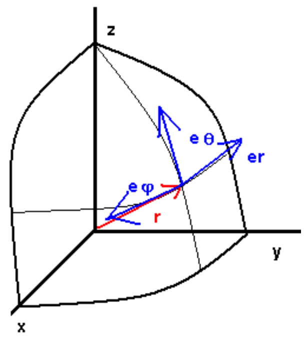
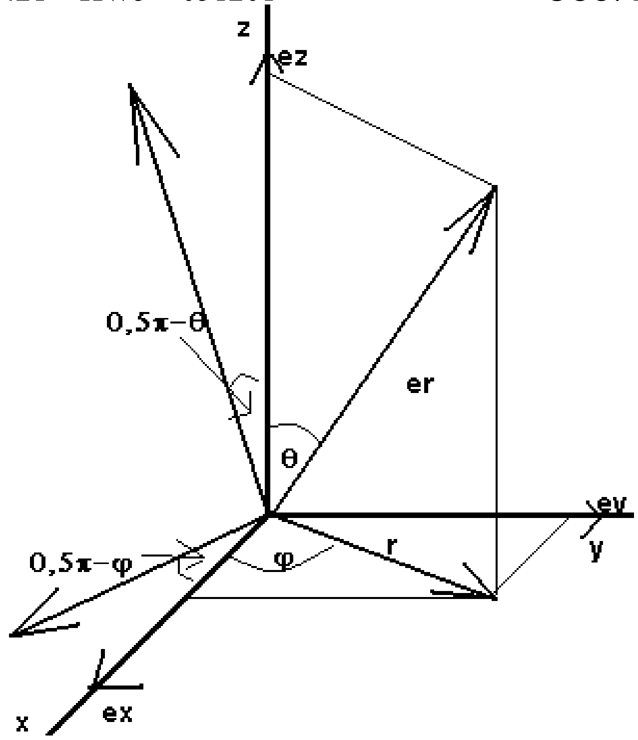
F1421 Základy matematických metod ve fyzice Šafařík Petr

F1421 – HW5 – 051201 UČO: 175826





Vztah mezi sférickými
a kartézskými souřadnicemi:

$x = r\sin\theta\,\cos\varphi$

$y = r\sin\theta\,\sin\varphi$

$z = r\cos\theta$

$$\begin{pmatrix} xr & x\varphi & x\theta \\ yr & y\varphi & y\theta \\ zr & z\varphi & z\theta \end{pmatrix}$$

$xr = \cos(\angle\, \vec{e}_r; \vec{e}_x)$

$x\varphi = \cos(\angle\, \vec{e}_\varphi; \vec{e}_x)$

$x\theta = \cos(\angle\, e_\theta; e_x)$

$yr = \cos(\angle\, \vec{e}_r; \vec{e}_y)$

$y\varphi = \cos(\angle\, \vec{e}_\varphi; \vec{e}_y)$

$y\theta = \cos(\angle\, e_\theta; e_y)$

$zr = \cos(\angle\, \vec{e}_r; \vec{e}_z) = \cos\theta$

$z\varphi = \cos(\angle\, \vec{e}_\varphi; \vec{e}_z) = 0$

$z\theta = \cos(\angle\, e_\theta; e_z) = \sin\theta$

Hodnota $z\varphi \ldots e_r \perp e_\theta$ … v rovině tvořené těmito vektory leží i $e_z \ldots e_\varphi \perp$ na tuto rovinu, což znamená že: $e_\varphi \perp e_z \Rightarrow \cos(\angle\, e_\varphi; e_z) = 0$

$x_r; y_r$ se dají vyjádřit ze vztahu mezi kartézskými a sférickými souřadnicemi:

$$\cos(\angle\, \vec{e}_r; \vec{e}_x) = \frac{r\cos\varphi\,\sin\theta}{r}$$

$$\cos(\angle\, \vec{e}_r; \vec{e}_y) = \frac{r\sin\theta\,\sin\varphi}{r}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi\,\sin\theta & x\varphi & x\theta \\ \sin\varphi\,\cos\theta & y\varphi & y\theta \\ \cos\theta & 0 & \sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\angle\, e_x e_\varphi = \frac{\pi}{2} - \varphi \Rightarrow \cos\angle = \sin\varphi$$

$$\angle\, e_y e_\varphi - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \varphi = \pi - \varphi \Rightarrow \cos\varphi$$

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi\,\sin\theta & \sin\varphi & x\theta \\ \sin\varphi\,\cos\theta & \cos\varphi & y\theta \\ \cos\theta & 0 & \sin\theta \end{pmatrix}$$

Pokud víme, že jde o jednotkové vektory, tak se dají $x\theta\,; y\theta$.
Pro jednotkové vektory je vidět:

$$(\cos\varphi\,\sin\theta)^2 + \sin^2\varphi + (x\theta)^2 = 1$$

$$(x\theta)^2 = 1 - \sin^2\varphi - \cos^2\varphi\,\sin^2\theta = \cos^2\varphi\,(1 - \sin^2\theta) = \cos^2\varphi\,\cos^2\theta$$

$$x\theta = \cos\varphi\,\cos\theta$$

$$(-\cos\varphi\,\cos\theta)^2 + \sin^2\varphi + (y\theta)^2 = 1$$

$$(y\theta)^2 = 1 - \sin^2\varphi - \cos^2\varphi\,\cos^2\theta = \cos^2\varphi\,(1 - \cos^2\theta) = \cos^2\varphi\,\sin^2\theta$$

$$y\theta = \cos\varphi\,\sin\theta$$

Výsledná matice:

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi\,\sin\theta & \sin\varphi & -\cos\varphi\,\cos\varphi \\ \sin\varphi\,\cos\theta & \cos\varphi & -\sin\theta\,\cos\varphi \\ \cos\theta & 0 & \sin\theta \end{pmatrix}$$