Jak asi Newton na své zákony přišel.

JOSEF KUBĚNA

Přírodovědecká fakulta Masarykovy Univerzity,

Kotlářská 2, 611 37 BRNO

Při hledání vhodných experimentů k přesvědčivé laboratorní demonstraci platnosti Newtonových zákonů se mi do podvědomí vždy vkrádaly otázky, jak mohl Newton na své zákony přijít, když všudypřítomné tření veškeré experimenty tak zkresluje. O jaká experimentální fakta se mohl v 17. století vlastně opřít? A jak mohl přijít na svůj gravitační zákon, když přitažlivost dvou těles vůbec nepociťujeme? Zdá se, že významnou roli při tom sehrály Keplerovy zákony o pohybu planet.

1 Historický úvod

Velice pravděpodobný způsob zrodu Newtonových zákonů mechaniky vynikne, teprve když jej zasadíme do odpovídajícího historického rámce, zejména do časové posloupnosti vývoje vědeckého poznání v němž nemalou roli sehrála astronomie. Všimneme si však jen těch historických okolností, které se vztahují k našemu tématu.

1.1 Ptolemaios (1. a 2. st. n. l.)

Od dob Claudia Ptolemaia (řecký astronom, žil v 1. a 2. stol. našeho letopočtu) se mělo zato, že hvězdy a Slunce i Měsíc leží na nebeské báni, která se otáčí kolem Země. Osa rotace protíná nebeskou báň přibližně tam, kde na ní leží hvězda Polárka. Když se zpřesnilo pozorování hvězdné oblohy, ukázalo se, že Slunce a většina hvězd se pohybuje po obloze podle popsaného nebeského modelu, tj. po stále stejných kružnicích. Existovalo však několik *neposlušnic*, o nichž dnes víme, že se jednalo o *planety*, které cestovaly po obloze po složitějších a přitom navzájem odlišných trajektoriích.

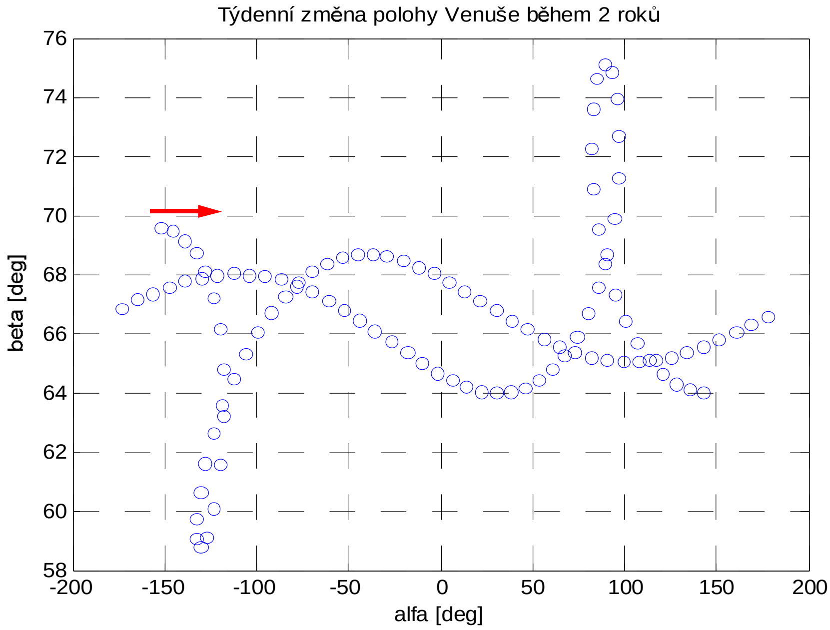
Myslitelé středověku se nemohli s tímto experimentálním faktem smířit, protože nabourával jejich neotřesitelnou víru v nejvyšší dokonalost Boha - Stvořitele všehomíra - a dále vyjímečné postavení Země a na ní člověka vzhledem k celému vesmíru.

Proč se tisíce hvězd pohybuje po dokonalých kružnicích a jen několik jinak? To přece nemůže být nedokonalost Boha. Přes to, že tato pochybnost má teologické kořeny, byla motorem při hledání správné odpovědi.Významnou roli zde sehrálo zpřesňování pozorování pohybu hvězd a uvědomování si úlohy člověka při interpretaci experimentálních faktů.

1.2 Kopernik (1473 - 1543)

Polský astronom Mikuláš Koperník přišel se zásadní novou představou, že neposlušné hvězdy (planety) by neodporovaly světovému řádu (tj. dokonalosti Boha), kdybychom připustili, že středem světa není Země, ale Slunce. Přitom planety i Země by se pohybovaly po kruhových trajektoriích kolem Slunce a Měsíc po kruhové dráze kolem Země. Střídání noci a dne lze pak jednoduše vysvětlit otáčením Země kolem své osy. K této myšlence jej přivedla pozemská zkušenost při pozorování vzájemné polohy různě vzdálených předmětů, když pozorovatel mění svoje stanoviště.

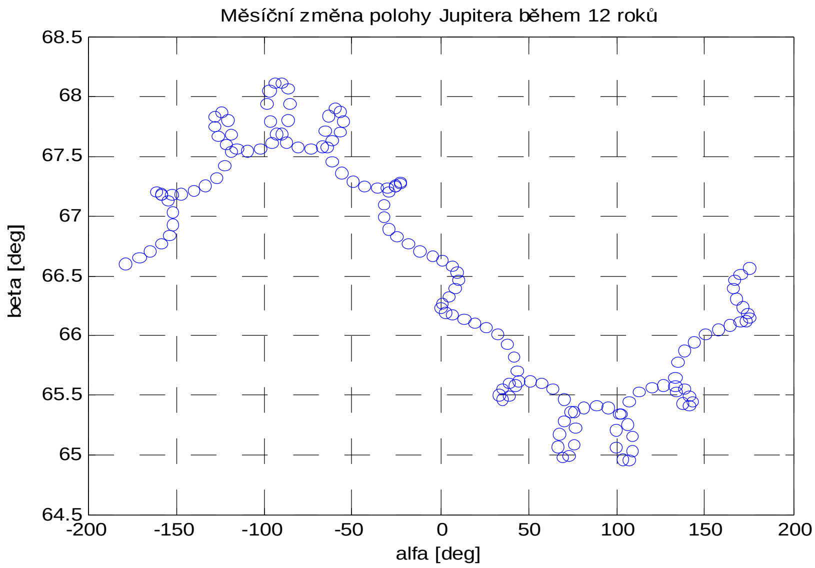
Tento model nebeské mechaniky na jedné straně sice podporoval dokonalost boha Stvořitele (zachovává dokonalost kruhových trajektorií), na druhé straně byla zpochybněna jedinečnost Země a na ní stvořeného člověka, což vyvracelo církevní dogmata o stvoření světa. Jsa si pravděpodobně vědom tohoto citlivého místa svého modelu, zveřejnil jej až na sklonku svého života r.1543.



Obr. 1 Jednotlivé kroužky vyznačují, jak se každý týden mění poloha planety Venuše vzhledem ke hvězdám během dvou roků. Oběžná doba Venuše je 0,61 roku. Beta je úhel od Polárky a alfa úhel v rovině ekliptiky.

1.3 Brahe (1546 - 1601)

Zastáncům nových pohledů na nebeskou mechaniku chyběly v disputacích jasné a neotřesitelné argumenty, tj. přesná astronomická pozorování, jinak řečeno měření úhlové polohy planet vzhledem k jiným hvězdám. Ta velice pečlivě a systematicky prováděl celých 21 let dánský astronom Tycho Brahe, který poslední čtyři roky svého života prožil v i Praze, na dvoře císaře Rudolfa II. Tato měření dodnes udivují astronomy svou přesností a systematičností.



Obr. 2 Takto mění každý měsíc svou polohu na obloze planeta Jupiter během 12 roků. Oběžná doba Jupitea 11,9 roku. . Beta je úhel od Polárky a alfa úhel v rovině ekliptiky. Trajektorie Jupitera se podobá epicykloidě.

1.4 Kepler (1571 - 1630)

V Praze působil na císařském dvoře za vlády Rudolfa II. jako dvorní astrolog rovněž velký německý matematik a astronom Johann Kepler a jako Brahův asistent byl po jeho smrti císařem pověřen vydat *Rudolfinské tabulky* (1927) - celoživotní měření souřadnic pohybu planet. Tato experimentální data o pohybu planet byla tak přesná, že při jejich geniálním matematickém rozboru (dnes bychom řekli, že šlo o fitování souřadnic na známé geometrické křivky), našel Kepler velice překvapivé zákonitosti, které postupně publikoval a zformuloval do známých *tří Keplerových zákonů* o pohybu planet:

1. Zákon eliptických trajektorií (*Astronomia nova*, 1609). Planety se pohybují po elipsách, v jejichž jednom společném ohnisku je Slunce.
2. Zákon konstantní plošné rychlosti planet (*Harmonia mundi*, 1619).
3. Zákon stejného poměru druhých mocnin oběžných dob a třetích mocnin velikostí hlavních poloos pro různé planety (T^2/a^3= konst.) (*Tabulae Rudolphiane*, 1627).

Dnešní fyzik vyzbrojený počítačem žasne, kde se v Keplerovi brala energie k těmto komplikovaným a únavným numerickým výpočtům, které přerušovaně trvaly téměř tři desítky let, a klade si otázku, kde se vůbec v něm vzala odvaha do takového díla se pustit, a co posilovalo jeho víru v konečný úspěch.

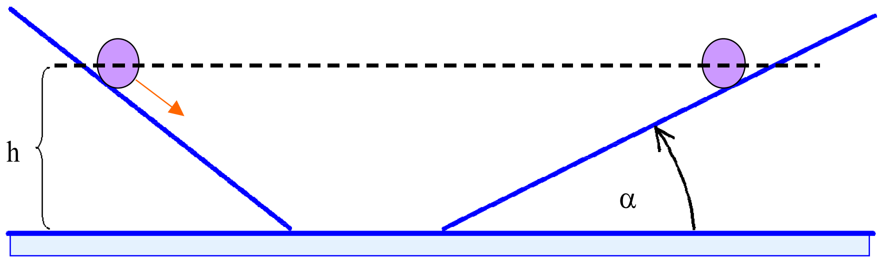
1.5 Galileo (1564 - 1642)

Tuto řadu velkých přírodovědců přednewtonovské doby završuje objevitel *dalekohledu* a Jupiterových měsíčků (1610), velký italský učenec a experimentátor Galileo Galilei. V oboru mechaniky je znám především svými experimenty s pádem těles. Z těchto experimentů vyvodil, že při pádu bez odporu prostředí *roste dráha tělesa s druhou mocninou času*, a to bez ohledu na jeho hmotnost (čas měřil pomocí vážení množství vody, která vytékala z nádoby malým otvorem). Poněkud v pozadí jsou však jeho experimenty s pohybem těles po nakloněné rovině. Podle Aristotela se totiž do té doby mělo zato, že každé těleso je nadáno *přirozeným pohybem* (pádem do středu Světa) a jiné pohyby mají svou blíže neurčenou příčinu, která se někdy nazývala *silou*.

Galileo si všiml, že těleso, které se dá do pohybu na jedné nakloněné rovině, vystoupí na protější nakloněné rovině do stejné výše (při zanedbání tření), aniž by tento jev závisel na úhlu α, který svírá tato druhá nakloněná rovina s vodorovným směrem.

Zobecněním těchto experimentů došel k významnému novému poznatku, kterému dnes říkáme *zákon setrvačnosti*, že totiž po vodorovné rovině by se těleso pohybovalo neustále, aniž by na něj nějaká *síla* působila, tedy bez příčiny, což bylo ovšem v rozporu s Aristotelem. Je třeba zdůraznit, že na tehdejší dobu to bylo tvrzení více než revoluční.

Z tohoto poznatku plynul logický důsledek, že všechna tělesa se mohou pohybovat ve vodorovném směru, aniž by na ně působila *síla v Aristotelově smyslu*. Při experimentech s volným



Obr. 3 Dvě různě nakloněné roviny.

pádem nebo šikmým vrhem tělesa je vliv rotace Země (podle Koperníka) naprosto zanedbatelný. Galileo se o tom experimentálně přesvědčil. Zjistil, že volný pád probíhá stejně z věže na zemi, jako z kapitánského můstku na klidně stojící nebo i volně plující lodi, a to vždy svisle dolů. Tyto i další experimenty pravděpodobně Galilea vedly formulaci *principu o nezávislosti pohybů* při idealizovaném vodorovném vrhu: *těleso neletí po vodorovné přímce, protože ve svislém směru stále padá k zemi.*

Galilei podpořil Koperníkovu hypotézu o rotaci Země kolem své osy i kolem Slunce opíraje se o nová experimentální fakta, která získal tím, že pozoroval planety dalekohledem. Mezi ně patřil především objev Jupiterových měsíčků a světelných fází planety Venuše, které se podobaly fázím Měsíce. Stalo se tak ve spisu *Dialog o dvou hlavních systémech světa* (rozuměj Ptolemaiově a Koperníkově) vydaném roku 1632, který se stal počátkem jeho konfliktu s katolickou církví, protože ta Koperníkův systém neuznávala. Překlad zajímavých pasáží z tohoto spisu do češtiny najde čtenář v knize [1].

1.6 Newton (1643 - 1727)

Náš historický úvod nemůžeme završit jinak, než obecnou poznámkou o Newtonovi. Anglický fyzik, Isaac Newton se během studií na universitě v Cambridgi jistě seznámil s aristotelovským pojetím mechaniky, pravděpodobně však i s Koperníkovými a Galileovými revolučními myšlenkami. Významnou roli při Newtonových úvahách souvisejících s objevem jeho zákonů mechaniky docela jistě sehrála geniální Keplerova geometrická analýza pohybu planet. Svědčí o tom i jeho světoznámý spis vydaný roku 1687 *Philosophiae naturalis principia mathematica* (v překladu by název zněl: Matematické principy filozofie přírody).

Když se zmiňujeme o tomto díle, všimněme si i filozofické hloubky sousloví v jeho názvu. Toto sousloví naznačuje, jakoby se příroda řídila matematickými (nikoliv tedy božskými) principy. Zajímavé ale je, že to tvrdí jen o filozofii přírody, a tu vytváří člověk svým rozumem, aby světu lépe porozuměl. Toto sousloví se objeví ještě ve významnější poloze, když si uvědomíme, že v té době se všeobecně mělo zato, že se příroda řídí božími principy.

2 Keplerovy zákony – východisko pro Newtona ?

Pokládám za důležité zdůraznit, že tento text *není historickou studií*, ale spíše fyzikálně esejistickým zpracováním toho, jakou roli asi sehrály Keplerovy zákony při geniálních Newtonových objevech. Proto se v následujících odstavcích pokusíme rekonstruovat posloupnost Newtonových úvah s využitím jen středoškolské geometrie a kinematiky pohybu těles, to je tedy asi se znalostmi, které mohl mít i Newton po universitních studiích. Podrobné úvahy spojené s definicí pojmu *vektoru rychlosti* , jehož zde budeme užívat, najde čtenář např. v [3, 4].

Zpočátku zde budeme kopírovat postup Newtona, jak je popsán v *Principiích*, avšak neobešli bychom se později bez diferenciálního počtu zejména při důkazu, že jsou-li Newtonovy zákony správné, pak trajektoriemi planet jsou elipsy se Sluncem v jednom jejich společném ohnisku. Tento důkaz pomocí středoškolské geometrie a fyziky však podal nositel *Nobelovy ceny za fyziku, američan R. Feynman* [2]. Především díky němu budeme moci být svědky dramatické cesty vedoucí od Keplerových zákonů k Newtonovým, tedy od experimentů k obecné teorii, a od obecné teorie k předpovědi trajektorie planet.

2.1 Euklides a nezodpovězené otázky

Při pravděpodobné rekonstrukci Newtonových úvah lze jistě právem předpokládat, že Newton byl seznámen se stavem přírodovědných poznatků, jak jsme je v historickém úvodu stručně nastínili. Nelze však zapomínat ještě na jeden, možná nejvýznamnější poznatek, a sice na Euklidovu učebnici geometrie nazvanou prostě *Základy*. Někdy ve 3. století před n.l. Euklides vynikajícím způsobem logicky utřídil tehdy všeobecně už známé poučky a pravidla z geometrie do *soustavy axiomů* a z nich logicky odvozených důsledků a tvrzení.

Tato učebnice byla asi pro Newtona inspirací ve dvou směrech. Především byla mistrovským příkladem aplikace Aristotelovy logiky na prostorové chápání světa a dále byla mistrovským příkladem toho, jak je pro soustavu přírodovědných poznatků plodné hledání a nalezení těch nejobecnějších principů či axiomů, jimiž se svět řídí. Konec konců lze jistě říci, že i dnešní věda nedělá nic jiného, než že napodobuje styl práce Euklida.

Geniální logický Newtonův mozek byl tedy také jistě silně motivován k hledání obecnějších principů, jimiž se svět řídí. Možná, že Keplerovy zákony a dosud známé pozemské zákony pohybu těles vyvolávaly v jeho mysli tyto otázky:

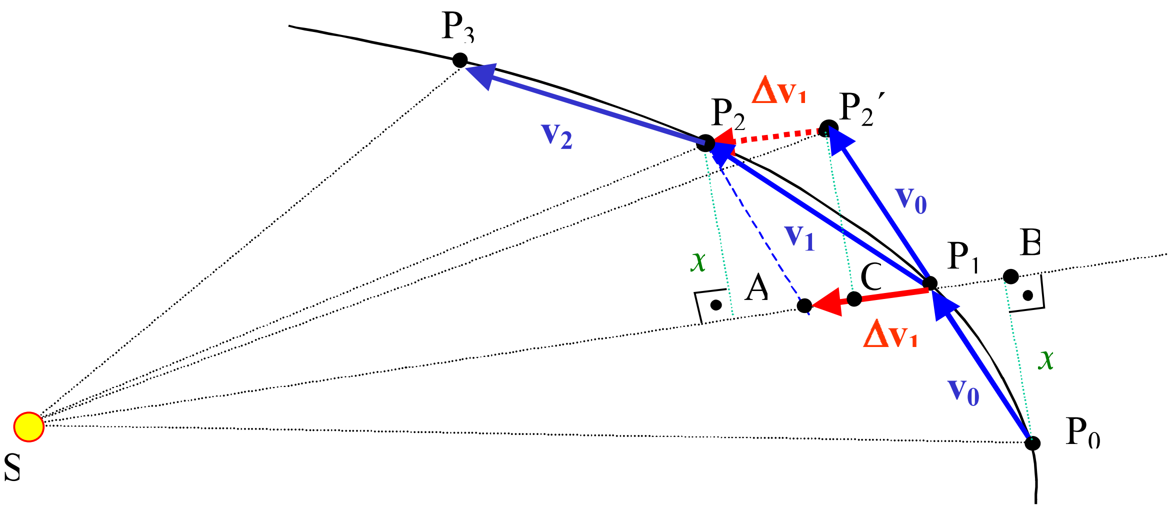
1. *Proč se planety pohybují po křivkách, když podle zákona setrvačnosti by se měly spíše pohybovat po přímce? Není to jako při pohybu střely na Zemi? Střela by měla letět stále ve směru hlavně, ale ona současně padá k Zemi. Proto se podle Galilea pohybuje po části paraboly.*
2. *Jak to, že průvodič vedený ze Slunce k planetě opíše za stejnou dobu vždy plochu o stejném obsahu v libovolném úseku planetární trajektorie, jak to plyne z 2. Keplerova zákona?*
3. *Jak to, že se tímto zákonem řídí všechny planety přesto, že jejich doby oběhu jsou tak odlišné? Neřídí se všechny planety nějakým dosud neznámým matematickým principem? Jakým?*
4. *Jakou roli v pohybu planet hraje Slunce? Ta role musí být jistě významná, když se všechny planety i Země točí kolem něho.*
5. *Jak vysvětlit to, že všechny planety mají stejný poměr třetích mocnin velké poloosy a druhých mocnin doby oběhu? Tento 3. Keplerův zákon platí pro všechny planety a proto musí mít i příčinu společnou všem planetám. Jakou? Nespočívá tato příčina ve Slunci? To je přece společné pro všechny planety.*
6. *Když Země byla považována za střed světa, považovali lidé za přirozené, že všechna tělesa jsou přitahována k zemi. Jestliže tímto středem je pro planety Slunce, nejsou také ony přitahovány ke Slunci? Nepadají na Slunce stejně, jako těleso při šikmém vrhu na Zemi?*

3 První odpověď a hned velký úspěch

Nevíme, kolik a jakých chybných hypotéz Newton vyzkoušel, než našel ty správné principy, kterými vysvětlil záhadnou provázanost všech Keplerových zákonů. Podle *Principií* dnes můžeme sledovat jen ty správné, např. viz učebnici [5]. Tu jsou. Připravme se však na to, že nebude úplně jednoduché nahlédnout do jeho úvah, i když si mnohdy náš pohled trochu zjednodušíme.

3.1 II. Keplerův zákon plyne z obecnějšího principu

Na trajektorii jedné planety si zvolme postupně řadu bodů P_i, $i = 0,1,2,...$, ve kterých se planeta bude nacházet vždy za *stejný časový interval* Δt, a polohu Slunce označme S .



Obr. 4 Část trajektorie planety s vyznačenými body, v nichž se nachází vždy po uplynutí stejného časového intervalu Δt.

Úsečky (*posunutí*) P_0P_1, P_1P_2, … atd. jsou různě dlouhé, protože velikost obvodové rychlosti v_i může být v různých úsecích trajektorie různá. Rychlost na jednotlivých úsecích můžeme znázornit vektory $\mathbf{v}_i$, protože velikost rychlosti je úměrná délce úsečky $P_{i-1} P_i$ s koeficientem úměrnosti $1/\Delta t$ a její směr míří z bodu P_{i-1} do bodu P_i tím lépe, čím kratší časový interval zvolíme.

Pokud by se planeta pohybovala podle *zákona setrvačnosti*, pak by se měla z bodu P_1 dostat za následující časový interval do bodu P_2' a nikoliv do bodu P_2 , který leží na trajektorii. Zde Newton pravděpodobně aplikoval poučky o vodorovném vrhu známé z pozemské mechaniky: *planeta se pohybuje podle zákona setrvačnosti, ale současně padá ke Slunci*. Během intervalu Δt se rychlost tedy změnila o vektor $\mathbf{\Delta v_1}$, který je rovnoběžný s úsečkou SP_1. Teprve výsledek vektorového součtu $\mathbf{v_0} + \mathbf{\Delta v_1}$ je roven rychlosti $\mathbf{v_1}$, jak plyne z rovnoběžníku $A_1P_1P'_2P_2$.

Všimněme si nyní, že trojúhelník SP_0P_1 a trojúhelník $SP_1P'_2$ mají *stejný obsah*. Je to proto, že mají společnou základnu SP_1 a stejné výšky na ni spuštěné z bodů P_0 a P'_2 uvažovaná výška x je totiž odvěsnou ve dvou pravoúhlých trojúhelnících BP_0P_1 a $CP_1P'_2$. Dále si všimněme, že rovněž obsah trojúhelníka $SP_1P'_2$ je shodný s trojúhelníkem SP_1P_2 , protože i tyto dva trojúhelníky mají společnou základnu a výšku x na ni spuštěnou.

Zrekapitulujme nyní, k čemu jsme těmito úvahami dospěli. Dokázali jsme, že trojúhelníky SP_0P_1 a SP_1P_2 mají stejné obsahy. Je zřejmé, že stejným postupem bychom toto tvrzení dokázali i pro každou další dvojici sousedních trojúhelníků. Jinými slovy řečeno to znamená, že průvodič vedený ze Slunce k planetě opíše za stejnou dobu Δt plochu o stejném obsahu, bez ohledu na to, kde se na své trajektorii nachází. Jeho plošná rychlost je na celé dráze kolem Slunce konstantní a to je *v souladu* s II. Keplerovým zákonem.

K tomu, že tento zákon musejí splňovat všechny planety, stačilo předpokládat, že platí *zákon setrvačnosti* a to, že *síla, která způsobí změnu vektoru rychlosti, má směr od planety ke Slunci.*

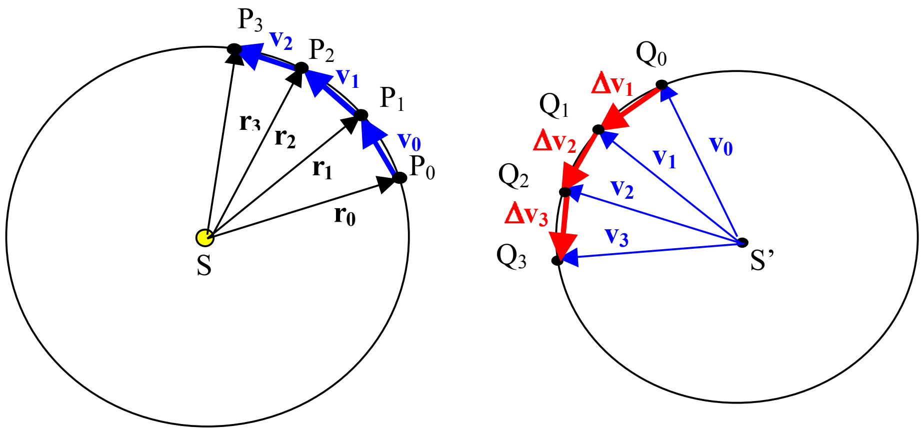
Všechno ostatní byla už jen eukleidovská geometrie. To je tedy ten veliký úspěch! *II. Keplerův zákon je tedy skutečně důsledkem obecnějšího principu platného i na Zemi!*

Ještě jedné stránky této úvahy stojí zato si povšimnout. Závěr, ke kterému jsme dospěli, *nezávisí na délce časového intervalu* Δt . To je velice významné, protože čistě logickými postupy abychom mohli dokázat, že platí pro všechny body trajektorie, když budeme uvažovaný časový interval libovolně zmenšovat.

4 Cesta k II. Newtonovu pohybovému a gravitačnímu zákonu

Nyní ukážeme, jakou roli asi při Newtonových úvahách sehrál III. Keplerův zákon.V tomto případě si naše úvahy zjednodušíme tím, že se *omezíme jen na trajektorie planet ve tvaru kružnice*. Velké zjednodušení to není, neboť rozdíl hlavní a vedlejší poloosy je pro většinu planet jen několik procent. A dále je velice pravděpodobné, že i Newton si pro prvé úvahy celou situaci zjednodušil podobně, jako teď my.

Uvažujme tedy kruhovou trajektorii planety o poloměru r a na trajektorii opět body P_i, které odpovídají polohám planety vždy za *stejný časový interval* Δt. Posunutí $\boldsymbol{d_i} = P_iP_{i+1}$ jsou v případě kruhové trajektorie stejně velké a podle definice vektoru rychlosti $\boldsymbol{v_i} = \boldsymbol{d_i}/\Delta t$ mají jejich směr. Vektory rychlostí v jednotlivých bodech trajektorie můžeme graficky znázornit dvojím způsobem, jak je uvedeno na obr.3 : jednak jako vektory spojující body P_iP_{i+1}, jednak jako vektory mající společný počátek v bodě S´.



Obr. 5 Sobě odpovídající diagram trajektorie planety a diagram vektorů rychlostí (zde jsou vektory kresleny ve zvětšeném měřítku, směry jsou však zachovány).

Je pozoruhodné, že takto nakreslený *diagram trajektorie* s vyznačenými vektory rychlosti $\mathbf{v_i}$ a *diagram vektorů rychlostí* s vyznačenými vektory změn vektorů rychlostí $\mathbf{\Delta v_i}$ jsou si podobné. Když bychom za Δt zvolili např. jednu setinu oběžné doby T, pak by oba diagramy byly pravidelnými stoúhelníky. V obou případech, jak body P_i , tak body Q_i, leží na kružnicích, z nichž ta první má poloměr r a druhá má poloměr rovný velikosti rychlostí v. Protože předpokládáme, že trajektorií planety je kružnice, jsou velikosti vektorů $\mathbf{v_i}$ stejné. Pro velikost rychlosti v bude tedy platit, že je to podíl obvodu kružnice a příslušné doby oběhu T .

(1) $$v = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{r\Delta\alpha}{\Delta t} = \frac{r}{\Delta t}\frac{2\pi}{T}\Delta t = \frac{2\pi r}{T} \quad .$$

Podobně můžeme nyní vypočítat velikosti přírůstků rychlosti Δv:

(2) $$\Delta v = v\Delta\alpha = \frac{2\pi v}{T}\Delta t \quad .$$

Když do této rovnice dosadíme za velikost rychlosti z předchozí rovnice obdržíme

(3) $$\Delta v = \frac{4\pi^2 r}{T^2}\Delta t \quad .$$

Než pokročíme dále, zamysleme se krátce nad tím, co jsme vypočítali. Pouze na základě definice rychlosti a geometrické podobnosti diagramů trajektorie a rychlostí jsme vypočítali vztah pro *velikost změny rychlosti* za časový interval Δt. Pozoruhodné na tomto výrazu je to, že tam vystupuje T^2 ,tj. druhá mocnina doby oběhu planety, která vystupuje též ve III. Keplerově zákonu. Z něho pro všechny planety Sluneční soustavy plyne, že poměr

(4) $$\frac{T^2}{r^3} = k \quad ,$$

kde k je konstanta. Když dosadíme tuto matematickou formulaci III. Keplerova zákona do (3), pak pro změnu velikosti rychlosti Δv dostáváme

(5) $$\Delta v = \frac{4\pi}{r^2 k}\Delta t = k' \frac{1}{r^2}\Delta t \quad .$$

Jestliže také Newton dostal tento vztah, bezpochyby jej napadlo, že sled provedených *matematických kroků je možné obrátit*, tzn., že ze znalosti vztahu (5) dojdeme ke kružnicové trajektorii planety.

4.1 Blížíme se k cíli

V tomto stadiu úvah je zřejmé, že II. a III. Keplerův zákon plyne pouze z předpokladu platnosti *zákona setrvačnosti* a hypotézy, že *změna rychlosti planety směřuje ke Slunci*, a že její velikost je dána vztahem (5).

Zákon setrvačnosti říká, že změnu vektoru rychlosti tělesa může způsobit pouze vnější síla. Při kreslení našich diagramů jste si jistě všimli, stejně asi jako Newton, že vektor změny rychlosti míří stále ke Slunci, avšak velikost tohoto vektoru je úměrná velikosti časového intervalu Δt, který uběhl mezi průchodu planety sousedními body $P_{i-1}P_i$. Newton vyslovil hypotézu, že změna rychlosti je úměrná časovému intervalu a konstanta úměrnosti souvisí s působící sílou (zjednodušení formulace dnešního *II. Newtonova zákona*). Matematicky tuto hypotézu vyjádříme takto:

(6) $$\Delta v = K\Delta t \quad .$$

Z této rovnice (6) a z rovnice (5) plyne, že velikost síly mezi planetou a Sluncem je úměrná faktoru $1/r^2$ a směřuje ke Slunci. Je tedy zřejmé, že nyní již stojíme na prahu objevu Newtonova gravitačního zákona, ale nějaký ten krůček k němu ještě chybí.

Tady pravděpodobně sehrála u Newtona významnou roli Galileova analýza šikmého vrhu a volného pádu, z níž vyplývá, že ve *vzduchoprázdnu padají všechna tělesa stejně* rychle. To znamená, že změna rychlosti tělesa nezávisí na síle, kterou je přitahováno k Zemi, tj. na jeho hmotnosti.Tento experimentální fakt tedy vyžaduje, aby rovnice (6), má-li platit i pro šikmý vrh, byla doplněna o faktor *1/m* , kde *m* je hmotnost tělesa. Pro pozemské experimenty s pohyby těles je vše v pořádku, protože můžeme předpokládat, že jejich hmotnost m je úměrná tíhové síle těles $F_z = gm$, kde g je konstanta úměrnosti, bez ohledu na to, jak vysoko je nad zemským povrchem. Tím dostáváme už *dnešní formulaci II. Newtonova zákona*

$$\Delta\mathbf{v} = K\frac{\mathbf{F}}{m}\Delta t \ . \tag{7}$$

Aby tento vztah byl v pořádku i pro planety, musí velikost síly F mezi Sluncem a všemi planetami být úměrná jak hmotnosti planety m , tak i faktoru $1/r^2$, aby se po dosazení za F do rovnice (7) se hmotnost planet m vykrátila. Síla mezi planetami a Sluncem musí tedy mít matematický tvar

$$F_S = K\frac{m}{r^2} \ . \tag{8}$$

Kdyby se totiž tak nestalo, tak Keplerovy zákony by musely nějak obsahovat hmotnosti planet. A jak víme, o ničem podobném se v nich nehovoří. A nejen to! Jedině díky tomu, že se ve vztahu (7) (tj. v *II. Newtonově zákoně*) hmotnost m tělesa vykrátí, tak všechna pozemská tělesa se pohybují kolem Slunce stejně jako Země (tzn., že Zemi ani nepředbíhají, ani se za ní neopožďují), přes to, že se jejich hmotnost m od hmotnosti Země tak významně liší. Denní samozřejmost, že tužka na stole leží půl roku na stejném místě, je důsledek toho, že *doby oběhu tužky* a *Země kolem Slunce* jsou přesně stejné, a nikoliv tím, že tužka je přitahována k Zemi, a proto letí vesmírem společně se Zemí.

Asi takovými úvahami o *pojmu síla* dosáhl Newton toho, že vztah (7), tj. II. Newtonův zákon, platí jak pro planety, tak pro pohyb těles na Zemi.

4.2 Nová veličina *síla* a III. Newtonův zákon

Použitím *síly* jako nové veličiny v matematické formuli však vznikl problém, *co vše je možné považovat za sílu* a *jak tuto veličinu měřit*, tj. jaké číslo za ni dosadit do vztahu (7). Z hlediska *pohybu* je síla každé vnější působení, které vede ke změně rychlosti tělesa. Ke změně rychlosti tělesa při volném pádu vede *tíhová síla*. Tím známe jeden druh síly a o něj se můžeme opřít.

Než budeme pokračovat dále, uvažme, *jak se měřily jiné mechanické veličiny*. Měřily se, a dodnes se to tak stále dělá, že se porovnávají stejné vlastnosti. Stejná délka dvou tyčí se poznala tak, že se položily vedle sebe, dva časové intervaly považoval Galilei za stejné, když při nich vyteklo z nádoby stejné množství vody. Dva pytle obsahovaly stejné množství mouky nebo brambor, když byly stejně těžké, což se snadno poznalo na rovnoramenných vahách podle toho, že byly oba stejně přitahovány k Zemi.

Podle této osvědčené praxe se nabízelo, že je možné považovat za sílu každé působení na těleso, které je možné uvést do rovnováhy s tíhou tělesa. Těleso nebude padat, když proti jeho tíži bude působit pružina, o jejímž působení na ruku víme, že je podobné jako tíha nějakého tělesa.Asi takto byla objevena *pružná síla*. Pravděpodobně takové i další podobné úvahy vedly Newtona k formulaci jeho *III. pohybového zákona*, často zvaného *zákona vzájemného silového působení*, a takto lze tedy chápat jeho postavení v mechanice, tj. jako *způsob hledání nových sil a jejich měření*.

4.3 Konečně je Newtonův gravitační zákon na světě

Nyní již můžeme dokončit úvahy vedoucí ke konečnému vztahu pro sílu mezi planetami a Sluncem. Newton jistě nenacházel žádného důvodu pro to, aby upřednostňoval jedno těleso před druhým, planetu před Sluncem. Z tohoto důvodu asi Newton zcela logicky začal předpokládat, že velikost síly, kterou je planeta přitahována k Zemi je stejně velká, jako síla, kterou je Slunce přitahováno k planetě. Pak tedy je úměrná jak hmotnosti planety m, tak hmotnosti Slunce M, a platí

$$F = K\frac{Mm}{r^2} \quad . \tag{8}$$

V Newtonově gravitačním zákoně dnes píšeme gravitační konstantu κ Podobná konstanta se vyskytuje u každého zákona síly a tyto konstanty souvisejí se soustavou jednotek. U zákona pružné síly je to tuhost pružiny, u Coulombova zákona z elektrostatiky je to $1/4\pi\varepsilon$ (ε … permitivita vakua), atd. První měření gravitační konstanty provedl Cavedish roku 1798 *torsními vahami*, tedy více než za 100 let po vydání Newtonových *Principií*.

Tímto bychom mohli naši rekonstrukci Newtonových úvah vedoucích k objevu základních zákonů mechaniky ukončit. Poznamenejme ještě, že za jejich jasnou formulaci vděčíme přísnému matematickému myšlení, jehož znakem je snaha *minimalizovat všechny předpoklady do tvrzení podobným matematickým axiomům Euklidovské geometrie.*

5 Od Newtona ke Keplerovi

Logika vedení důkazů si však žádá, abychom celý postup ještě obrátili. Při hledání matematického tvaru Newtonova gravitačního zákona jsme předpokládali, že trajektorie planety je kružnice. Mohlo by se tedy zdát, že Newtonovy zákony nemusí vést k výpočtu správné, tj. *eliptické trajektorie*, jak uvádí *I. Keplerův zákon*, ale že nám vždy vyjde jen trajektorie kruhová. Měli bychom tedy dokázat, že z platnosti Newtonových zákonů dostaneme i I. Keplerův zákon, tj. že planety se pohybují po elipsách a Slunce je v jednom společném ohnisku.

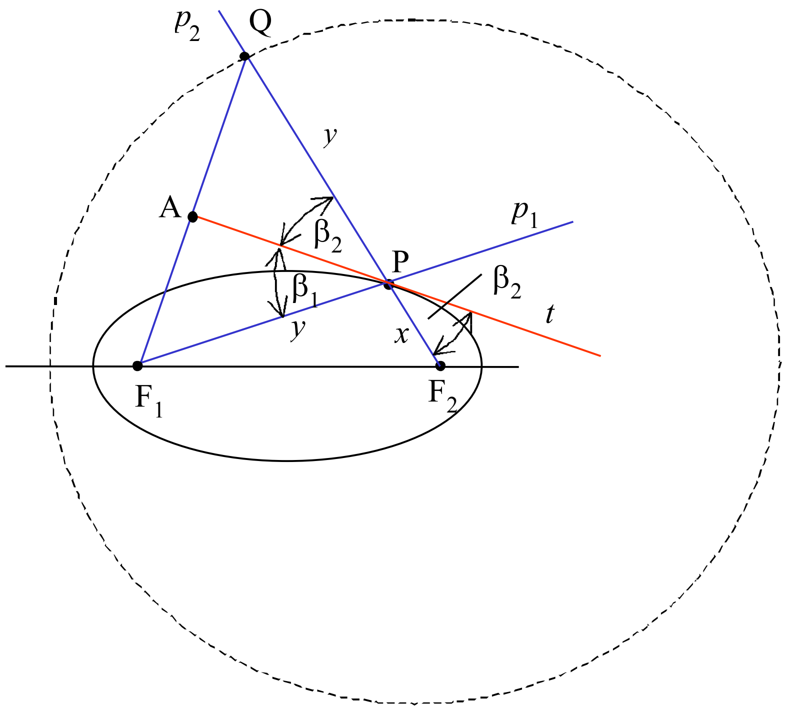
Zdá se, že tento důkaz nelze vést matematicky jinak, než přes aplikaci diferenciálního a integrálního počtu. Touto cestou šel i Newton. Avšak *nositel Nobelovy ceny R. Feynman*, známý svými originálními myšlenkovými postupy při výkladu základního kurzu fyziky na vysokých školách, vymyslel originální řešení i v tomto případě a *čistě geometrickými úvahami* tento důkaz provedl. Opíral se v něm o jednu, pro nás méně známou geometrickou vlastnost elipsy, a sice o *řídící kružnici elipsy*. Jistě stojí zato se s jeho postupem uvedeným ve [2] seznámit.

5.1 Trocha geometrie na začátek

Jak víme z jiných úvah, vektor rychlosti má směr tečny k trajektorii. V našem případě uvažujme, že jde o elipsu. Ujasněme si tedy nejdříve, jak čistě geometrickými prostředky sestrojíme tečnu k danému bodu P uvažované elipsy.

5.1.1 Konstrukce tečny k elipse a řídící kružnice elipsy.

Mějme dánu elipsu s ohnisky F_1 a F_2 a na ní bod P - viz obr. 4 . Tečna k elipse v bodě P má tu vlastnost, že její úhel β_1 s úsečkou F_1P je stejný, jako s úsečkou F_2P ($\beta_1 = \beta_2$). Fyzikálně si tuto vlastnost můžeme představit tak, že paprsek světla jdoucí z jednoho ohniska se v bodě P odráží jako na zrcadle, které má směr tečny, a pak prochází druhým ohniskem. Tečnu sestrojíme následovně:



Obr. 6 Konstrukce řídící kružnice elipsy *k*.

Sestrojíme polopřímky p_1 a p_2 odpovídající výše zmíněným paprskům a ve vzdálenosti $y = |F_1P|$ od bodu P vyznačíme na p_2 bod Q , který pak spojíme s bodem F_2 . Trojúhelník F_1PQ je rovnoramenný a bod A půlí jeho základnu. Přímka t procházející body P a A dělí úhel při vrcholu P na dva stejné úhly. Ostrý úhel β_1 mezi úsečkou F_1P a AP je stejný jako mezi PQ a AP a tedy jako β_2. *Přímka t je tedy hledaná tečna*. Všechny body Q , které takto sestrojíme ke každému bodu elipsy P, pak budou ležet na kružnici k o poloměru $r = x + y$ se středem v F_2 . Tato kružnice se nazývá *řídící kružnicí elipsy* .

5.1.2 Postup této geometrické konstrukce můžeme obrátit

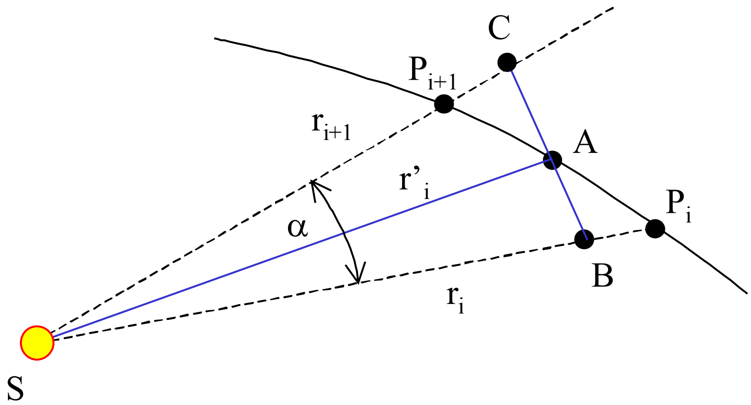
Nechť bod F_1 je střed řídící kružnice elipsy o poloměru r . Zvolme uvnitř elipsy ještě druhý bod F_2 . Tím je elipsa zadána a při konstrukci bodů P ležících na ní lze postupovat takto:

Body F_1 a F_2 jsou ohniska hledané elipsy. Jimi prochází hlavní osa. Na řídící kružnici zvolíme libovolný bod Q a spojíme jej s bodem F_1 a rovněž s bodem F_2 . V bodě A , který půlí úsečku QF_2 vztyčíme kolmici. Průsečík této kolmice s přímkou, na níž leží body F_1 a Q , je hledaný bod P ležící na elipse.Tímto postupem umíme tedy ke každému bodu Q řídící kružnice sestrojit příslušný bod elipsy P.

5.2 Cesta k diagramu rychlostí

Takto vyzbrojeni geometrickými znalostmi se můžeme bez obav pustit do důkazu I. Keplerova zákona vycházejíce ze zákonů Newtonových. Naším prvním cílem bude sestrojení diagramu rychlostí planet, aniž bychom předpokládali, že trajektorie je kružnice.Budeme pouze předpokládat, že se pohybuje kolem Slunce po uzavřené křivce a že na ni působí síla o velikosti dané vztahem (8) směřující ke Slunci.

Na uzavřené trajektorii planety , která není kruhová, zvolme opět body P_i , ale tentokrát tak, že jejich spojnice se Sluncem S spolu svírají *stejné (libovolně malé) úhly* α , jak je znázorněno na obr. 5 .



Obr. 7 K výpočtu plošné rychlosti

Vektor rychlosti planety má směr tečny v bodě P_i, kdežto vektor změny rychlosti planety $\Delta \mathbf{v}_i$ mezi jednotlivými body P_i má směr od planety ke Slunci. Pro velikost změny rychlosti jsme našli vztah (5), který teď s ohledem na různě dlouhé průvodiče r_i a různě dlouhé časové intervaly Δt_i mezi sousedními polohami P_i musíme napsat ve tvaru

$$\Delta v_i = K \frac{1}{r_i^2} \Delta t_i \quad . \tag{9}$$

Cílem našich úvah je nyní vypočítat velikost tohoto vektoru. Za tím účelem časový interval Δt_i nyní vyjádříme pomocí plošné rychlosti p . Ta je definována jako hodnota zlomku, v jehož čitateli je obsah plochy, kterou opíše průvodič r_i za Δt_i , a ve jmenovateli Δt_i. Podle obr. 5 je to obsah trojúhelníka $SP_i P_{i+1}$. Protože úhly α volíme velmi malé, je obsah tohoto rovnoramenného trojúhelníka SBC roven $r'^2_i \alpha$, kde r'_i je střední vzdálenost planety od Slunce během časového intervalu Δt_i . Velikost plošné rychlosti je pak dána vztahem

$$p = \frac{r'^2_i \alpha}{\Delta t_i} \quad . \tag{10}$$

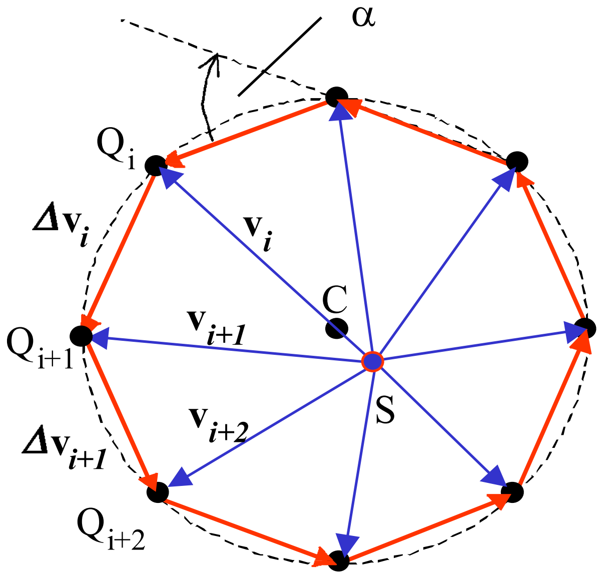
Vypočtěme nyní z tohoto vztahu Δt_i a dosaďme do vztahu (9)

(11) $$\Delta v_i = K\frac{1}{r_i^2}\Delta t_i = K\frac{1}{r_i^2}\frac{r'^2_i\,\alpha}{p} = K\frac{\alpha}{p} = konst.$$

Dostali jsme *velice důležitý výsledek* spočívající v tom, že ve všech bodech trajektorie P_i, nezávisle na střední vzdálenosti r_i od Slunce, je *velikost vektoru změny rychlosti konstantní,* a podle Newtonova gravitačního zákona směřuje ke Slunci. Připomeňme si, že tohoto pozoruhodného, a pro další postup zásadního, výsledku jsme dosáhli šikovnou volbou bodů P_i na trajektorii. Místo stejných časových intervalů jsme nyní zvolili stejné úhly mezi průvodiči.

5.2.1 Nyní můžeme sestrojit příslušný diagram rychlostí

Úhly α mezi průvodiči SP_i jsou stejné a vektory $\mathbf{\Delta v_i}$ směřují ke Slunci. Proto i v diagramu rychlostí je mezi změnami rychlostí $\mathbf{\Delta v_i}$ a $\mathbf{\Delta v_{i+1}}$ také úhel α. Protože $\mathbf{\Delta v_i}$ mají stejnou velikost, je diagramem rychlostí pravidelný n- úhelník, jestliže $\alpha = 2\pi/n$.



Obr. 8 Diagram rychlostí planety pohybující se po uzavřené křivce.

Střed kružnice opsané tomuto n-úhelníku označme C. Alespoň ze dvou bodů Q_i nyní vedeme dovnitř kružnice polopřímky, které jsou vždy rovnoběžné s příslušnými úsečkami $P_i\,P_{i-1}$ z diagramu trajektorie. Tyto polopřímky se protnou v bodě S, který je společným průsečíkem všech těchto polopřímek, protože jde o princip konstrukce diagramu rychlostí. Je zřejmé, že orientované úsečky SQ_i mají význam vektorů rychlosti.

5.2.2 Co víme o diagramu rychlostí planet?

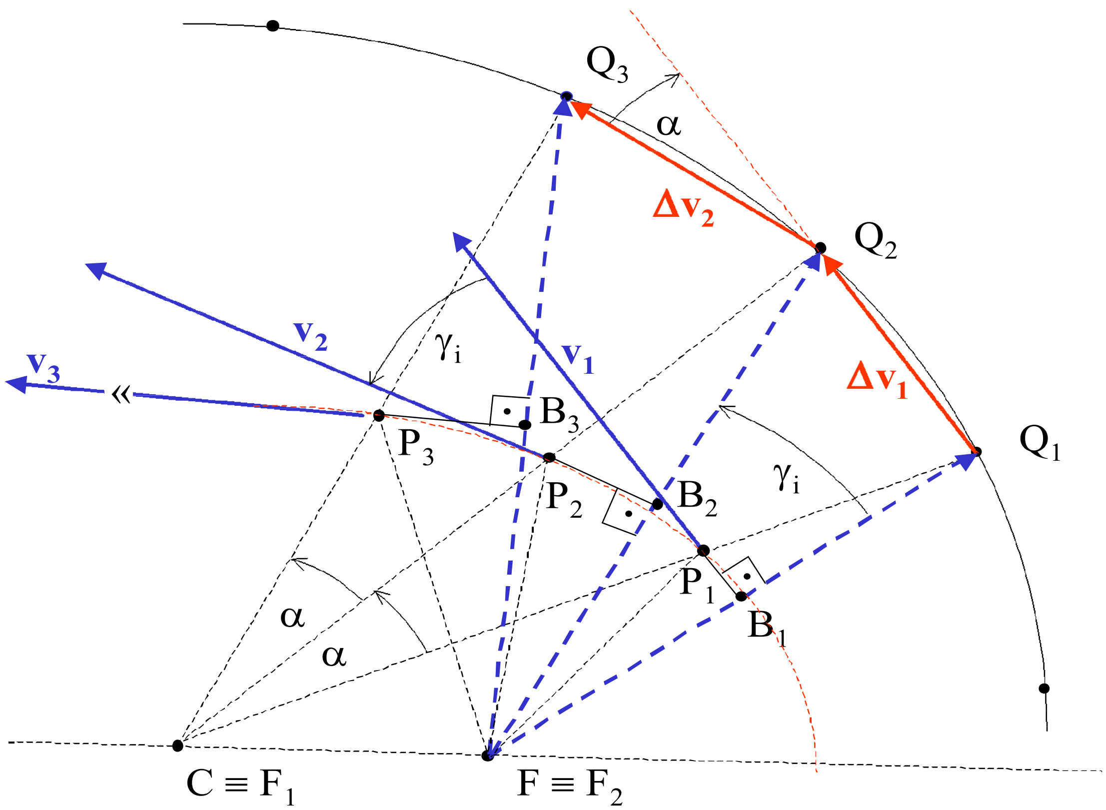
Každá planeta má tedy diagram rychlostí ve tvaru pravidelného mnohoúhelníka. Při zmenšování úhlů α přejde mnohoúhelník v kružnici se středem v bodě C. Připomeňme, že už jednou jsme v tomto textu ukázali, že diagramem rychlostí je pravidelný n-úhelník, ale to bylo jen v případě, kdy trajektorií planety byla kružnice. Nyní jsme žádný takový omezující předpoklad neudělali. Předpokládali jsme pouze platnost Newtonova gravitačního zákona a Newtonových pohybových zákonů

Tím jsme se dostali do poloviny důkazu platnosti I. Keplerova zákona. Víme že, diagram rychlostí každé planety je určen kružnicí se středem v C (pravidelný n-úhelník) a dalším bodem S uvnitř ní. Jeho poloha určuje excentricitu a polohu elipsy v prostoru podobně, jako volba vektoru rychlosti při aplikaci infinitesimálního počtu. Jde nyní o to, jak na základě těchto faktů sestrojit diagram trajektorie planety. Po naší předchozí geometrické průpravě to již nebude nijak obtížné.

5.2.3 Od diagramu rychlostí k trajektorii planety

Máme tedy dánu kružnici se středem C a zvolíme bod F ležící mimo střed uvnitř kružnice a víme, že jde o diagram rychlostí planety odpovídající velice malým úhlům α – viz obr. 5 . Volba bodu F odpovídá volbě počátečních podmínek při infinitesimálním výpočtu. Naším úkolem je sestrojit k tomuto diagramu trajektorii planety. Budeme postupovat takto:

Na kružnici zvolíme libovolný bod Q_1 a spojíme jej s body C a F . Najdeme bod B_1 , který půlí úsečku Q_1F a vztyčíme v něm kolmici k . Tato kolmice protne úsečku Q_1C v bodě



Obr. 9 Konstrukce trajektorie z diagramu rychlostí. Slunce leží v bodě F.

P_1 , což je už první hledaný bod P_1 trajektorie planety. Tímto postupem najdeme ke každému bodu Q_i bod trajektorie P_i . Jak už víme z předchozího textu, všechny body P_i takto sestrojené leží na elipse a body C a F jsou její ohniska F_1 a F_2 a průvodiče CP_i spolu skutečně svítají stejný úhel

α . Naproti tomu úhly γ_i mezi polopřímkami FQ_i jsou různé, jak to odpovídá úhlům mezi vektory rychlosti. Důkaz I. Keplerova zákona je tedy touto úvahou u konce.

Všimněme si však ještě některých fyzikálních zajímavostí. Kolmice k_i určuje směr rychlosti planety v bodě P_i . Velikost rychlosti je dána délkou úsečkou Q_iF. Přenesením této úsečky na kolmici od bodu P_i , můžeme přesně zakreslit i vektor rychlosti planety v daném bodě.

Univerzálnost tohoto postupu při předpovědi možných trajektorií planet (pohybu těles v centrálním gravitačním poli) vynikne, když bod F zvolíme nikoliv uvnitř, ale mimo kružnici. Popsaná konstrukce pak v tomto případě vede k hyperbolické trajektorii.

6 Závěr

Díky geniálnímu fyzikovi a vynikajícímu učiteli R. Feynmanovi jsme mohli sledovat, jakou roli asi hrály Keplerovy zákony nejen při objevu Newtonova gravitačního zákona, ale i při formulaci pohybových zákonů. Feynman na pohybu planet ukázal, jak může být užitečné a plodné všímat si kromě trajektorie a působících sil i *diagramů rychlostí* u všech pohybů obecně. Tento způsob vede ke správnému chápání rychlosti jako vektoru a správnému chápání souvislosti mezi vektorem změny rychlosti a vnější silou.

Velké přírodovědné objevy jsou obklopeny velkými myšlenkovými dramaty. V zápase mezi starým a novým byl vždy nejmocnější zbraní objevitelů *experiment*, *logika uvažování a matematická formulace myšlenek*. To platí dodnes. Do historie však vstoupili pouze ti, kteří uměli rozpoznat podstatná experimentální fakta od nepodstatných a měli i odvahu své myšlenky předložit světové veřejnosti. Nastíněná souvislost Keplerových a Newtonových zákonů je toho krásným příkladem.

[1] Namer, E.: *Případ Galilei* , Nakladatelství MF, Praha 1982.

[2] Goldstein, D. L., Goldstein, J. R.: *Feynman's Lost Lectures* , W. W. Norton Company, Inc., New York 1996.

[3] Kuběna, J.: *Newtonova mechanika v době počítačů*, Nakladatelství MAFY a GAUDEAMUS, Hradec Králové 1997.

[4] Halliday,D., Resnick, R., Walker, J. *Fyzika*. Vysokoškolská učebnice fyziky,. Nakladatelství PROMETHEUS, Praha 2000.

[5] Nachtikal, F.: *Technická fyzika* , SNTL, Praha 1947.