F2422 - HW11 - 20.března 2006

Petr Šafařík

22. května 2006

Obsah

1 Příklad 12.

1.1 Zadání

V komplexním oboru řešte rovnici $x^2 - (2+i)x - 1 + 7i = 0$.

1.2 Řešení

$$x^2 + (-2-i) + (-1+7) = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{(2+i) \pm \sqrt{D}}{2}$$

$$D = (-2-i)^2 - 4(-1+7i)$$

$$D = 4 + 4i - 1 + 4 - 28i$$

$$D = 7 - 24i$$

Odmocnění komplexního čísla:

$$x + iy = \sqrt{7-24i}$$

$$x^2 + 2ixy + i^2y^2 = 7 - 24i$$

$$x^2 + 2ixy - y^2 = 7 - 24i$$

Porovnáním reálné a imaginární části získáme dvě rovnice pro dvě neznámé.
Reálná část:

$$x^2 - y^2 = 7$$

A imaginární:

$$2xy = -24$$

Z imaginární rovnice vyjádříme y a dosadíme do reálné rovnice:

$$y = -\frac{12}{x}$$

$$x^2 - \left(-\frac{12}{x}\right)^2 = 7$$

Substituce $x^2 = a$

$$a - \frac{12^2}{a} = 7$$

Upravíme:

$$a^2 - 7a - 144 = 0$$

Klasickým řešením kvadratické rovnice dostaneme tvar:

$$a_{(1,2)} = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 4 \cdot 144}}{2}$$

$$a_1 = -9 \Rightarrow$$

Když dosadíme do substituce $y^2 = a$ tak $x = \sqrt{-9}$. Když dosadíme do substituce $y^2 = a$ tak $x = \sqrt{-9} = 3i$.
Dosadíme do $y = -\frac{12}{x} \Rightarrow y = y = -\frac{12}{3i} = -4$

$$\sqrt{D} = -4 + 3i$$

$$a_2 = 16$$

Když dosadíme do substituce $y^2 = a$ tak $x = \sqrt{16} = 4$.
Dosadíme do $y = -\frac{12}{x} \Rightarrow y = y = -\frac{12}{4} = -3$

$$\sqrt{D} = 4 - 3i$$

$$x_1 = \frac{2 + i + 4 - 3i}{2} = \frac{6 - 2i}{2} \Rightarrow x_1 = (3 - i)$$

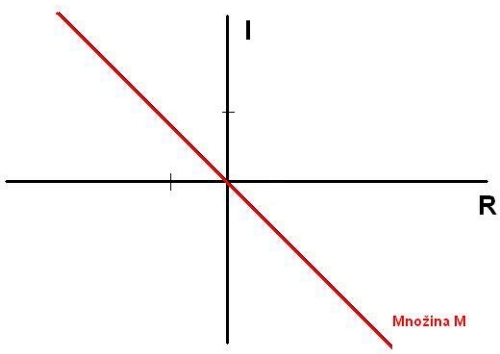
$$x_1 = \frac{2 + i - 4 + 3i}{2} = \frac{-2 + 4i}{2} \Rightarrow x_1 = (-1 + 2i)$$

2 Příklad 13.

2.1 Zadání

Popiště a v Gaussově rovině zakreslete množinu komplexních čísel, pro něž platí: $|z + 1| = |z - i|$

2.2 Obrázek



Výsledná množina[1] M je přímka prochzející počátkem se směrnicí $-\frac{1}{2}$

[1] Asi to budu muset vysvětlit ústně.

3 Příklad 14.

3.1 Zadání

Nechť $f_{(z)} = \frac{1}{z}$: Rozhodněte, zda jsou funkce $f_{(z)}$ a $[f_{(z)}]^\star$ holomorfní. Pokud ano, určete jejich derivace.

3.2 Funkce $f_{(z)}$

3.2.1 Převod funkce

$$f_{(z)} = \frac{1}{z}$$

$$f_{(z)} = \frac{1}{x+iy}$$

$$f_{(z)} = \frac{1}{x+iy}\frac{x-iy}{x-iy}$$

$$f_{(z)} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$$

$$f_{(z)} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{-y}{x^2+y^2}$$

3.2.2 Ověření Cauchyových-Riemannových podmínek

Funce je holomorfní, pokud platá C-R podmínky:
První:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

Druhá:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{x^2+y^2-x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) = -\frac{x^2+y^2-y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

1. C-R podmínka je tedy splněna.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Je splněná i druhá C-R podmínka.

3.2.3 Derivace $f_{(z)}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x-iy}{x^2+y^2}\right) = \frac{x^2+y^2-(x-iy)(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2+y^2-2x^2+i2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2+y^2+i2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

3.3 Funkce $[f_{(z)}]^{\star}$

3.3.1 Převod funkce

$$f_{(z)} = \left[\frac{1}{z}\right]^{\star}$$

$$\overline{z} = z^{\star} = x - iy$$

$$f_{(z)} = \frac{1}{x-iy}$$

$$f_{(z)} = \frac{1}{x-iy}\frac{x+iy}{x+iy}$$

$$f_{(z)} = \frac{x+iy}{x^2+y^2}$$

$$f_{(z)} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{y}{x^2+y^2}$$

3.3.2 Ověření Cauchyových-Riemannových podmínek

Funce je holomorfní, pokud platá C-R podmínky:
První:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

Druhá:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{x^2+y^2-x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{x^2+y^2-y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}$$

1. C-R podmínka není splněna.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

Ani druhá podmínka není splněna (ačkoli stačí jen jedna, ale pro pořádek...), takže komplexně stružená funkce $[f_{(z)}]^\star$ není holomorfní.

4 Příklad 15.

4.1 Zadání

Rozhodněte, zda pro danou reálnou funkci $v_{(x;y)} = -3x^2y + y^3$ existuje reálná funkce $u_{(x;y)}$ tak, aby funkce komplexní proměnné $f_{(z)} = u_{(x;y)} + iv_{(x;y)}$ byla holomorfní. V kladném případě tuto funkci určete a určete rovněž derivaci funkce $f_{(z)}$.

4.2 Určení $u_{(x;y)}$

$$v_{(x,y)} = -3x^2y + y^3$$

$$f_{(z)} = u_{(x,y)} + iv_{(x,y)}$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = P$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = Q$$
$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$
$$Pdx + Qdy \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$
$$u = \int_{x_0}^{x} P(t,y)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,t)dt$$
$$u = \int_{x_0}^{x} (-3t^2 + 3y^2)dt + \int_{y_0}^{y} (6x_0t)dt$$
$$u = \left[t^3 + 3y^2t\right]_{x_0}^{x} + \left[3x_0t^2\right]_{y_0}^{y}$$
$$u = -x^3 + 3xy^2 + C$$

4.3 Funkce $f_{(z)}$

$$f_{(z)} = u_{(x,y)} + iv_{(x,y)}$$
$$f_{(z)} = (-x^3 + 3xy^2 + C) + i \cdot (-3x^2y + y^3)$$

4.4 Derivace $f_{(z)}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -3x^2 + 3y^2 - i6xy$$

Powered by $\LaTeX\,2_\varepsilon$