Domácí úkoly z F1711

Podmínkou zápočtu je kromě dostatečného počtu bodů z písemek také vypracování domácích úkolů. Odevzdávejte mi je prosím do 14 dnů od konání příslušného cvičení. Úlohy lze odevzdávat osobně nebo elektronicky mailem. Pište prosím čitelně.

1. cvičení

1. Dokažte, že platí (uvažujte ty případy, kdy jsou příslušné operace definovány):
   (a) $(AB)C = A(BC)$
   (b) $I_n A = A = A I_m$
   (c) $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$
2. Nechť jsou $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 9 & 3 \\ 10 & 6 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Pak vypočítejte:
   (a) $A + 2B$
   (b) $A - B^T - 3C$
   (c) AB
   (d) BA
   (e) $A(B + C)$
   (f) $(3A^T + B)C$
   (g) $\mathrm{Tr}(ABC)$

2. cvičení

1. Vyřešte následující soustavy lineárních rovnic:
   (a)

$$\begin{aligned} 150 &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \\ 350 &= x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 \\ 700 &= x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 10x_4 + 15x_5 \\ 1260 &= x_1 + 4x_2 + 10x_3 + 20x_4 + 35x_5 \\ 2100 &= x_1 + 5x_2 + 15x_3 + 35x_4 + 70x_5 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
2 &= 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 \\
1 &= x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 \\
-3 &= 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 \\
-3 &= x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4
\end{aligned}$$

(c) v závislosti na parametru $\lambda \in R$ řešte

$$\begin{aligned}
\lambda &= \lambda x_1 + \lambda x_2 + (\lambda + 1)x_3 \\
\lambda &= \lambda x_1 + \lambda x_2 + (\lambda - 1)x_3 \\
1 &= (\lambda + 1)x_1 + \lambda x_2 + (2\lambda + 3)x_3
\end{aligned}$$

3. cvičení

1. Určete vzájemnou polohu rovin:
   (a) $\rho : x + y + 2z - 3 = 0,\ \sigma : x - y + z - 1 = 0$
   (b) $\rho : (-1, 3, -2) + s(1, -1, -2) + t(0, 1, 1),\ \sigma : x - y + z + 6 = 0$
2. Určete vzájemnou polohu roviny a přímky:
   (a) $p : (2, -1, 2) + t(4, 1, -1),\ \sigma : 4x + y - z + 13 = 0$
   (b) $p : \begin{cases} 2x - y + 3z + 4 = 0 \\ x - 2y - 2z + 2 = 0 \end{cases},\sigma : 4x - 5y - z + 8 = 0$
3. Určete všechna řešení rovnic:
   (a) $\bar{z}(z - 4) - 1 = 8i$
   (b) $z^4 + 16 = 0$

4. cvičení

1. Určete kořeny polynomů:
   (a) $x^4 - 10x^3 + 37x^2 - 60x + 36 = 0$
   (b) $x^5 + 4x^4 - 6x^3 - 30x^2 + 9x + 54 = 0$
2. Najděte inverzní matici A^{-1}:

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 & -2 \\ -1 & -6 & -11 & 4 \\ 0 & -1 & -6 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $A_{n\times n} = \begin{pmatrix} 2-n & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2-n & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \ddots & 2-n & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & 1 & 2-n \end{pmatrix}$

3. Spočtěte determinant matic:

   (a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

   (b) $A = \begin{pmatrix} a & x & \dots & x & x \\ x & a & \dots & x & x \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ x & x & \ddots & a & x \\ x & x & \ddots & x & a \end{pmatrix}$

5. cvičení a 6. cvičení

1. Rozhodněte, zda se jedná o lineárně (ne)závislé vektory:

   (a) $u_1 = (1, 2, 3)$, $u_2 = (3, 4, 5)$, $u_3 = (7, 10, 13)$

   (b) $u_1 = (1, 0, 2, 3)$, $u2 = (1, 3, 0, 0)$, $u3 = (2, 0, 1, 1)$, $u_4 = (1, 6, 1, 4)$

2. Určete souřadnice vektorů v v bázi α:

   (a) $v = (2, 3, 1), \alpha = \{(2, 7, 3), (3, 9, 4), (1, 5, 3)\}$,

   (b) $v = (1, 0, 1, 1), \alpha = \{(0, 0, 0, 5), (1, 2, 3, 1), (1, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 0)\}$

3. Souřadnice vektoru jsou $v_\alpha = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ pro $\alpha = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$, určete souřadnice vektoru v bázi $\beta = \{u_1, u_2, u_3 + u_1, u_4 + u_2\}$ a matice přechodu $\mathrm{id}_{\alpha\beta}$, $\mathrm{id}_{\beta\alpha}$.

4. Lineární zobrazení f je dáno maticí

$$f_{\beta\,\alpha} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

kde $\alpha = \{(1,0,1),(1,0,0),(1,1,1)\}$ a $\beta = \{(-1,2),(1,1)\}$. Najděte, jak vypadá matice f pro standartní báze.

5. Nechť je $\alpha = \{(2,7,3),(3,9,4),(1,5,3)\}$ báze v R^3. Použijte Gram–Schmidtův ortogonalizační proces pro získání ortogonální báze.

7. cvičení

1. Rozložte na parciální zlomky:

   (a) $\frac{x^4-x^3+3x^2-x+1}{x^5+2x^3+x}$ (b) $\frac{9x^3-4x+1}{x^4-x^2}$

2. Nakreslete graf funkce:

   (a) $|\cos(2x+\frac{\pi}{2})-\frac{1}{2}|$ (b) $\frac{2x-5}{x+6}$

3. Rozhodněte, zda se jedná o lichou či sudou funkci: $f(x) = \frac{\sinh x}{\sin x}$, kde $\sinh x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$.

8. cvičení

1. Určete:

   (a) $\lim_{x\to 6} \frac{x-6}{\sqrt{x+3}-3}$ (b) $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt[3]{1-x^3}+x\right)$ (c) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{5x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{3x+1}}$

9. cvičení

1. Zderivujte:

   (a) $\sqrt{\frac{1-e^x}{1+e^x}}$ (b) $\frac{\arctan x}{\ln x}$

2. Vypočítejte:

(a) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$

(b) $\lim_{x\to 0^+}(\sin x)^{\tan x}$

10. cvičení

1. Proběhněte následující funkce:

   (a) $\ln\frac{x+1}{1-x}$

   (b) $\arctan\frac{x-1}{x}$

11. cvičení

1. Integrujte:

   (a) $\int\frac{2}{\sqrt{3+2y-y^2}}\mathrm{d}x$

   (b) $\int x^3e^x\mathrm{d}x$

   (c) $\int\frac{4\tan^3 x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$

   (d) $\int\frac{2x^3-x^2+x-2}{x^4+x^2}\mathrm{d}x$

12. cvičení

1. Pomocí Taylorových polynomů v nule pro funce e^x, $\sin x$, $\cos x$ se pokuste ukázat, že platí $e^{i\alpha}=\cos\alpha+i\sin\alpha$.

13. cvičení

1. Integrujte: $\int\frac{3}{5+4\sin x}\mathrm{d}x$
2. Určete moment setrvačnosti vzhledem k ose rotační symetrie:

   (a) koule

   (b) válce

14. cvičení

1. Určete, jaká je pravděpodobnost, že mezi n lidmi slaví někteří dva ve stejný den narozeniny.