F2422 - HW8 - 21. května 2006

Petr Šafařík

21. května 2006

Obsah

1 Příklad 8.

1.1 Zadání

Užitím Taylorova polynomu třetího stupně pro funkci dvou proměnných vypočtěte $\frac{\cos 61{,}5^\circ}{\sqrt{3{,}97}}$.

1.2 Příprava?

$\frac{\cos 61{,}5^\circ}{\sqrt{3{,}97}} \Rightarrow f_{(x,y)} = \frac{\cos x}{\sqrt{y}}$
Přičemž:
$x_0 = 1,047$ rad (což odpovídá asi $\approx 60^\circ$) $\ldots dx = 0,0026 = \frac{13}{500}$
$y_0 = 4,00 \ldots dy = -0,03 = \frac{-3}{100}$

$A_0 = (x_0, y_0)$

1.3 Výpočet jednotlivých derivací

1.3.1 Nultá derivace

$f_{(A_0)} = \frac{\cos 60^\circ}{\sqrt{4}} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$

1.3.2 První dericace

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-\sin x}{\sqrt{y}} \ldots \frac{\partial f}{\partial x}(A_0) = \frac{-\sqrt{3}}{4}$

$\frac{\partial f}{\partial y} = \cos x \cdot \frac{-1}{2y^{\frac{3}{2}}} \ldots \frac{\partial f}{\partial y}(A_0) = \frac{-1}{2^5}$

1.3.3 Druhá derivace

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{-\cos x}{\sqrt{y}} \ldots \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A_0) = \frac{-1}{4}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{3\cos x}{4y^{\frac{5}{2}}} \ldots \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A_0) = \frac{3}{2^8}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\sin x}{2y^{\frac{3}{2}}} \ldots \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A_0) = \frac{\sqrt{3}}{2^5}$

1.3.4 Třetí derivace

$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \frac{\sin x}{\sqrt{y}} \ldots \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(A_0) = \frac{\sqrt{3}}{2^2}$

$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = -\frac{15\cos x}{2^3 y^{\frac{7}{2}}} \ldots \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(A_0) = -\frac{15}{2^{11}}$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\cos x}{2y^{\frac{3}{2}}} \dots \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(A_0) = \frac{1}{2^5}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} = -\frac{3 \sin x}{4y^{\frac{5}{2}}} \dots \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}(A_0) = -\frac{3\sqrt{3}}{2^8}$$

1.4 Obecný zápis přibližného výpočtu

Obecný zápis přibližného výpočtu[1,2] by vypadal následovně:

$$f_{x,y} = f_{(A_0)} + \frac{\partial f}{\partial x}(A_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(A_0)dy +$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A_0)(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A_0)(dx)(dy) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A_0)(dy)^2\right] +$$

$$+\frac{1}{6}\left[\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(A_0)(dx)^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(A_0)(dx)^2(dy) + 3\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}(A_0)(dx)(dy)^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(A_0)(dy)^3\right]$$

1.5 Dosazení do obecného zápisu

Dosazení do obecného zápisu[3]

$$f_{x,y} = \frac{1}{4} + \left(\frac{-\sqrt{3}}{4}\frac{13}{500} + \frac{-1}{2^5}\frac{-3}{100}\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{-\sqrt{3}}{4}\left(\frac{13}{500}\right)^2 + \frac{3}{2^8}\left(\frac{-3}{100}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{2^5}\left(\frac{-3}{100}\right)\left(\frac{13}{500}\right)\right] +$$

$$+\frac{1}{6}\left[\frac{\sqrt{3}}{2^2}\left(\frac{13}{500}\right)^3 + \frac{1}{2^5}\left(\frac{13}{500}\right)^2\left(\frac{-3}{100}\right) + \frac{3\sqrt{-3}}{2^8}\left(\frac{13}{500}\right)\left(\frac{-3}{100}\right)^2 + \frac{-15}{2^{11}}\left(\frac{-3}{100}\right)^3\right]$$

1.6 Výsledek

Výsledek[4] je $= 0,2395$

---

[1] Bože, to zní tak straně...

[2] Je dlouhý a nechutný, ale přesto jej vypíšu

[3] To je ještě horší, než vypsání obecného zápisu, ale i to udělám;)

[4] Doufám, že nikdo nebude chtít, abych to vypisoval i mezikrok součtů...

1.7 Ověření přímý výpočtem

Podle kalkulačky[5] mi to vyšlo takto:

$$\frac{\cos 61,5^\circ}{\sqrt{3,97}} = 0,23948$$

2 Příklad 9.

2.1 Ověření aproximace $(1+x)^n \doteq 1+nx$

$(1+x)^n \doteq 1+nx$
$f_{(y)} = (1+x)^n \ldots y_0 = 1;\ dy = x$
$f_{(y)} = y^n$
$f_{(y_0)} = 1$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = ny^{n-1}|_{y_0} = n$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = n(n-1)y^{n-2}|_{y_0} = n(n-1)$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = n(n-1)(n-2)y^{n-3}|_{y_0} = n(n-1)(n-2)$$

$$\frac{\partial^n f}{\partial y^n} = \frac{n!}{(n-k)!}y^{n-k}|_{y_0} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Přičemž $k \in \mathbf{Z}$

$$f_{(y)} = f_{(y_0)} + \frac{\partial f}{\partial y}(y_0)dy + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(y_0)(dy)^2 + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(y_0)(dy)^3 + \ldots + \frac{1}{k!}\frac{\partial^n f}{\partial y^n}(y_0)(dy)^k$$

$$f_{(y)} = 1 + \frac{1}{k!}\cdot\frac{n!}{(n-k)!}(dy)^k$$

$$f_{(y)} = 1 + \frac{1}{k!}\cdot\frac{n!}{(n-k)!}x^k$$

Protože je hodnota $|x| << 1$, tak se nám při hodnotě $k > 1$ stane členx^k zanedbatelným[6] a proto lze členy ředy, kde je $k > 1$ s úspěchem zanedbat.

[5] Díky Bohu za ni. Až budu na pustým ostrově, tak si tam jednu vezmu s sebou (možná pro jistotu dvě...), neb kdybych měl takovýto výpočet řešit klackem do písku pláže, tak bych se asi zbláznil... a nebo hold ty kokosy rozbíjel silou větší, než by byla síla minimální ⌣̈

[6] Pro naše výpočty klackem v písku pláže, na zbytek jsou kalkulačky ⌣̈

Pokud tak učiníme, tak platí:

$$f_{(y)} = 1 + \frac{1}{1!} \cdot \frac{n!}{(n-1)!}x^1$$

neboli:

$$f_{(y)} = 1 + nx$$

a proto:

$$(1+x)^n \doteq 1 + nx$$

2.2 Ověření aproximace $E = \frac{1}{2}m_0v^2$

$$E_K = mc^2 - m_0c^2$$

$$E_K = m_0\frac{c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_0c^2$$

$$E_K = m_0\frac{c^2 - c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$E_K = m_0\frac{c^2 - c^2 + \frac{1}{2}v^2}{1-\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}}$$

$$E_K = m_0\frac{\frac{1}{2}v^2}{1-\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}}$$

Pro $v << c$[7][8] je člen $\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}$ oproti jedničce (1) zanedbatelný. Poté tedy:

2.3 Závěr

$$E_K = \frac{1}{2}m_0v^2$$

Pro $v << c$

Powered by LaTeX 2_ε

[7]Což budeme-li počítat energii kokosu padajícího z byť i hooooooo(a těch oooo tam může být fakt dost)dně vysoké palmy na pustém ostrově můžeme předpokládat

[8]To c není na sedmou (sedmdesátou osmou), pouze je u něj dvakrát footnote