Domácí úkoly ze Základních matematických metod ve fyzice (podzimní semestr 2005)

1. cvičení

1. Vypočtěte a upravte derivace následujících funkcí:

(a) $\sin x \cos x$,

(b) $A^{\tan^2(2x+1)}$,

(c) $\ln \frac{x+1}{x-1}$,

(d) $\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{arcsin} x$,

(e) $\frac{3-x}{2}\sqrt{1-2x-x^2} + 2\mathrm{arcsin}\frac{1+x}{\sqrt{2}}$,

(f) $\frac{1}{12}\ln\frac{x^4-x^2+1}{(x^2+1)^2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\,\mathrm{arctan}\frac{\sqrt{3}}{2x^2-1}$,

(g) $-\sqrt{1+x^2} + x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$,

(h) $\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctan}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$.

2. cvičení

2. Vypočtěte a upravte následující integrály:

(a) $\int \sin^2 x \cos x \,\mathrm{d}x$, (b) $\int \frac{x+1}{x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x$, (c) $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,\mathrm{d}x$.

3. cvičení

3. Vypočtěte a upravte následující integrály:

(a) $\int x^3 \sin\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$,

(b) $\int \mathrm{e}^{2x}\sin 3x\,\mathrm{d}x$,

(c) $\int \cos(\ln x)\,\mathrm{d}x$,

(d) $\int \frac{3x-4}{(x^2-x-6)^2}\,\mathrm{d}x$,

(e) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)\sqrt{x^2-3x+2}}$.

4. cvičení

4. Uvažme vektory $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1.b_2, b_3)$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$, jejichž složky jsou zadány v pravotočivé ortonormální bázi.

(a) Dokažte, že $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) = \det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$.

(b) Porovnejte mezi sebou všechny smíšené součiny vytvořené z vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

(c) Dokažte, že pro objem rovnoběžnostěnu určeného vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ platí

$$V = \left|\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\right|.$$

5. cvičení

5. Nalezněte matice přechodu mezi standardní ortonormální bází $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle$ a bází určenou jednotkovými vektory $\langle \vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3' \rangle$ kolmými k plochám $r = konst.$, $\varphi = Konst.$, $\vartheta = const.$, kde r, φ a ϑ jsou sférické souřadnice.

6. cvičení

Úloha se přesouvá na další cvičení.

7. cvičení

6. Řešte diferenciální rovnice:

   (a) $y' = \frac{1+y^2}{1+x^2}\,, \quad y\,(0) = 1\,,$

   (b) $y' = \frac{y}{x}\left(1 + \ln\frac{y}{x}\right),$

   (c) $y' = 2xy + 2x^3,$

   (d) $y' - \frac{2x-1}{x^2}\,y = 1\,.$

   Návod: Pro vyjádření y v části (a) použijte vzorce pro tangentu součtu argumentů.

7. Jak se bude měnit rychlost tělesa, které se pohybuje směrem vzhůru s počáteční rychlostí $\vec{v}_0$, je-li velikost síly odporu prostředí úměrná velikosti rychlosti tělesa? Jak se bude měnit poloha tělesa, je-li jeho počáteční vzdálenost nad povrchem Země x_0?

8. cvičení

8. Řešte diferenciální rovnice:

   (a) $y'' - 5y + 4y = 0, \quad y\,(0) = 1, \ y'\,(0) = 1,$

   (b) $y'' - 2y' + 2y = 4\mathrm{e}^x \cos x - 4x\mathrm{e}^x \sin x\,,$

   (c) $y'' - 3y' + 2y = \mathrm{e}^x\,(3 - 4x)\,,$

   (d) $y'' - 2y' + 2y = 4\mathrm{e}^x \cos x - 4x\mathrm{e}^x \sin x\,.$

9. cvičení

Úloha není zadána.

10. cvičení

9. Určete délku prvního oblouku cykloidy $x = a\,(t - \sin t)$, $y = a\,(1 - \cos t)$, $0 \le t \le \pi$.

10. Vypočtěte souřadnice středu hmotnosti závitu šroubovice $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$ za předpokladu, že pro její lineární hustotu platí $\mu = konst.$

11. Vypočtěte moment setrvačnosti půlzávitu homogenní ($\mu = konst.$) šroubovice $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$ vzhledem k ose z.

12. Určete práci síly $\vec{F}$, jejíž působiště se pohybuje po zadané křivce γ:

    (a) $\vec{F} = (x, x+y)$, γ je úsečka spojující body $A = [0,0]$ a $B = [b_1, b_2]$,

    (b) $\vec{F} = (x, xy)$, γ je část paraboly $y = x^2$ mezi body $A = [0,0]$, $B = [1,1]$.

11. cvičení

13. Vypočtěte parciální derivace funkcí:

    (a) $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$, $f(x,y) = xy \ln y + x^y$,

    (b) $\frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y \partial^2 z}$, $f(x,y,z) = xy^2z^3 + x^2 \sin^2(xz) + yz + x + y + z$.

14. Přímým výpočtem se přesvědčte, že $V = -\frac{\kappa m M}{r}$ je potenciální gravitační energie částice o hmotnosti m v gravitačním poli částice o hmotnosti M, přičemž částice leží ve vzdálenosti $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

    Návod: Prověřte, že grad $V = -\vec{F}_{\mathrm{g}}$, kde $\vec{F}_{\mathrm{g}}$ je gravitační síla, kterou působí částice o hmotnosti M na částici o hmotnosti m.

15. Pro funkci f a vektory $\vec{A}$ dokažte: $\operatorname{rot}\left(f\vec{A}\right) = \operatorname{grad} f \times \vec{A} + f \operatorname{rot}\vec{A}$.

12. cvičení

16. Vypočtěte první a druhý diferenciál následujících funkcí:

    (a) $f(x) = x\cos x$,

    (b) $f(x,y) = (x+y^3)^2$.

17. Užitím diferenciálu přibližně vypočtěte a porovnejte s hodnotou určenou kalkulačkou:

    (a) $\sqrt{3{,}98}$,

    (b) $\left(\frac{3{,}96}{2{,}01}\right)^3$.

13. cvičení

18. Rozhodněte, zda daný výraz je totálním diferenciálnem, a v kladném případě určete odpovídající kmenovou funkci:

    (a) $(\sin x + y)\,\mathrm{d}x + (x^2 + \cos y)\,\mathrm{d}y$,

    (b) $(xy^2)\,\mathrm{d}x + (y^2 + x^2y + 4)\,\mathrm{d}y$.

19. Dokažte, že dané silové pole je konzervativní, a určete odpovídající potenciální energii:

    (a) $\vec{F} = -k\vec{r}$ (pružná síla),

    (b) $\vec{F} = (0, 0, -mg)$ (tíhová síla).

14. cvičení

20. Vypočtěte moment setrvačnosti vzhledem k ose symetrie:

    (a) homogenní koule o hmotnosti m a poloměru r,

    (b) homogenního válce o hmotnosti m a poloměru r.