

# Výpočet zobrazovacích soustav

*Josef Kuběna,*

ÚFKL, Masarykova Universita, Brno, (2005)

## 1. Úvod

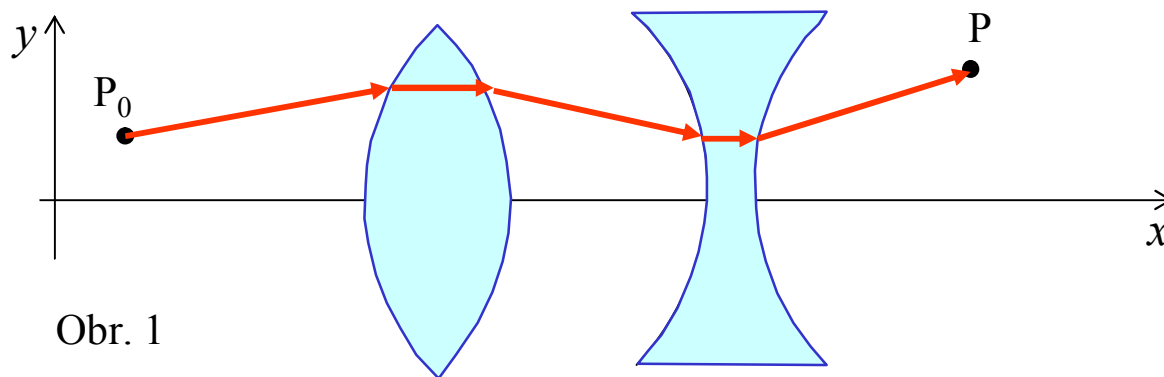
V tomto textu popíšeme postup, který zformuluje **univerzální algoritmus** pro výpočet parametrů libovolně složitých zobrazovacích soustav. Postup vychází z knihy [1] a je velice zajímavý i z matematického hlediska, protože na názorném příkladě ukáže užitečnost zavádění takových matematických objektů, jako jsou matice. Důsledně se používá souřadnicová soustava pro určování polohy objektů, takže **odpadá** dodatečná **znaménková konvence**, která se traduje např. i v knihách [2, 3, 4, 5].

- [1] E. L. O'Neil: *Introduction to Statistical Optics*. Addison-Wesley Publishing company, London 1963
- [2] J. Fuka, B. Havelka: *I. Optika*. Státní pedagogické nakladatelství, Praha 1961
- [3] E. Hecht, A. Zajac: *Optics*. Addison – Wesley Publishing Company, London 1974
- [4] A. Štrba: *Všeobecná fyzika 3. Optika*. Nakladatelství Alfa, Bratislava 1979
- [5] M. Vrbová a kol.: *Lasery a moderní optika*. Nakladatelství Prometheus, Praha 1994
- [6] J. Kuběna: *Základy optického zobrazování v době počítačů*. Knihovnička FO MAFY Hradec Králové 1997
- [7] K. Rektorys a spolupracovníci: *Přehled užití matematiky I a II*. Nakladatelství Prometheus, Praha 1995

## 2. Průchod paprsku optickou soustavou

V geometrické optice jsou základními pojmy **paprsek**, svazek rovnoběžných paprsků a svazek rozbíhavých nebo sbíhavých paprsků. Jejich protějškem ve vlnové optice je rovinná vlna a kulová vlna (rozbíhavá nebo sbíhavá). Paprsek má směr kolmý na vlnoplochu a v homogenním prostředí se šíří přímočaře.

Představíme-li si světelný paprsek procházející optickou soustavou čoček z bodu  $P_0$  do bodu  $P$ , pak jeho dráhu můžeme složit vždy z několika **lomů** na kulových plochách a z **přímkových úseků** mezi nimi -viz obr.1 Toto je základní schéma následujícího výkladu geometrické optiky. Jeho osnovu tvoří vhodný způsob popisu paprsku a optické soustavy.



Obr. 1

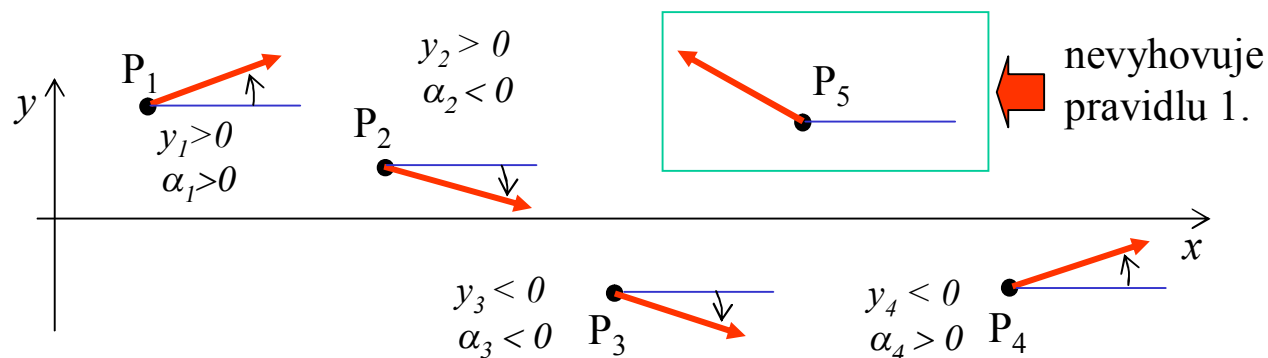
## 2.1 Charakteristiky paprsku

Pro popis dráhy je nejdříve nutné zavést **souřadnicovou soustavu  $x, y$** . Zvolíme ji následujícím způsobem a tuto volbu budeme vždy dodržovat:

**Pravidlo 1.** Osa  $x$  bude mít směr průchodu světla soustavou a bude totožná s osou symetrie soustavy kulových lámavých ploch. Počátek osy  $x$  bude vždy ležet v průsečíku osy s první lámavou plochou.

### Pravidlo 2.

V bodě  $P(x,y)$  bude paprsek definován **dvěma parametry**: souřadnicí  $y$  bodu  $P$  a úhlem  $\alpha$ , který svírá paprsek s kladným směrem osy  $x$ . Úhel  $\alpha$  měříme kladně ve směru proti chodu hodinových ručiček.



Obr. 2

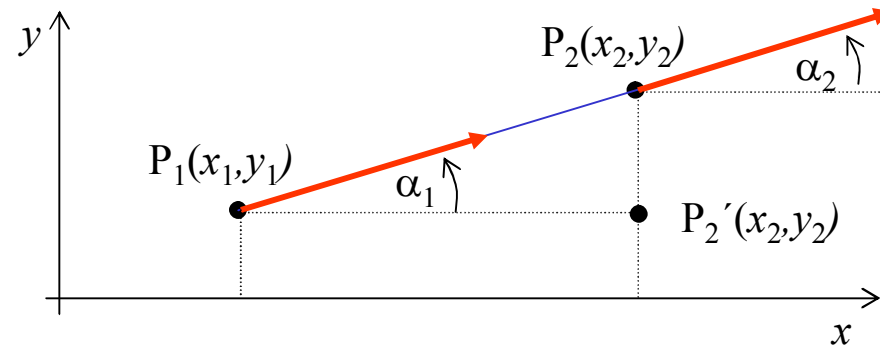
Na obr.2 je nakresleno několik možných situací chodu paprsku, jehož směr šíření je znázorněn vektorem. Souřadnice  $x$  určuje polohu průsečíku osy  $x$  a roviny kolmé na optickou osu, v níž leží předmět, obraz či jiné charakteristiky optického systému, o nichž bude řeč později. Ke každé souřadnici  $x$  budou pak příslušet **parametry paprsku  $y$  a  $\alpha$** .

**Užitečnost zavedení** těchto parametrů paprsku se ukáže hned na jednoduchých případech šíření paprsku mezi dvěma body v homogenním prostředí a při lomu na kulové ploše, která odděluje dvě prostředí o různých indexech lomu. Popis těchto elementárních jevů bude sloužit k objasnění matematického formalismu, který budeme později používat.

## 2.2 Šíření paprsku mezi dvěma body

Cílem úvah v tomto odstavci bude vyřešit následující jednoduchou úlohu. V bodě  $P_1(x_1, y_1)$  má paprsek parametry  $y_1, \alpha_1$ . Jaké parametry má v bodě  $P_2(x_2, y_2)$  ?

Obr. 3



Vyjdeme z geometrické **situace na obr. 3**. Protože se paprsek šíří homogenním prostředím, jeho úhel s osou  $x$  se nemění ( $\alpha_2 = \alpha_1$ ), změní se pouze jeho parametr  $y_2$ . Pro jeho hodnotu dostáváme  $y_2 = y_1 + \Delta y$ . Z pravoúhlého trojúhelníka  $\Delta P_1 P_2 P_2'$  plyne, že  $\Delta y = (x_2 - x_1) \tan(\alpha_1)$ . Po dosazení do předchozí rovnice dostaneme pro parametr  $y_2$  vztah

$$y_2 = y_1 + (x_2 - x_1) \tan(\alpha_1).$$

Jak víme z učebnic optiky, geometrická optika se buduje za předpokladu tzv. **paraxiálního přiblížení**. Jeho podstata je v tom, že naše výpočty omezíme jen na paprsky, které svírají s osou  $x$  úhel menší než asi  $6^\circ$ . Za tohoto předpokladu platí, že hodnota funkce  $\sin(\alpha)$  a  $\tan(\alpha)$  je přibližně rovna úhlu  $\alpha$  vyjádřenému v radiánech.

V rámci **paraxiálního přiblížení** jsou nové parametry  $y_2$ ,  $\alpha_2$  dány soustavou dvou rovnic:

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + (x_2 - x_1)\alpha_1 \\ \alpha_2 &= 0 + \alpha_1 \end{aligned} \tag{1}$$

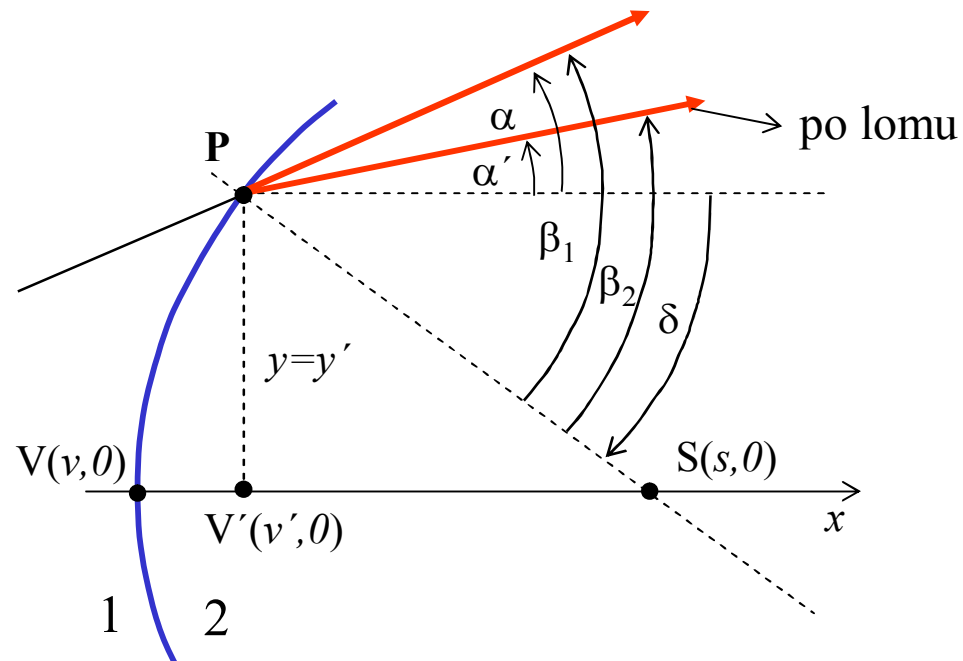
Tyto rovnice jsme nyní napsali v takovém nehezkém, ale přesto matematicky správném tvaru. Upřednostnili jsme formu zápisu a to má to svůj význam, který později oceníme.

Dohodneme se ještě, že **tuto formu rovnic** pro výpočet nových parametrů paprsku budeme zachovávat. Rovnice budeme vždy psát v uvedeném pořadí a pravou stranu rovnic budeme psát vždy jako součet dvou členů, z nichž první bude vždy násobkem staré hodnoty  $y$  a druhý staré hodnoty  $\alpha$ , i když jeden ze součinitelů bude nulový. Tímto jsme úkol z úvodu tohoto odstavce splnili a můžeme pokračovat dále.

Poznamenejme k tomu, že z matematického pohledu se dopouštíme značné nepřesnosti, když se omezujeme jen na paraxiální přiblížení a je **překvapující**, že zobrazovací a jiné rovnice vycházející z těchto zjednodušení se tak dobře shodují s experimentem.

## 2.3 Lom paprsku na kulové ploše

Nechť kulové rozhraní odděluje od sebe prostředí o indexu lomu  $n_1$  a prostředí o indexu lomu  $n_2$ . **Střed křivosti  $S(s,0)$**  rozhraní leží na ose  $x$  a protíná ji v **bodě  $V(v,0)$**  -viz obr. 4. V bodě  $P$ , na straně **prvního prostředí**, je paprsek charakterizován veličinami  $y$  a  $\alpha$ , v tomtéž bodě  $P$ , ale na straně **druhého prostředí**, veličinami  $y'$ ,  $\alpha'$ . Cílem úvah v tomto odstavci je zase výpočet parametrů paprsku po lomu pomocí jeho parametrů před lomem a charakteristik rozhraní.



Obr. 4

**Kolmice** (čárkovaně) na kulovou plochu v bodě P prochází středem S a s osou  $x$  svírá úhel  $\delta$ . Při přechodu paprsku rozhraním **došlo k lomu** podle Snellova zákona:

$$n' \sin(\beta_2) = n \sin(\beta_1),$$

kde  $\beta_1$  a  $\beta_2$  jsou úhly, které svírají paprsky s kolmicí ke kulové ploše v bodě P. Z obr. 4 je zřejmé, že pro úhly  $\beta_1$  a  $\beta_2$  platí

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \alpha - \delta \\ \beta_2 &= \alpha' - \delta,\end{aligned}$$

kde  $\delta$  je úhel, který svírá kolmice s osou  $x$ . Dosadíme-li tyto vztahy do Snellova zákona a omezíme se opět na **paraxiální přiblížení**, dostaneme  $\alpha' - \delta = N_{12}(\alpha - \delta)$ , odkud vypočteme nový úhel  $\alpha'$

$$\alpha' = (1 - N_{12})\delta + N_{12}\alpha, \quad (2)$$

kde veličina  $N_{12} = n_1/n_2$

Pro dokončení výpočtu zbývá ještě úhel  $\delta$  uvést do souvislosti s parametry lámavé kulové plochy. Z pravoúhlého **trojúhelníka**  $\Delta SPV'$  plyne, že  $\tan(\delta) = -y/(s - v')$ . Uvážíme-li, že v paraxiálním přiblížení body V a V' prakticky splývají, dostáváme pro úhel  $\delta$  jednoduchý vztah  $\delta = y/(v-s)$ .



Zdůrazněme, že v tomto vztahu vystupuje **rozdíl souřadnic** ( $v-s$ ), tedy reálné číslo, které může být jak kladné, tak záporné (absolutní hodnota  $|v-s|$  je rovna poloměru lámavé plochy).

Dosadíme-li toto vyjádření úhlu  $\delta$  do rovnice (2) můžeme napsat obě rovnice pro nové hodnoty parametrů paprsku po lomu:

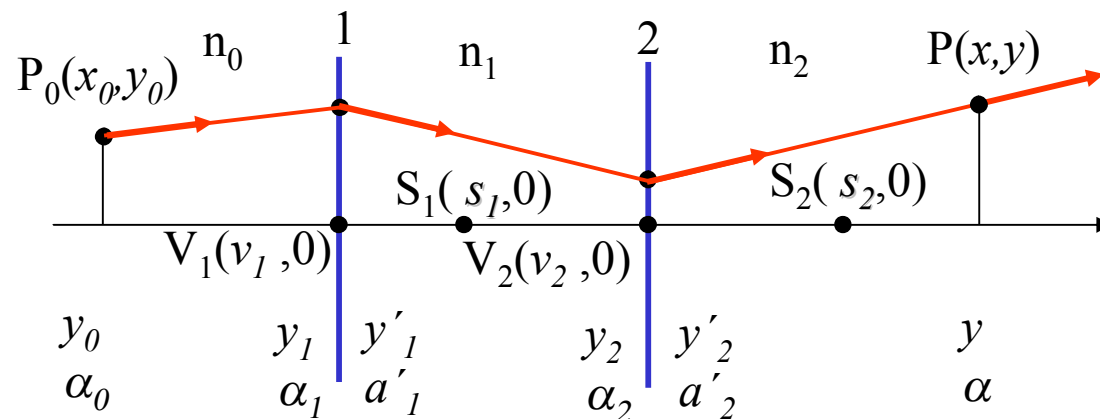
$$\begin{aligned} y' &= y + 0 \\ \alpha' &= (1 - N_{12}) y / (v-s) + N_{12} \alpha, \end{aligned} \quad (3)$$

Pořadí rovnic a uspořádání jejich pravých stran jsme opět zachovali podle **dohody o formě** v předchozím odstavci.

Rovnice (3) udávají jednoduchý návod, jak vypočítat parametry paprsku po lomu, známe-li jeho vstupní parametry. Tím je cíl úvah splněn. Spolu s rovnicemi (1) jsou tak matematicky popsány oba **elementární děje**, tj. šíření a lom, z nichž lze sestavit celou dráhu paprsku zobrazovacím systémem.

## 2.4 Průchod paprsku zobrazovacím systémem

Na jednoduchém příkladě nyní ukážeme použití zavedeného popisu paprsku. Příklad můžeme formulovat takto: mějme zobrazovací systém, který se skládá jen ze dvou lámavých ploch - viz obr. 5. **Pečlivě si zde všimněte způsobu značení veličin.**



Obr. 5

V bodě  $P_0(x_0, y_0)$  před první lámavou plochou má paprsek parametry  $y_0$ ,  $\alpha_0$  a nás zajímá, jaké má parametry v bodě  $P(x, y)$ . Při výpočtu parametrů paprsku za optickou soustavou budeme postupovat takto:

Počátek osy  $x$  ztotožníme s průsečíkem osy s první lámavou plochou, na niž narazí světlo, tzn. že  $v_1 = 0$ . Dále předpokládáme, že známe indexy lomu  $n_0$ ,  $n_1$ ,  $n_2$  a souřadnice na ose  $x$  označené  $x_0$ ,  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $s_1$ ,  $s_2$  a  $x$ , jejichž význam je zřejmý z obr. 5. Tím je zadán celý optický systém.

Při aplikaci výsledků dosavadních výpočtů daných rovnicemi (1) a (3), na náš nynější úkol, oceníme zavedenou formu označení parametrů paprsku na lámavých plochách.

Výpočet je výhodné začít **od konce** (později uvidíme proč). Do bodu P se dostane paprsek šířením od lámavé plochy 2. Na její výstupní straně má parametry  $y_2'$ ,  $\alpha_2'$ . Podle rovnice (1) platí

$$\begin{aligned} y &= y_2' + (x - v_2)\alpha_2' \\ \alpha &= 0 + \alpha_2' \end{aligned} \quad (4)$$

Parametry na výstupní straně plochy 2 vypočteme podle rovnic (3) pomocí parametrů na vstupní straně plochy. Dostaneme

$$\begin{aligned} y'_2 &= y_2 + 0 \\ \alpha'_2 &= \frac{1 - N_{12}}{v_2 - s_2} y_2 + N_{12} \alpha_2. \end{aligned} \quad (5)$$

Parametry paprsku na vstupní straně plochy 2 vyjádříme nyní pomocí parametrů na výstupní straně plochy 1 užitím rovnic (1)

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1' + (v_2 - v_1)\alpha_1' \\ \alpha_2 &= 0 + \alpha_1'. \end{aligned} \quad (6)$$

Nyní opět parametry paprsku na výstupní straně plochy 1 vyjádříme pomocí parametrů na vstupní straně plochy 1 aplikací rovnice (3).

$$y'_1 = y_1 + 0$$

$$\alpha'_1 = \frac{1 - N_{01}}{v_1 - s_1} y_1 + N_{01} \alpha_{12}. \quad (7)$$

Nyní již naposledy budeme aplikovat rovnice (1), abychom vypočetli parametry paprsku na vstupní straně plochy 1 pomocí známých parametrů v bodě  $P_0$ .

$$y_1 = y_0 + (v_1 - x_0) \alpha_0$$

$$\alpha_1 = 0 + \alpha_0. \quad (8)$$

Jestliže čtenář dočetl text až do tohoto místa, asi správně odhadl, co by teď mělo následovat, abychom vypočetli parametry paprsku  $y$  a  $\alpha$  po průchodu celým systémem. Je třeba vyjít z rovnice (8) a dosadit do (7), tyto rovnice (7) pak dosadit do (6) atd., až se dopracujeme k rovnici (4). Na její levé straně totiž máme hledané parametry, ale pravé strany rovnic se **dosazováním změnil v nepřehledné a složité výrazy.**

Toto mechanické dosazování do předchozích rovnic není práce pro člověka v době počítačů. Celý problém se dá zjednodušit, když **využijeme matematického pojmu matice** a naučíme počítač matice násobit. Řada matematických programů má takové násobení matic v sobě už zabudované, takže zápis operace násobení matic se prakticky neliší od násobení reálných čísel (např. MATLAB, OCTAVE, MAPLE, EXCEL 5.0 aj. )

Těm čtenářům, kteří nejsou s maticovým počtem obeznámeni, doporučuji nyní, aby se seznámili s operacemi **násobení** a **rovnosti matic** a pojmem **determinant matice**. Lze k tomu využít např. brožury [6] nebo knihy [7]. Ostatní čtenáři mohou pokračovat dalším odstavcem.

## 2.5 Maticová formulace problému

První krok v tomto odstavci bude spočívat v tom, že rovnice (1) a (3) přepíšeme do maticového tvaru podle návodu v Dodatku A.1. Teprve pak se vrátíme k úloze formulované v úvodu předchozího odstavce.

### Translační matice

Přepisem rovnic (1) do maticového tvaru dostaneme maticovou rovnici

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Matici  $\mathbf{T}_{12} = \begin{pmatrix} 1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  nazýváme **translační maticí** (10)

a matici  $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y \\ \alpha \end{pmatrix}$  nazýváme **paprskovou maticí**.

Ta nese parametry paprsku  $y$  a  $\alpha$  vždy v tomto pořadí s přihlédnutím k příslušným indexům. V maticovém označení (symbolice) má pak rovnice (9) tvar

$$\mathbf{Y}_2 = \mathbf{T}_{12}\mathbf{Y}_1 . \quad (11)$$

### Refrakční matice

Přepisem rovnic (3) do maticového tvaru dostaneme maticovou rovnici

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ \alpha'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1-N_{12}}{v_1-s_1} & N_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} \quad (12)$$

Matici

$$\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1-N_{12}}{v_1-s_1} & N_{12} \end{pmatrix} \quad (13)$$

nazýváme **refrakční maticí**. Index označuje, že se týká lámavé plochy 1, která odděluje prostředí s indexem lomu  $n_1$  od prostředí s indexem lomu  $n_2$ , tj.  $N_{12} = n_1/n_2$ . V maticové symbolice má rovnice (12) tvar

$$\mathbf{Y}'_1 = \mathbf{R}_1\mathbf{Y}_1$$

## Matice optického systému

Pomocí translačních, refrakčních a paprskových matic přepíšeme nyní rovnice (4) až (8) do maticové symboliky. Dostaneme

$$\mathbf{Y} = \mathbf{T}_2 \mathbf{Y}'_2 \quad (15)$$

$$\mathbf{Y}'_2 = \mathbf{R}_2 \mathbf{Y}_2 \quad (16)$$

$$\mathbf{Y}_2 = \mathbf{T}_{12} \mathbf{Y}'_1 \quad (17)$$

$$\mathbf{Y}'_1 = \mathbf{R}_1 \mathbf{Y}_1 \quad (18)$$

$$\mathbf{Y}_1 = \mathbf{T}_{01} \mathbf{Y}_0 \quad (19)$$

Nyní v maticové symbolice je velice jednoduché dosazovat zpětně za paprskové matice do předchozích rovnic. (Při tomto dosazování mějme na paměti, že **nesmíme měnit pořadí** při násobení matic.) Nakonec dostaneme

$$\mathbf{Y} = \mathbf{T}_2 \mathbf{R}_2 \mathbf{T}_{12} \mathbf{R}_1 \mathbf{T}_{01} \mathbf{Y}_0 \quad (20)$$

Tímto jsme náš problém vyřešili. Dosud neznámé parametry paprsků na výstupu optického systému jsme vyjádřili pomocí známých parametrů na jeho vstupu a pomocí parametrů systému, kterými jsou indexy lomu, souřadnice vrcholů kulových lámavých ploch a souřadnice jejich středů křivosti. Numerické hodnoty těchto veličin bychom nyní dosadili do příslušných maticových prvků jednotlivých matic a počítač nechali, aby je vynásobil.

Vynásobením všech matic na pravé straně vznikne matice typu (21) a z definice rovnosti matic dostaneme numerické hodnoty pro  $y$  a  $\alpha$ . Pro další úvahy je užitečné upravit rovnici (20) do následujícího tvaru

$$\mathbf{Y} = \mathbf{T}_2 \mathbf{S} \mathbf{T}_{01} \mathbf{Y}_0 \quad (21)$$

kde matici  $\mathbf{S} = \mathbf{R}_2 \mathbf{T}_{12} \mathbf{R}_1$  nazýváme **maticí optického systému**. Optický systém je vždy ohraničen kulovými lámavými plochami, ať jde o jednu čočku, nebo o celou soustavu čoček. Všimněme si, že matice soustavy je tvořena součinem refrakčních a translační matice, ale pořadí součinitelů je opačné, než je průchod světla systémem. To je velice důležité pro správný výpočet matice  $\mathbf{S}$ . Poznamenejme ještě, že počet refrakčních a translačních matic, dávající matici systému, je dán počtem lámavých ploch, a dále, že matice systému je vždy typu (2,2).

**Příklad:**

Vypočtete matici optického systému, který je tvořen tlustou čočkou. Veličiny svázané s poslední lámavou plochou systému budeme označovat indexem  $p$

Souřadnice bodů  $V_1$  a  $S_1$  jsou:  $v_1 = 0$ ,  $s_1 = 10$  cm.

Souřadnice bodů  $V_p$  a  $S_p$  jsou:  $v_p = 2$  cm,  $s_p = -20$  cm.

Index lomu skla  $n = 1.5$ , index lomu vzduchu je 1.

Matice systému této čočky je

$$\begin{pmatrix} 0.9333 & 1.3333 \\ -0.0712 & 0.9697 \end{pmatrix}$$



## 3. Princip zobrazování

Optický systém, který má sloužit k zobrazování předmětů, se musí vyznačovat tzv. **fokusační vlastností**. Nejdříve objasníme, co se tím rozumí. Zobrazování celého předmětu rozložíme na zobrazení jednotlivých bodů, které považujeme za bodový zdroj světla. Předpokládejme, že z každého bodu předmětu  $P_0(x_0, y_0)$  vystupují **paprsky všemi směry**. Je tomu tak např. u svítících předmětů nebo u předmětů, které rozptylují dopadající svazek světla všemi směry (tedy u většiny předmětů, kromě zrcadel).

**Paprsky vycházející z bodu  $P_0$** , které projdou optickým systémem, mohou vytvořit obraz jen tehdy, když se v některé rovině kolmé k ose  $x$  zase **všechny protnou v jednom bodě**  $P(x, y)$ . Když průsečík  $P$  leží za optickým systémem mluvíme o **reálném obrazu**, když leží před ním, mluvíme o **virtuálním obrazu**.

### 3.1. Zobrazovací rovnice

Mějme optický systém, jemuž přísluší **matice systému  $S$** , kterou obecně zapíšeme ve tvaru matice typu (22).

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \quad (22)$$

Problém **optického zobrazení** můžeme matematicky formulovat takto: Předpokládejme, že bod  $P_0$  je jeden bod předmětu, ze kterého vycházejí paprsky všemi směry. Hledejme souřadnici  $x$  bodu  $P$  takovou, že se v něm protínají všechny paprsky vycházející z bodu  $P_0$ .

Pro paprskovou matici  $\mathbf{Y}$  v bodě  $P$  umíme napsat maticovou rovnici

$$\mathbf{Y} = \mathbf{T}_p \mathbf{S} \mathbf{T}_{01} \mathbf{Y}_0, \quad (23)$$

kterou přepíšeme do tvaru

$$\begin{pmatrix} y \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x - v_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & v_1 - x_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ \alpha \end{pmatrix}, \quad (24)$$

kde  $v_p$  souřadnice vrcholu poslední lámavé plochy. Dále pro jednoduchost zápisu **označme**  $d = x - v_p$  a  $d_0 = v_1 - x_0$ . Vynásobíme-li nyní všechny tři matice typu (2,2), dostaneme

$$\begin{pmatrix} y \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} + ds_{21} & d_0s_{11} + dd_0s_{21} + s_{12} + ds_{22} \\ s_{21} & d_0s_{21} + s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ \alpha_0 \end{pmatrix}. \quad (25)$$

Na pravé straně této rovnice je součin dvou matic. Když jej provedeme, dostaneme i na pravé straně matici typu (21), která se rovná matici na straně levé. Protože **matice se rovnají**, když se rovnají sobě odpovídající prvky, dostaneme následující soustavu dvou rovnic:

$$\begin{aligned} y &= (s_{11} + ds_{21})y_0 + (d_0s_{11} + dd_0s_{21} + s_{12} + ds_{22})\alpha_0 \\ \alpha &= s_{21}y_0 + (d_0s_{21} + s_{22})\alpha_0 \end{aligned} \quad (26)$$

Z této **soustavy rovnic** budeme v dalších odstavcích často vycházet. Je to velice důležitá soustava, která nám umožní, jak uvidíme dále, detailně nahlédnout do chodu paprsků zobrazovacím systémem. Nyní jí využijeme k odvození zobrazovací rovnice pro optický systém charakterizovaný maticí S. Připomeňme, že naším cílem je najít takovou souřadnici  $x$  bodu P( $x$ ,  $y$ ), kde se **protnou všechny paprsky** vycházející z  $P_0$ .

Takový bod P potom totiž považujeme za **obraz bodu  $P_0$** .

Podíváme-li se na první ze dvou rovnic (26), vidíme, že obecně parametr  $y$  závisí jak na  $y_0$ , tak na  $\alpha_0$ . Aby bod P byl průsečíkem všech paprsků vycházejících z  $P_0$ , **nesmí  $y$  záviset na hodnotách  $\alpha_0$** . Z uvažované rovnice plyne, že tato situace nastane jen tehdy, když faktor v závorce před  $\alpha_0$  **bude roven nule**, tj. když

$$d_0 s_{11} + d d_0 s_{21} + s_{12} + d s_{22} = 0 \quad (27)$$

Tato je tedy **zobrazovací rovnice obecného optického systému**. Neznámá souřadnice  $x$  bodu P je ukryta ve veličině  $d = x - v_p$ .

## 3.2 Zvětšení obrazu

**Příčné zvětšení** obrazu  $\beta$  definujeme jako

$$\beta = \frac{y}{y_0}, \quad (28)$$

kde  $y$  a  $y_0$  jsou příslušné parametry paprskových matic. Při zobrazení jsou parametry paprsků obrazu dány rovnicemi

$$\begin{aligned} y &= (s_{11} + d s_{21}) y_0 \\ \alpha &= s_{21} y_0 + (d_0 s_{21} + s_{22}) \alpha_0 \end{aligned} \quad (29)$$

Z první rovnice vypočteme přímo zvětšení

$$\beta = \frac{y}{y_0} = s_{11} + ds_{21}$$

Je přirozené, že v tomto vztahu vystupuje kromě prvků matice systému i rozdíl souřadnic  $d = x - v_p$ , kde  $x$  je poloha obrazu.

### 3.3 Významné body zobrazovacího systému

U zobrazovacích systémů se definují významné body na jeho ose  $x$ . Jsou to **obrazové a předmětové ohnisko**  $F(f, 0)$  a  $F_0(f_0, 0)$  a **hlavní obrazový a předmětový bod**  $H(h, 0)$  a  $H_0(h_0, 0)$ .

V teorii zobrazování se užívá pojem **sdrúžené body**. Souřadnice sdrúžených bodů jsou totiž **svázány** zobrazovací rovnicí. Sdrúžené jsou polohy předmětové a obrazové roviny a také polohy hlavního obrazového a hlavního předmětového bodu.

#### Souřadnice obrazového ohniska

Poloha obrazu se blíží k obrazovému ohnisku, když se předmět vzdaluje na ose  $x$  do minus nekonečna. Vyjdeme tedy z **obecné zobrazovací rovnice (27)**, kterou vynásobíme faktorem  $1/dd_0$ . Dostaneme

$$\frac{s_{11}}{d} + s_{21} + \frac{s_{12}}{dd_0} + \frac{s_{22}}{d_0} = 0 \quad (31)$$

Do tohoto tvaru jsme ji přepsali proto, abychom mohli snadno provést limitní přechod pro  $x_0$  jdoucí k minus nekonečnu. Při této operaci budou poslední dva členy rovny nule a dostaneme rovnici, z níž pak vypočítáme  $d_f$ .

$$\frac{s_{11}}{d_f} + s_{21} = 0 \quad \text{a tedy} \quad d_f = -\frac{s_{11}}{s_{21}}. \quad (32)$$

Protože  $d_f = f - v_p$ , dostáváme pro **souřadnici obrazového ohniska konečný vztah**

$$f = v_p - \frac{s_{11}}{s_{21}}. \quad (33)$$

## Souřadnice předmětového ohniska

Podobným postupem jako v předchozím případě dostaneme pro **souřadnici předmětového ohniska** vztah

$$f_0 = v_1 + \frac{s_{22}}{s_{21}}. \quad (34)$$

## Souřadnice hlavního obrazového bodu

Leží-li obraz v hlavní obrazové rovině, pak má příčné zvětšení rovno 1. Dosadíme-li tedy do rovnice (30) za  $\beta = 1$  dostaneme

$$d_h = \frac{1 - s_{11}}{s_{21}}. \quad (35)$$

Protože  $d_h = h - v_p$ , je souřadnice  $h$  obrazového hlavního bodu dána vztahem

$$h = v_p + \frac{1 - s_{11}}{s_{21}}. \quad (36)$$

## Souřadnice hlavního předmětového bodu

Při výpočtu polohy předmětového hlavního bodu  $H_0 (h_0, 0)$  využijeme jeho **sdrúženosti s bodem H**. Postup je takový, že do zobrazovací rovnice (27) dosadíme za  $d$  výraz (35) a pouze algebraickými úpravami z ní vypočteme veličinu  $d_{h_0}$ . Dostaneme

$$d_{h_0} = -s_{12} - \frac{s_{22}(1 - s_{11})}{s_{21}}. \quad (37)$$

Protože  $d_{h_0} = v_0 - h_0$  bude mít konečný vztah pro **souřadnici předmětového bodu  $H_0$**  tvar

$$h_0 = v_1 + s_{12} + \frac{s_{22}(1 - s_{11})}{s_{21}}. \quad (38)$$

Jestliže se bude předmět nacházet v hlavní předmětové rovině, pak obraz se bude nacházet v hlavní obrazové rovině a jejich **zvětšení bude 1**. V těchto rovinách má bod předmětu i bod obrazu stejnou souřadnici  $y$ . Fyzikálně si můžeme vlastnost těchto na první pohled záhadných rovin představit tak, že předmět ležící v hlavní rovině předmětové přenesl optický systém bez jakékoli změny do hlavní roviny obrazové.

### 3.4 Ohniskové vzdálenosti

Jistě je jistě překvapivé, že tak všeobecně známé charakteristiky zobrazovacího systému zavádíme až nyní. Je to tím, že k jejich definici potřebujeme znát nejen souřadnice ohnisek, ale i souřadnice hlavních bodů.



Obrazová ohnisková vzdálenost  $f_{obr}$  se totiž definuje jako **rozdíl souřadnic** obrazového ohniska a obrazového hlavního bodu.

$$f_{obr} = f - h = -\frac{1}{s_{21}}. \quad (39)$$

Předmětová ohnisková vzdálenost  $f_{pre}$  je pak

$$f_{pre} = f_0 - h_0 = -s_{12} - \frac{s_{22}(1 - s_{11})}{s_{21}}. \quad (40)$$

Ještě jednou zdůrazněme, že **ohnisková vzdálenost je opět definována jako rozdíl souřadnic a ten může být kladný i záporný**. Nejde tedy o vzdálenost dvou bodů, což v matematice je vždy veličina kladná.

### Determinant matice obrazového systému

Determinant matice optického systému  $S$  získáme násobením příslušných determinantů refrakčních a translačních matic. Jejich vynásobením dostaneme vždy

$$|S| = \frac{n_0}{n_p}, \quad (41)$$

kde  $n_0$  a  $n_p$  jsou indexy lomu prostředí před a za zobrazovacím systémem.

Když je na obou stranách zobrazovacího systému vzduch nebo jiné, ale stejné optické prostředí, je **determinant matice S roven 1**. Toto je obecná vlastnost determinantu matice optického systému, které lze dále využít. V postatě nám tato vlastnost říká, že **prvky matice S jsou na sobě závislé**. Z rovnice

$$|\mathbf{S}| = S_{11}S_{22} - S_{12}S_{21} \quad (42)$$

můžeme vždy kterýkoli prvek vyjádřit pomocí zbývajících tří prvků matice **S** a hodnoty jejího determinantu. Tato vlastnost nám může sloužit jednak ke **kontrole výpočtu**, jednak ke zjednodušení některých vzorců odvozených v minulých odstavcích.

## 4. Přehled veličin a rovnic

### Souřadnicový systém $x,y$

má osu  $x$  totožnou s optickou osou zobrazovacího systému. Počátek osy  $x$  leží ve vrcholu první lámavé plochy. Lámavé plochy číslujeme ve směru chodu světla. Ten volíme zleva doprava.

### Translační matice

$$\mathbf{T}_{i,i+1} = \begin{pmatrix} 1 & v_{i+1} - v_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$v_i$  je  $x$  souřadnice vrcholu  $i$ -té lámavé plochy

$v_{i+1}$  je  $x$  souřadnice vrcholu  $i+1$ -té lámavé plochy

### Refrakční matice

$$\mathbf{R}_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1 - N_{i,i+1}}{v_i - s_i} & N_{i,i+1} \end{pmatrix}$$

$N_{i,i+1} = n_i / n_{i+1}$ , kde  $n_i$  a  $n_{i+1}$  jsou indexy lomu před a za  $i$ -tou lámavou plochou.  $s_i$  a  $v_i$  jsou  $x$  souřadnice středu a vrcholu  $i$ -té lámavé plochy

## Matice optického systému

$$\mathbf{S} = \mathbf{R}_p \mathbf{T}_{p-1,p} \mathbf{R}_{p-1} \dots \mathbf{R}_2 \mathbf{T}_{12} \mathbf{R}_1$$

index  $p$  je číslo poslední lámavé plochy

## Označení prvků obecné matice systému

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}$$

determinant matice je  $|\mathbf{S}| = s_{11}s_{22} - s_{12}s_{21} = \frac{n_0}{n_p}$

## Paprsková matice

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y \\ \alpha \end{pmatrix}$$

$y$  je  $y$ -ová souřadnice bodu, z něhož vychází paprsek pod úhlem  $\alpha$  (ten se měří kladně od osy  $x$  ve směru proti chodu hodinových ručiček).

### **Souřadnice obrazového ohniska $F(f, 0)$**

$$f = v_p - \frac{s_{11}}{s_{21}}.$$

### **Souřadnice předmětového ohniska $F_0(f_0, 0)$**

$$f_0 = v_1 + \frac{s_{22}}{s_{21}}.$$

### **Souřadnice hlavního obrazového bodu $H(h, 0)$**

$$h = v_p + \frac{1 - s_{11}}{s_{21}}.$$

### **Souřadnice hlavního předmětového bodu $H_0(h_0, 0)$**

$$h_0 = v_1 + s_{12} + \frac{s_{22}(1 - s_{11})}{s_{21}}.$$

### **Obrazová ohnisková vzdálenost**

$$f_{obr} = f - h = -\frac{1}{s_{21}}.$$

### **Předmětová ohnisková vzdálenost**

$$f_{pre} = f_0 - h_0 = -s_{12} - \frac{s_{22}(1 - s_{11})}{s_{21}}.$$

### **Obecná zobrazovací rovnice**

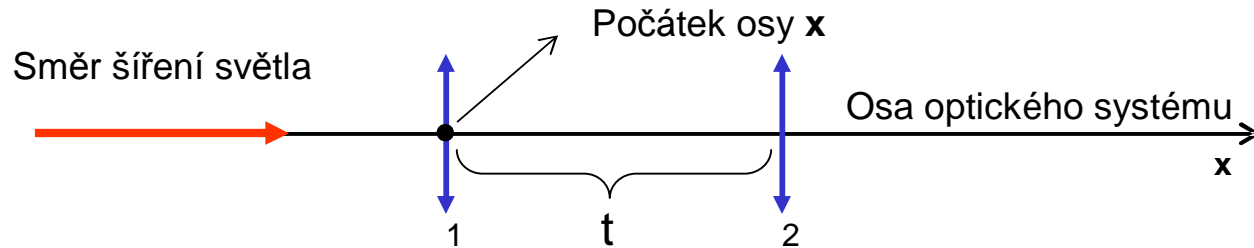
$$\frac{s_{11}}{d} + s_{21} + \frac{s_{12}}{dd_0} + \frac{s_{22}}{d_0} = 0$$

$d_0 = v_l - x_0$ ,  $d = x - v_p$ , kde  $x_0$  je souřadnice předmětu a  $x$  obrazu

### **Příčné zvětšení**

$$\beta = \frac{y}{y_0} = s_{11} + ds_{21}$$

## 5. Optický systém ze dvou tenkých čoček



**Optický systém** je tvořen dvěma tenkými čočkami, jejichž středy mají souřadnice  $0$  a  $t$ , a obrazové ohniskové vzdálenosti  $f_1$  a  $f_2$ . Spojka má  $f > 0$ , rozptylka  $f < 0$ .

**Matice tenké čočky** je dána vztahem (středy lámavých ploch jsou  $v_0 = v_1 = 0$ )

$$\mathbf{S} = \mathbf{R}_2 \mathbf{T}_{12} \mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1-n}{-s_2} & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1-\frac{1}{n}}{-s_1} & \frac{1}{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (1-n)(\frac{1}{s_1} - \frac{1}{s_2}) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-1}{f_{obr}} & 1 \end{pmatrix}, \quad (43)$$

kde bylo využito vztahu (33) resp. (39)

**Matice systému dvou tenkých čoček** pak je

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-1}{f_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-1}{f_1} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{t}{f_1} & t \\ -\left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{t}{f_1 f_2}\right) & 1 - \frac{t}{f_2} \end{pmatrix} \quad (44)$$

Pomocí matice systému se pak už vypočtou všechny charakteristiky našeho systému dvou tenkých čoček:

Obrazová ohnisková vzdálenost tohoto systému je:

$$f_s = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - t}$$

Souřadnice obrazového ohniska:

$$f = t + f_s \left(1 - \frac{t}{f_1}\right)$$

Souřadnice předmětového ohniska:

$$f_0 = -f_s \left(1 - \frac{t}{f_2}\right)$$

Souřadnice obrazového hlavního bodu

$$h = t - f_s \frac{t}{f_1}$$

Souřadnice předmětového hlavního bodu:

$$h_0 = f_s \frac{t}{f_2}$$