UČEBNÍ TEXTY VYSOKÝCH ŠKOL

České vysoké učení technické
v Praze

Fakulta elektrotechnického
inženýrství

TECHNICKÁ FYSIKA

Dr František Nachtikal

1952

Státní pedagogické nakladatelství
Praha

duchém příkladu měření teploty teploměrem rtuťovým. Měření koná pozorovatel podle určité metody použitím měřicích strojů. To dává vznik třem druhům systematických chyb, jež jsou:

1. *Chyby metody*, jež vznikají z neúplnosti nebo nedokonalosti použitého způsobu měření. Na př. teplotu měříme zpravidla teploměrem rtuťovým, ač je definována podle rozpínavosti ideálního plynu (t. zv. thermodynamická stupnice, odst. 128). Abychom takovéto chyby odstranili, zjistíme kritickým rozborem metody jejich původ a možno-li i velikost a zavedeme pak příslušnou opravu. V uvedeném příkladě je třeba znáti objemovou roztažnost rtuti podle thermodynamické stupnice, abychom mohli číselně stanoviti hledanou opravu. Nebo stanovíme-li zrychlení tíhové reversním kyvadlem, používáme konečného rozkyvu. Ale použitý vzorec předpokládá (v limitě) nulový rozkyv. Musíme tedy naměřenou dobu kyvu opraviti na limitní případ nulového rozkyvu. Nejlépe je touž veličinu měřiti různými metodami. Souhlas jejich výsledků je pak zárukou správnosti naměřené veličiny (příklad: měření rychlosti světla různými metodami).

2. *Chyby měřicích strojů*, vznikající z jejich nedokonalosti. Na př. skleněná nádobka teploměru se dosti dlouho po zhotovení tlakem vnějšího vzduchu smršťuje. Stupnice brzo po zhotovení nanesená se proto stává nesprávnou a teploměr ukazuje teplotu vyšší. Jiná chyba teploměru vzniká tím, že světlost kapiláry není všude stejná. Takovéto chyby odstraňujeme kontrolou stroje (na př. srovnáváme údaje daného teploměru s teploměrem normálním). Tak stanovíme korekční tabulku daného stroje, podle níž pak údaje stroje opravujeme. Jiné příklady: kontrola závaží, kontrola stupnice ampérmetru a voltmetru.

Žádný měřicí přístroj nemůže býti absolutně přesný. Přípustná jeho odchylka se nazývá *tolerance*. Na př. přesné měřítko na 1 m má toleranci 0,1 mm, což znamená, že jeho skutečná délka musí býti mezi 99,99 cm a 100,01 cm.

3. *Chyby osobní* mají původ v osobnosti pozorovatelově. Zejména při přesném určování časových okamžiků liší se odhady různých pozorovatelů (zkušených o 0,2 sec, méně zapracovaných až o 0,5 sec) podle jejich vnímavosti. Také při odhadování desetin dílku nevědomky zaokrouhlují někdo nahoru, jiný dolů. Chyby tohoto druhu lze vymýtiti tím, že touž veličinu odhadují různí pozorovatelé. Nejlépe se odstraní tím, že se osobní odhad nahradí strojovým záznamem (na př. neosobní mikrometr při astronomickém měření času).

Chyby nahodilé se liší od předešlých tím, že neznáme jejich původ. Když týž pozorovatel týmž strojem opakuje totéž měření několikrát po sobě, liší se výsledky poněkud od sebe. Mají původ v náhodě (na př. v různé teplotě stroje, v různém přitlačení při měření tloušťky drátu mikrometrem, ve změněné poloze oka při odčítání stupnice a pod.). Jejich vliv zmírňujeme tím, že totéž měření nezávisle na sobě několikrát opakujeme. Protože chyby v jednom směru jsou právě tak možné jako ve směru opačném, je pravděpodobné, že v celkovém součtu se navzájem ruší zcela neb alespoň z největší části. Nejpravděpodobnější hodnotou je pak aritmetický střed (průměr) jednotlivých měření.

Jsou-li tedy naměřené hodnoty $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, je nejpravděpodobnější hodnota výslodku

$$a = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n).$$

Odchylky Δ_k jednotlivých naměřených hodnot a_k od průměru a jsou

$$\Delta_1 = a - a_1,\ \Delta_2 = a - a_2,\ \ldots,\ \Delta_n = a - a_n$$

Je zřejmé, že algebraický součet těchto odchylek se musí rovnati nule, v čemž spočívá kontrola počítání. Průměr a má důležitou vlastnost, že pro něj součet čtverců odchylek je nejmenší.

Součet S dvojmocí odchylek od libovolné hodnoty x

$$S = (x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + \ldots + (x - a_n)^2$$

je nejmenší pro takovou hodnotu x, pro niž platí

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} = 0 \text{ čili } 2(x - a_1) + 2(x - a_2) + \ldots + 2(x - a_n) = 0.$$

Z toho plyne řešením

$$x = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = a,$$

čímž je důkaz proveden.

Jakožto *směrodatnou odchylku* zavádíme takovou odchylku σ od průměru, jejíž dvojmoc se rovná aritmetickému středu dvojmocí všech odchylek Δ, tedy

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\Sigma(a - a_k)^2 = \frac{1}{n}\Sigma\Delta^2, \quad \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma\Delta^2}{n}}.$$

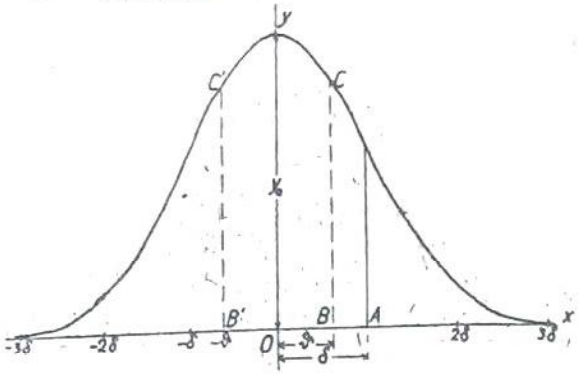
Podle velikosti směrodatné odchylky odhadujeme přesnost měření, jež je tím větší, čím je σ menší.

Chyby velké jsou zajisté méně pravděpodobné a proto méně časté než chyby malé. Gauss, opíraje se o počet pravděpodobnosti, stanovil t. zv. *normální rozložení chyb*. Budiž všech měření velmi velký počet N. Pak počet chyb připadajících mezi x a $x + \Delta x$ jest úměrný šířce toho intervalu Δx, tedy $y\,\Delta x$. Veličina y stanoví *četnost* chyb o velikosti x a pro ni platí

$$y = \frac{N}{\delta\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\delta^2}} = y_0 \cdot e^{-\frac{x^2}{2\delta^2}}.$$

Při tom δ znamená směrodatnou odchylku měřenou od správné hodnoty a nazývá se *střední chyba* jednotlivého měření; y_0 je největší četnost (pro nulovou chybu).

Z grafického znázornění (obr. 1) této funkce je zřejmé, jak četnost chyb s jejich velikostí na obě strany klesá. Při malém počtu měření platí ovšem Gaussův zákon jen zhruba. Průměr naměřených hodnot se také poněkud liší od správné hodnoty a proto střední chyba δ (čítaná od s p r á v n é hodnoty) je poněkud v ě t š í než směrodatná odchylka σ (čítaná od průměru). Počet pravděpodobnosti vede k výsledku, že je třeba jmenovatele n ve vzorci pro σ^2 zmenšiti o 1. Je tedy s t ř e d n í c h y b a δ jednotlivého měření



Obr. 1. Gaussovo normální rozložení chyb.

$$\delta = \pm \sqrt{\frac{\Sigma \Delta^2}{n-1}}$$

Gaussův vzorec můžeme psáti ve tvaru

$$y = y_0 \cdot e^{-h^2 x^2}, \quad h = \frac{1}{\delta\sqrt{2}}$$

Četnost chyb y se zmenšuje velmi rychle s rostoucí hodnotou hx. Čím je větší h, tím jsou chyby těsněji seskupeny kolem střední hodnoty (Gaussova křivka se zúžuje) a proto měření je přesnější. Veličina

$$h = \frac{1}{\delta\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{n-1}{2 \cdot \Sigma \Delta^2}}$$

stanoví tedy *míru přesnosti*.

Vypočítaný průměr a z daných měření má ovšem mnohem menší chybu než jediné měření. Zjistili bychom to tím, kdybychom na př. danou veličinu měřili 10krát a vypočetli z toho průměr a', pak znovu 10krát a zase vypočetli průměr a'' atd. Průměry $a', a'', \ldots$ z těchto desítek měření budou se od sebe lišiti mnohem méně. Kvadratický průměr pravých chyb takto počítaných průměrů stanoví *střední chybu* $\bar{\delta}$ průměru a pro ni platí

$$\bar{\delta} = \pm \sqrt{\frac{\Sigma \Delta^2}{n(n-1)}}.$$

Podle této střední chyby průměru můžeme dobře posouditi, do jaké míry je nalezený výsledek spolehlivý. V něm podržíme jen ta desetinná místa, která jsou měřením zaručena (po př. nejistá jen na jednu jednotku).

Můžeme si ještě položiti otázku, jak veliká chyba je nejpravděpodobnější, a nazveme ji *pravděpodobnou chybou* ϑ. Je to taková chyba, že právě polovička skutečných chyb má menší hodnotu a polovička větší hodnotu než pravděpodobná chyba ϑ; v grafickém znázornění (obr. 1) se to jeví tím, že plocha $BB'C'C$ mezi úsečkami $\vartheta = OB$ a $-\vartheta = OB'$ je právě polovičkou celé plochy, vymezené Gaussovou křivkou a osou úseček. Z Gaussova rozložení chyb lze odvoditi, že pravděpodobná chyba činí přibližně $\frac{2}{3}$ chyby střední (přesněji $0{,}67449\delta$). Je tedy pravděpodobná chyba jednotlivého měření

$$\vartheta = 0{,}67449\delta \doteq \pm \frac{2}{3}\sqrt{\frac{\Sigma\Delta^2}{n-1}}$$

a pravděpodobná chyba výsledku (průměru)

$$\bar{\vartheta} = 0{,}67449\,\bar{\delta} \doteq \pm \frac{2}{3}\sqrt{\frac{\Sigma\Delta^2}{n\,(n-1)}}.$$

Chceme-li vyznačiti, do jaké míry je výsledek zaručen, připíšeme k němu jeho pravděpodobnou chybu; při tom ponecháme ovšem i to desetinné místo, na něž má pravděpodobná chyba vliv. Tak na př. pro nulovou polohu sférometru bylo stanoveno z 10 měření

$$(0{,}1193 \pm 0{,}0004)\ \text{mm}.$$

Znamená to: Průměr všech měření je 0,1193 mm a má pravděpodobnou chybu 0,0004 mm. Je tedy stejně pravděpodobné, že správná hodnota leží mezi 0,1189 a 0,1197 mm, jako že leží vně toho intervalu. Za zaručená místa považujeme 0,119 mm, ale výsledek přece uvádíme 0,1193, řídíce se při tom touto dohodou: předposlední číslice v každém údaji musí býti jistá, ale poslední číslice se může lišiti o několik málo jednotek.

Příklad výpočtu střední a pravděpodobné chyby je v Zákl. prakt. fys.,*) odst. 5.

Při číselném počítání výsledků je nemístno počítati na více míst, než kolik je pozorováním zaručeno; stačí tedy zkrácené násobení nebo dělení. Mnohdy stačí počítati čtyřmístnými log. tabulkami, po př. log. pravítkem. Pro bezpečnost počítáme zpravidla o jedno místo dále, abychom k chybám pozorovacím nepřidávali ještě chyby početní, ale výsledek zkrátíme jen na tolik míst, kolik je zaručeno.

Pravá hodnota stanovené chyby se nazývá *absolutní* (prostá) chyba. Při posuzování přesnosti naměřené veličiny musíme přihlížeti netoliko k její absolutní chybě, nýbrž i k vlastní velikosti měřené veličiny. Stanovíme-li na př. pro výpočet odporu měděného drátu délku 100,00 cm a průměr 0,5 mm s touž absolutní chybou 0,1 mm, je délka stanovena s dostatečnou přesností, ale průměr není určen uspokojivě. Pro spolehlivější posouzení přesnosti zavádíme proto *relativní* (poměrnou) chybu, jež znamená poměr absolutní chyby k veličině měřené; mnohdy se relativní chyba vyjadřuje v procentech a pak ji nazýváme *procentovou*

*) B. Macků, Vl. Novák a F. Nachtikal, Základy praktické fysiky, 4. vyd., Brno 1936.

chybou. Byla-li tedy délka drátu 1 m stanovena s abs. chybou 0,1 mm, je relativní chyba 0,0001 a procentová chyba 0,01%; pro průměr 0,5 mm při stejné abs. chybě je relativní chyba 0,2 a procentová chyba 20%. — O počítání chyb viz též Zákl. prakt. fys., odst. 7.

Výsledek, stanovený několikerým opakováním téhož měření, při čemž byla zjištěna jeho pravděpodobná chyba, je sice *přesný* (t. j. shoduje se s vykonanými měřeními), ale ještě nemusí býti *správný*, t. j. nemusí se shodovati s pravou hodnotou měřené veličiny. Odchylka mohla by býti způsobena tím, že příslušné měření mělo určitou systematickou chybu, jež se při opakování měření vždy znovu vyskytuje. Větší důvěru ve správnost výsledku získáme tím, že touž veličinu měříme co možná různými metodami. To bylo důvodem, že na př. rychlost světla byla měřena několika lišícími se metodami; teprve, když ze všech metod vycházela táž hodnota ($c = 2,998 \cdot 10^{10}$ cm/sec), jsme oprávněni souditi, že nalezená hodnota je správná, tedy že vyjadřuje skutečnou velikost rychlosti světelné.

O největší přesnost měření se snažíme jen tehdy, když je měřená veličina také zcela přesně definována. Máme na př. stanoviti hustotu destilované vody a mořské vody. Pro destilovanou vodu snažíme se dosáhnouti co největší přesnosti, neboť to má skutečný význam. Ale mořská voda z různých moří obsahuje různé množství rozpuštěných látek a tím již není její hustota dostatečně definována. Stačí proto v takovémto případě metoda hrubší, jež je rychlejší a pohodlnější. Měřiti hustotu mořské vody zcela přesně mělo by význam jen tehdy, kdyby chemickou analysou bylo také přesně zjištěno její složení. Obecně volíme pro měření metodu jen tak přesnou, jak to odpovídá přesnosti definice měřené veličiny.