F1421 Základy matematických metod ve fyzice Šafařík Petr
F1421 – HW4 – 051028 UČO: 175826

A)

Důkaz: $\vec{a}\left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$

Pravá část:

$$\vec{b} \times c = \left(b_2c_3 - c_2b_3; c_1b_3 - c_3b_1; c_2b_1 - c_1b_2\right)$$

$$\vec{a}\left(\vec{b}_2c_3 - c_2b_3; c_1b_3 - c_3b_1; c_2b_1 - c_1b_2\right) = a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1$$

$$\vec{a}\left(b \times \vec{c}\right) = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1$$

Levá část:

$$\det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1$$

Pravá část je tedy rovna levé části.

B)

$$\vec{a}\left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2 = \vec{b}\left(\vec{c} \times a\right)$$

$$\vec{a}\left(\vec{c} \times \vec{b}\right) = \det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = a_1b_3c_2 + a_2b_1c_3 + a_3b_2c_1 - a_1b_2c_3 - a_2b_3c_1 - a_1b_2c_3 = \vec{b}\left(\vec{a} \times \vec{c}\right) = \vec{c}\left(\vec{b} \times \vec{a}\right)$$

$$\vec{b}\left(\vec{a} \times \vec{c}\right) = \det\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = a_1b_3c_2 + a_2b_1c_3 + a_3b_2c_1 - a_1b_2c_3 - a_2b_3c_1 - a_1b_2c_3 = \vec{a}\left(\vec{c} \times \vec{b}\right) = \vec{c}\left(\vec{b} \times \vec{a}\right)$$

$$\vec{b}\left(\vec{c} \times \vec{a}\right) = \det\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2 = a\left(b \times c\right) = c\left(a \times b\right)$$

$$\vec{c}\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \det\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2 = \vec{a}\left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \vec{b}\left(\vec{c} \times \vec{a}\right)$$

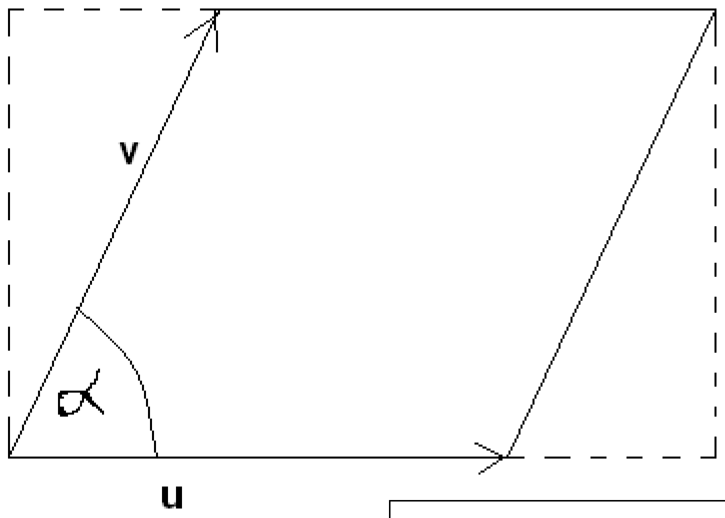
$$\vec{c}\left(\vec{b} \times \vec{a}\right) = \det\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} = a_1b_3c_2 + a_2b_1c_3 + a_3b_2c_1 - a_1b_2c_3 - a_2b_3c_1 - a_1b_2c_3 = \vec{a}\left(\vec{c} \times \vec{b}\right) = \vec{b}\left(\vec{a} \times \vec{c}\right)$$

C)

$$V = v \cdot S_p = \mathbf{w}(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$$

$$S_p = \mathbf{m} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\sin\alpha = (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$$

Objem je výška krát plocha podstavy. Proto si prvně spočítáme plochu podstavy (velikosti obou vektorů krát sinus vzájemného úhlu). Shodou okolností se stejně počítá i vektorový součit, proto si to tak i označíme jako vektor **m**, který vznikne vektorovým součinem vektorů **u** a **v**.



Objem je tedy součin plochy podstavy krát velikost výšky (**w**) a pokud nesvírají (postava s výška) úhel 90 stupňů,poté i sinus tohoto úhlu. Plocha podstavy byla spočítána jako vektor **m,** který je kolmý na rovinu podstavy, proto místo sinu se používá kosinus.

$$V = |\mathbf{w}||\mathbf{m}|\cos\beta$$

$$V = \mathbf{w} \cdot \mathbf{m}$$

$$V = \mathbf{w}(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$$