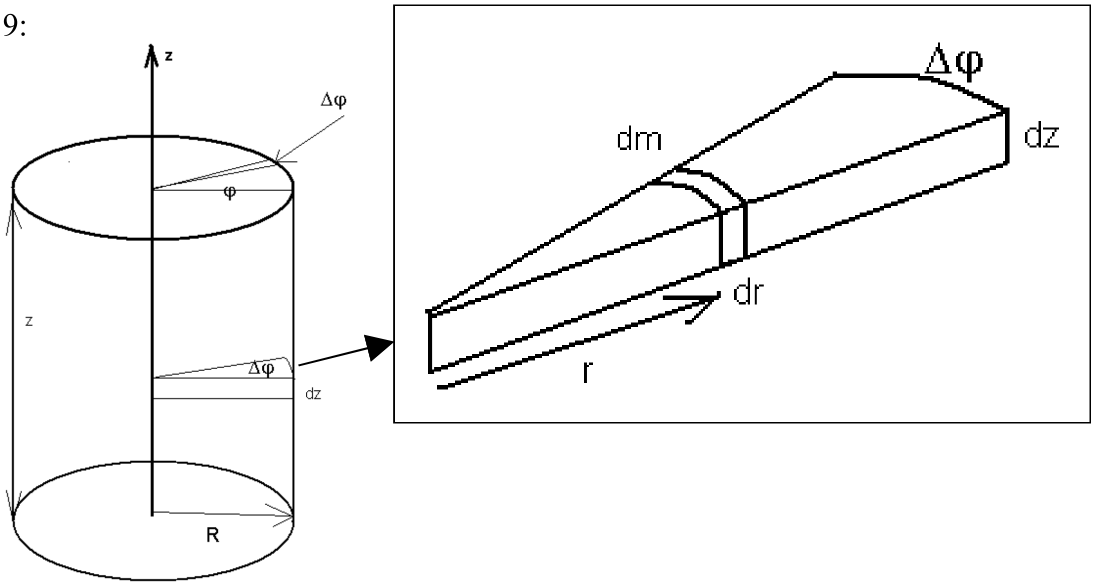
19:



$$I = \int_m r^2 dm$$

$$dm = \rho\, dV$$

$$dV = dr \cdot dz \cdot r d\varphi$$

$$dm = \rho \cdot dr \cdot dz \cdot r d\varphi$$

$$I = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 dm = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 \left(r\rho \cdot dr \cdot d\varphi \cdot dz \right) = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^R r^3 \rho \cdot dr \cdot d\varphi \cdot dz$$

$$\int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^R r^3 \rho \cdot dr \cdot d\varphi \cdot dz = \varphi \int_0^h dz \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^R r^3 dr = \left[h\right]_0^h \cdot \left[\varphi\right]_0^{2\pi} \cdot \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R = h\varphi \cdot (2\pi) \cdot \left(\frac{R^4}{4}\right) = \frac{1}{2}\pi^{2} h\varphi R^4$$

$$\left(\varphi \pi h R^2\right) = m$$

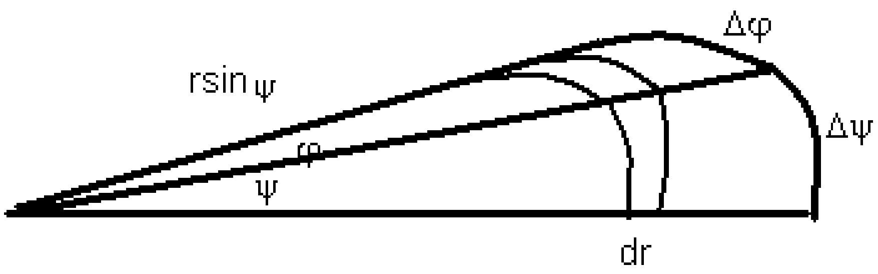
$$\frac{1}{2}\pi h\varphi R^4 = \frac{1}{2} R^2 \left(\varphi \pi h R^2\right) = \frac{1}{2} m R^2$$

$$I = \frac{1}{2} m R^2$$

Momenty setrvačnosti vzhledem k jednotlivým osám *x,y,z* stejné za předpokladu, že je koule homogenní a osy prochází středem (resp. těžištěm).
Proto můžeme napsat, že moment setrvačnosti k libovolné ose procházející těžištěm je:

$$I = \frac{1}{3}\left(I_x + I_y + I_z\right)$$

Obrázek (výsek z koule):



Z obrázku plyne:
Element hmotnosti *dm*:

$$dm = \rho\, dV$$

$$dV = dr \cdot rd\varphi \cdot r\sin\psi\, d\psi$$

$$dm = \rho \cdot dr \cdot rd\varphi \cdot r\sin\psi\, d\psi$$

$$dm = \rho \cdot r^2 dr \cdot d\varphi \cdot \sin\psi\, d\psi$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Po dosazení tedy platí:

$$I = \frac{1}{3}\left(I_x + I_y + I_z\right) = \frac{2}{3}\int_m \left(x^2 + y^2 + z^2\right) dm = \frac{2}{3}\rho \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} r^4 \sin\psi\, dr d\varphi\, d\psi =$$

$$= \frac{2}{3}\rho \int_0^R r^4 dr \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^{\pi} \sin\psi\, d\psi = \frac{2}{3}\rho\, \frac{1}{5} R^5 \cdot 4\pi$$

$$m = \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \rho$$

$$I = \frac{2}{5} m R^2$$