

F4120 — Teoretická mechanika

19 — Věc na kouli

Zadání

Tělisko začne klouzat z nejvyššího bodu dokonale hladké koule o poloměru r_0 . V jaké výšce se od koule oddělí?

Válec**Energie a Lagrangián**

$$T = \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2$$

$$U = mgr \cos \varphi$$

r_0 je poloměr koule, r je skutečná vzdálenost tělesa od středu koule

$$L = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 - mgr \cos \varphi$$

$$\varepsilon = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \dot{\varphi} - L$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 + mgr \cos \varphi$$

V okamžiku oddělení platí, že gravitační zrychlení a odstředivé jsou v rovnováze:

$$r\dot{\varphi}^2 = g \cos \varphi$$

Energie se zachovává, proto v nejvyšší poloze je $mgr = \varepsilon$, což je zobecněná energie.

$$mgr = \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 + mgr \cos \varphi$$

odtud:

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{2g(1 - \cos \varphi)}{r}$$

Dosazení do rovnice rovnováhy:

$$r \frac{2g(1 - \cos \varphi)}{r} = g \cos \varphi$$

$$\cos \varphi = \frac{2}{3}$$

$$h = r \cos \varphi$$

$$h = \frac{2}{3}r$$