F2422 - HW3 - 20.března 2006

Petr Šafařík

20.března 2006

Obsah

1 Příklad 3.

1.1 Zadání

Určete obsah, souřadnice středu hmotnosti a moment setrvačnosti vzhledem k ose z homogenní plochy (zakreslete ji!)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0; 0 \leq z \leq b$$

Momet setrvačnosti vyjádřete jak prostřednictvím plošné hustoty σ, tak i prostřednictvím hmotnosti m plochy.

kde $r = \sqrt{a^2 + b^2}$

1.2 Transformace

$$x = r \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi$$

$$y = r \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \varphi$$

$$z = r \cdot \cos \vartheta$$

$$\varphi \in (0, 2\pi)$$

$$r \in (0; \sqrt{a^2 + b^2} = r)$$

$\xi_1 = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}; \frac{\partial y}{\partial \varphi}; \frac{\partial z}{\partial \varphi} \right)$
$\xi_1 = (-r \sin \vartheta \cos \varphi, r \sin \vartheta \cos \varphi; 0)$

$\xi_2 = \left(\frac{\partial x}{\partial r}; \frac{\partial y}{\partial r}; \frac{\partial z}{\partial r} \right)$
$\xi_2 = (\sin \vartheta \cos \varphi; \sin \vartheta \sin \varphi; \cos \varphi)$

1.3 Jakobyho matice

$$G = \begin{pmatrix} \xi_1\xi_1 & \xi_1\xi_2 \\ \xi_2\xi_1 & \xi_2\xi_2 \end{pmatrix}$$

$\xi_1\xi_1 = r^2 \cdot \sin^2 \vartheta$
$\xi_1\xi_2 = \xi_2\xi_1 = 0$
$\xi_2\xi_2 = 1$

1.4 Jakobián

$$\det G = r^2 \cdot \sin^2 \vartheta$$
$$\sqrt{\det G} = r \cdot \sin \vartheta$$

1.5 Povrch

$$S = \int_0^{2\pi} \int_0^r \sqrt{\det G} dr \cdot d\varphi$$
$$S = \int_0^{2\pi} \int_0^r r \sin \vartheta dr \cdot d\varphi$$
$$S = \int_0^{2\pi} \int_0^r r \sin \vartheta dr \cdot d\varphi$$
$$S = 2\pi \sin \vartheta \left[\frac{1}{2} r^2 \right]_0^r$$
$$S = 2\pi \sin \vartheta \frac{1}{2} r^2$$
$$S = \pi \cdot \frac{a}{r} \cdot r^2$$
$$S = \pi a r$$
$$S = \pi a \sqrt{a^2 + b^2}$$

1.6 Střed hmotnosti

1.6.1 Obecně

$$\vec{r}_T = \frac{1}{m} \left(\int_S x \cdot \sigma ds; \int_S y \cdot \sigma ds; \int_S z \cdot \sigma ds \right)$$

σ ... plošná hustota
$m = \pi a r \sigma$

1.6.2 X-ová souřadnice

$$m \cdot x_T = \int_0^{2\pi} \int_0^r r \sin \vartheta \cos \varphi \cdot \sigma \cdot r \cdot \sin \vartheta dr \cdot \varphi$$
$$m \cdot x_T = \sigma \sin^2 \vartheta \int_0^r r^2 dr \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi$$

$\int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi = 0 \Rightarrow x_T = 0$

1.6.3 Y-ová souřadnice

$$m \cdot y_T = \int_0^{2\pi} \int_0^r r \sin\vartheta \sin\varphi \cdot \sigma \cdot r \cdot \sin\vartheta dr \cdot \varphi$$

$$m \cdot y_T = \sigma \sin^2\vartheta \int_0^r r^2 dr \int_0^{2\pi} \sin\varphi d\varphi$$

$\int_0^{2\pi} \sin\varphi d\varphi = 0 \Rightarrow y_T = 0$
Poznámka: Z logické úvahy rotační symetričnosti se dalo x_T a y_T snadno uhádnout, ale je to postup matematicky …řekněme nekorektní ☺

1.6.4 Z-ová souřadnice

$$m \cdot z_T = \int_0^{2\pi} \int_0^r r \cos\vartheta \cdot \sigma \cdot r \cdot \sin\vartheta dr \cdot \varphi$$

$$m \cdot z_T = \sigma \cos\vartheta \sin\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^r dr$$

$$m \cdot z_T = 2\pi \sin\vartheta \cos\vartheta \frac{1}{3} r^3 \cdot \sigma$$

$$m \cdot z_T = 2\pi \frac{a}{r} \frac{b}{r} \frac{1}{3} r^3 \cdot \sigma$$

$$m \cdot z_T = \frac{2}{3} \pi\sigma abr$$

$$z_T = \frac{2}{3} \frac{1}{\pi\sigma ar} \pi\sigma abr$$

$$z_T = \frac{2}{3} b$$

1.6.5 Závěr

$$\vec{r}_T = \left(0, 0, \frac{2}{3} b\right)$$

1.7 Moment setrvačnosti vzhledem k ose z

1.7.1 Obecně

$$J_Z = \int_S \left(x^2 + y^2\right) \cdot \sigma dS$$

1.7.2 Konkrétní výpočet

$$J_Z = \int_0^{2\pi} \int_0^{r} \left(r^2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi\right) \sigma r \sin \vartheta dr d\varphi$$

$r^2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi = r^2 sin^2 \vartheta$

$$J_Z = \sigma \int_0^{2\pi} \int_0^{r} r^3 \sin^3 \vartheta dr d\varphi$$

$$J_Z = \sigma \sin^3 \vartheta \int_0^{r} r^3 dr \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$J_Z = \sigma \sin^3 \vartheta \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{4} r^4$$

$$J_Z = \sigma \left(\frac{a}{r}\right)^3 \pi \frac{r^4}{2}$$

$$J_Z = \frac{1}{2} \pi \sigma a^3 r$$

$$J_Z = \frac{1}{2} \pi \sigma a^3 \sqrt{a^2 + b^2}$$

1.7.3 Řešení pro zadané m

$m = \pi a 2 \sigma \Rightarrow J_Z = \frac{1}{2} m a^2$

2 Příklad 4.

2.1 Zadání

Určete obsah, souřadnice středu hmotnosti a moment setrvacnosti vzhledem k ose z povrchu homogenního anuloidu (zakreslete jej!). Momet setrvačnosti vyjádřete jak prostřednictvím plošné hustoty σ, tak i prostřednictvím hmotnosti m plochy.

2.2 Transfomace

$$x = (R + r\cos\alpha)\cos\varphi$$
$$y = (R + r\cos\alpha)\sin\varphi$$
$$z = r \cdot \sin\alpha$$

$$\alpha \in (0; 2\pi)$$
$$\varphi \in (0, 2\pi)$$

$\xi_1 = \left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}; \frac{\partial y}{\partial\varphi}; \frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)$
$\xi_1 = (-(R + r\cos\alpha)\sin\varphi; (R + r\cos\alpha)\cos\varphi; 0)$

$\xi_2 = \left(\frac{\partial x}{\partial\alpha}; \frac{\partial y}{\partial\alpha}; \frac{\partial z}{\partial\alpha}\right)$
$\xi_2 = (-r\sin\alpha\cos\varphi; -r\sin\alpha\sin\varphi; r\cos\alpha)$

2.3 Jakobyho matice

$$G = \begin{pmatrix} \xi_1\xi_1 & \xi_1\xi_2 \\ \xi_2\xi_1 & \xi_2\xi_2 \end{pmatrix}$$

$\xi_1\xi_1 = (R + r\cos\alpha)^2$
$\xi_1\xi_2 = \xi_2\xi_1 = 0$
$\xi_2\xi_2 = r^2$

2.4 Jakobián

$$\det G = r^2(R + r\cos\alpha)^2$$
$$\sqrt{\det G} = r(R + r\cos\alpha)$$

2.5 Povrch

$$S = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} r(R + r\cos\alpha) d\alpha d\varphi$$

$$S = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} rR d\alpha d\varphi + \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} r^2 \cos\alpha d\alpha d\varphi$$

$$S = 4\pi^2 \cdot r \cdot R$$

2.6 Střed hmotnosti

Poznámka: Opět se z úvahy o symetrii tělesa dá odhadnout, že střed hmotnosti bude ve středu tělesa, neboli $T = [0; 0; 0]$, ale stejně si provedeme všechny potřebné výpočty.

2.6.1 Obecně

$$\vec{r}_T = \frac{1}{m} \left(\int_S x \cdot \sigma ds; \int_S y \cdot \sigma ds; \int_S z \cdot \sigma ds \right)$$

σ ... plošná hustota
$m = 4\pi^2 r R \sigma$

2.6.2 X-ová souřadnice

$$\frac{m}{\sigma} \cdot x_T = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (R + r\cos\alpha) \cos\varphi \cdot r(R + r\cos\alpha) d\alpha d\varphi$$

$$\frac{m}{\sigma} \cdot x_T = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} r(R + r\cos\alpha)^2 \cos\varphi d\alpha d\varphi$$

$$\frac{m}{\sigma} \cdot x_T = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} R^2 r \cos\varphi d\alpha d\varphi + \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} r^2 R \cos\varphi \cos\alpha d\alpha d\varphi + \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} r^3 \cos\varphi \cos^3\alpha d\alpha d\varphi$$

$$\frac{m}{\sigma} \cdot x_T = 0 + 0 + 0$$

$$x_T = 0$$

2.6.3 y-ová souřadnice

$$\frac{m}{\sigma} \cdot y_T = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (R + r\cos\alpha)\sin\varphi \cdot r(R + r\cos\alpha) d\alpha d\varphi$$

$$\frac{m}{\sigma} \cdot y_T = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} r(R + r\cos\alpha)^2 \sin\varphi d\alpha d\varphi$$

$$\frac{m}{\sigma} \cdot y_T = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} R^2 r \sin\varphi d\alpha d\varphi + \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} r^2 R \sin\varphi \cos\alpha d\alpha d\varphi + \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} r^3 \sin\varphi \cos^3\alpha d\alpha d\varphi$$

$$\frac{m}{\sigma} \cdot y_T = 0 + 0 + 0$$

$$y_T = 0$$

2.6.4 z-ová souřadnice

$$\frac{m}{\sigma} \cdot z_T = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} r\sin\alpha r(R + r\cos\alpha) d\alpha d\varphi$$

$$\frac{m}{\sigma} \cdot z_T = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} R r^2 \sin\alpha d\alpha d\varphi + \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} r^3 \sin\alpha \cos\alpha d\alpha d\varphi$$

$$\frac{m}{\sigma} \cdot z_T = 0 + 0$$

$$z_T = 0$$

2.6.5 Závěr

$$\vec{r}_T = (0, 0, 0)$$

2.7 Moment setrvačnosti vzhledem k ose z

2.7.1 Obecně

$$J_Z = \int_S \left(x^2 + y^2\right) \cdot \sigma dS$$

2.7.2 Konkrétní výpočet

$$J_Z = \sigma \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left((R + r\cos\alpha)^2 \cos^2\varphi + (R + r\cos\alpha)^2 \sin^2\varphi \right) \cdot r(R+r\cos\alpha) d\alpha d\varphi$$

$$J_Z = \sigma \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} r(R+r\cos\alpha)^3 \cos^2\varphi d\alpha d\varphi + \sigma \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} r(R+r\cos\alpha)^3 \sin^2\varphi d\alpha d\varphi$$

$$J_Z = 2\pi\sigma \int_0^{2\pi} \left(R^3 r + 3R^2 r^2 \cos\alpha + 3Rr^3 \cos^2\alpha + r^4 cos^3\alpha \right) d\alpha$$

$$J_Z = 2\pi\sigma \left(R^3 r 2\pi + 0 + 3Rr^3\pi + 0 \right)$$

$$J_Z = 4\pi^2 R^3 r\sigma + 6\pi^2 Rr^3\sigma$$

2.7.3 Řešení pro zadané m

$m = 4\pi^2 rR\sigma \Rightarrow J_Z = m\left(r^2 + \frac{3}{2}r^2\right)$

Powered by LaTeX 2_ε