Ve 18:

b: Začnu druhou částí, protože nejspíše budete chtít i komentář k tomu, co uvidíte napsané:) Zkusím obecně. Abychom dostali totální diferenciál, tak funkci nejdříve zderivujeme podle *x* a vynásobíme *dx*, a stejně tak s *y*. Následně obě derivace sečteme. Matematicky:

$$df = A + B$$

$$A = \frac{\partial f}{\partial x} dx$$

$$B = \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

Musí tedy platit:

$$\int \frac{\partial f}{\partial x} dx = F$$

$$\int \frac{\partial f}{\partial y} dy = G$$

Poté tedy platí:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\int \frac{\partial f}{\partial x} dx \right) = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Nemíme zapomenout, že: $\int \frac{\partial f}{\partial x} dx = f + C$, resp. na že v integrační konstantě C může být ukryta „*y-ová*“ část funkce!!!

Příklad:

$$df \overset{???}{=} \left(x + y^2\right)dx + \left(y^2 + x^2 y + 4\right)dy$$

$$\int xy^2 dx = \frac{x^2 y^2}{2} + C_{(y)}$$

$$\int \left(y^2 + x^2 y + 4\right)dy = \frac{y^3}{3} + \frac{x^2 y^2}{2} + 4y + D_{(x)}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2 y^2}{2} + C_{(y)} \right):$$

$$yx^2 + \frac{dC_{(y)}}{dy} = y^2 + yx^2 + 4 \Rightarrow$$

$$C'_{(y)} = y^2 + 4$$

$$C_{(y)} = \int \left(y^2 + 4\right)dy = \frac{y^3}{3} + 4y + D_{(x)}$$

$$Dohromady:$$

$$f_{(x,y)} = \frac{x^2 y^2}{2} + C_{(y)}$$

$$f_{(x,y)} = \frac{x^2 y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + 4y$$

a:

$$df \overset{???}{=} (\sin x + y)dx + (x^2 + \cos x)dy$$

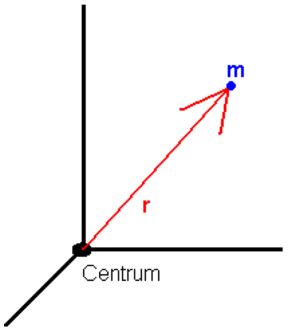
$$\int (\sin x + y)dx = -\cos x + xy + C$$

$$\int (x^2 \cos y)dy = \sin y + x^2 y + D$$

Fce není totálním diferenciálem.

Napíšu si to tak, že centrální pole je konzervativní a dokáži to. Takže:
Tvrzení:
Centrální pole je konzervativní.

Důkaz:



$$\boxed{\vec{F}_{Centra\ln i} = F\left(\pm\frac{\vec{r}}{r}\right) = \left(\pm\frac{F_{(\vec{r})}}{r}\right)\vec{r}}$$

$$\boxed{\left(\pm\frac{F_{(\vec{r})}}{r}\right) = \theta_r}$$

$$A = \int_C \vec{F}_C d\vec{r}$$

$$\vec{F}_C d\vec{r} = \theta_{(r)} \vec{r} d\vec{r} =$$

$$\left| \begin{array}{l} \vec{r} \ldots r \\ \vec{r}\cdot\vec{r} = r^2 = r\cdot r \\ \frac{d\vec{r}}{dt}\vec{r} + \vec{r}\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}r + r\frac{dr}{dt} \\ \frac{d\vec{r}}{dt}\vec{r} = r\frac{dr}{dt} \\ \vec{r}d\vec{r} = rdr \end{array} \right|$$

$$= \theta_{(r)} dr$$

$A = \int_A^B \theta_{(r)} r dr$ ... ve výsledku nefiguruje **r**, ale pouze r, takže není závislý na tvaru trajektorie.

Práce gravitačního pole

$$\vec{F}_g = \frac{\aleph Mm}{r^2}\left(-\frac{\vec{r}}{r}\right)$$

$$\vec{F}_g d\vec{r} = -\frac{\aleph Mm}{r^3}\vec{r} d\vec{r} = -\frac{\aleph Mm}{r^3} r dr = -\frac{\aleph Mm}{r^2} dr$$

$$A = \int_{r_1}^{r_2} -\frac{\aleph Mm}{r^2} dr = -\aleph Mm \int_{r1}^{r2} \frac{dr}{r^2} = \left. \frac{-\aleph Mm}{r} \right|_{r1}^{r2}$$

$$A_{AB} = -\aleph Mm\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

Potenciální energi pro: $\begin{array}{l} r_1 \to r \\ r_2 \to \infty \end{array}$

Platí: $A = -\frac{\aleph Mm}{r} = u_{(r)}$ ... potenciální energie částice v gravitačním poli v bodě **r**.

b)

$\underset{\to}{F} = -kr$

$F = -k(x; y; z)$

Pokud:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x}$$

Poté je dané silové pole konzervativní.

Tedy:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial(-kx)}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial(-ky)}{\partial x} = 0\end{array}\right\} stejné$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial(-ky)}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial(-kz)}{\partial y} = 0\end{array}\right\} stejné$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial(-kx)}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial(-kz)}{\partial x} = 0\end{array}\right\} stejné$$

Silové pole tedy je konzervativní.

Potenciální energie:

$$f = \int_{x_0}^{x}(-kt)dt + \int_{y_0}^{y} -ktdt + \int_{z_0}^{z} -ktdt = \left[-k\frac{t^2}{2}\right]_{x_0}^{x} + \left[-k\frac{t^2}{2}\right]_{y_0}^{y} + \left[-k\frac{t^2}{2}\right]_{z_0}^{z} = \frac{-k}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right) - \frac{-k}{2}\left(x_0{}^2 + y_0{}^2 + z_0\right.$$

$$f = \frac{-k}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right) + C$$

$$U = -f$$

$$U = \frac{k}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right) + C$$