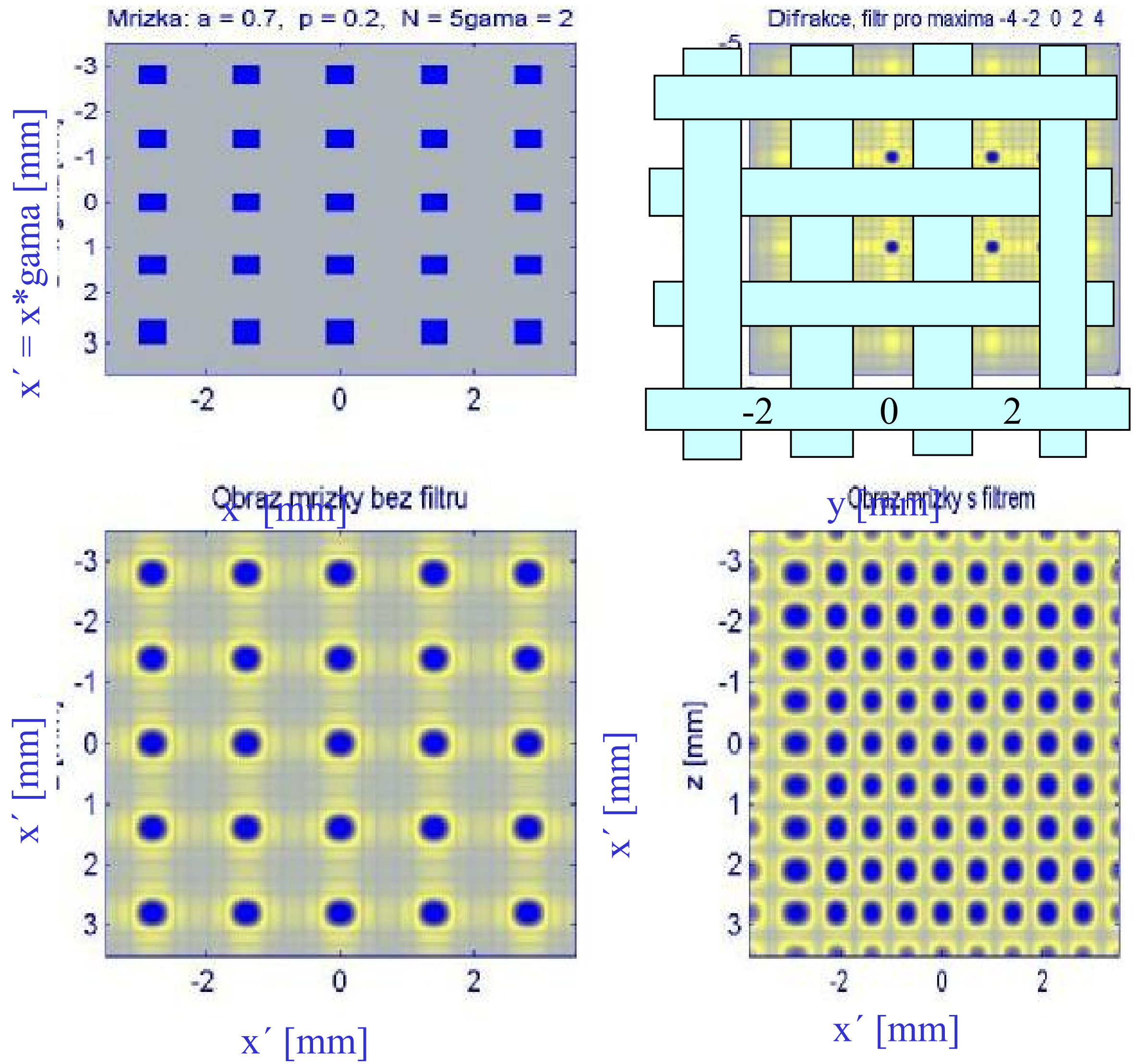


Příklad filtrace sudých difrakčních maxim





Zobrazení mřížky a příklad prostorové filtrace



Při odstínění sudých maxim difrakce bude obraz vykazovat poloviční mřížkovou konstantu než předmět.