F7070 — Statistická fyzika a termodynamika

8 – Helium

Zadání

Hodnoty pro tepelnou kapacitu tekutého helia He^4 jsou dány v tabulce 1

T [K]	C_V $\left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{gK}}\right]$
0.60	0.0051
0.65	0.0068
0.70	0.0098
0.75	0.0146
0.80	0.0222
0.85	0.0343
0.90	0.0510
0.95	0.0743
1.00	0.1042

Tabulka 1: Tabulka hodnot tepelné kapacity tekutého helia

1. Ukažte, že chování tepelné kapacity se při velmi nízkých teplotách shoduje s fononovým plynem
2. Najděte rychlost zvuku v kapalném heliu při nízkých teplotách

Řešení

Chování fononů, stejně jako fotonů, popíšeme Bose-Einstainovou statistikou (jen chemický potenciál $\mu = 0$) pro jednu částici:

$$F = T \sum_i \ln\left(1 - \mathrm{e}^{-\hbar\omega_i/T}\right) \tag{1}$$

Přičemž potřebujeme F ve třech dimenzích — proto provedeme integraci přes hustotu stavů v prostoru vlnových vektorů, kde

$$\sum_i = \int \rho\left(\mathbf{k}\right) \mathrm{d}^3\mathbf{k} \tag{2}$$

Vzhledem k třírozměrnému modelu je počet stavů $3N$, proto

$$\int_0^{\mathrm{k_{max}}} \rho\left(\mathbf{k}\right) \mathrm{d}^3\mathbf{k} = 3N$$

Tedy dosadíme za sumu z rovnice (2) do rovnice (1)

$$F = T \int \rho\left(\mathbf{k}\right) \mathrm{d}^3\mathbf{k} \ln\left(1 - \mathrm{e}^{-\hbar\omega_i/T}\right) \tag{3}$$

Pohybujeme se v 3 rozměrném podprostoru, proto:

$$\rho\left(\mathbf{k}\right) = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3$$

$$\rho(\mathbf{k}) = \frac{V}{(2\pi)^3}$$

a také:

$$\mathrm{d}^3\mathbf{k} = 4\pi k^2 \mathrm{d}k$$

Provedeme substituci, kdy $kv = \omega$ a tedy $\mathrm{d}k = \frac{\mathrm{d}\omega}{v}$ Tedy získáme

$$\rho(\mathbf{k})\,\mathrm{d}^3\mathbf{k} = \frac{4\pi V}{(2\pi)^3}\left(\frac{\omega}{v}\right)^2 \frac{\mathrm{d}\omega}{v}$$

$$\rho(\mathbf{k})\,\mathrm{d}^3\mathbf{k} = \frac{4\pi V}{(2\pi v)^3}\omega^2 \mathrm{d}\omega \tag{4}$$

Vzhledem k již výše uvedené rovnici, že $\int_0^{\mathrm{k_{max}}} \rho(\mathbf{k})\,\mathrm{d}^3\mathbf{k} = 3N$ víme, že integrál přes ω z rovnice (4) odpovídá $3N$ (3 — trojrozměrný model):

$$(3 \times \text{polarizace}) \int_0^{\omega_{\max}} \frac{4\pi V}{(2\pi v)^3}\omega^2 \mathrm{d}\omega = 3N \tag{5}$$

$$3N = \frac{4\pi V}{(2\pi v)^3}\omega_{\max}^3 \tag{6}$$

Vyjádříme, čemu se rovná ω – přečemž $\omega/k = v$.

$$\omega_{\max} = \left(\frac{3N}{4\pi V}\right)^{1/3} 2\pi v$$

Dosadíme (4) do (3) a určíme limity integrálu

$$F = T\int_0^{\omega_{\max}} \frac{4\pi V}{(2\pi v)^3}\omega^2 \mathrm{d}\omega \ln\left(1 - \mathrm{e}^{-\hbar\omega_i/T}\right) \tag{7}$$

Z (7) vytkneme před integral na ω nezávislé členy. Navíc jsou 3 polarizace:

$$F = 3 \cdot T\frac{4\pi V}{(2\pi v)^3}\int_0^{\omega_{\max}} \omega^2 \ln\left(1 - \mathrm{e}^{-\hbar\omega_i/T}\right)\mathrm{d}\omega \tag{8}$$

V rovnici (8) si vyjádříme, čemu se rovná $\frac{4\pi V}{(2\pi v)^3}$. K tomuto použijeme rovnici (6).

$$\frac{4\pi V}{(2\pi v)^3} = \frac{3N}{\omega_{\max}^3}$$

$$F = 3 \cdot 3NT\left(\omega_{\max}\right)^{-3}\int_0^{\omega_{\max}} \omega^2 \ln\left(1 - \mathrm{e}^{-\hbar\omega_i/T}\right)\mathrm{d}\omega \tag{9}$$

Rovnici (9) budeme integrovat metodou per partes

$$F = 3 \cdot 3NT\left(\omega_{\max}\right)^{-3}\int_0^{\omega_{\max}} \omega^2 \ln\left(1 - \mathrm{e}^{-\hbar\omega_i/T}\right)\mathrm{d}\omega \tag{10}$$

$$F = 3 \cdot 3NT\left(\omega_{\max}\right)^{-3}\left[\left[\frac{\omega^3}{3}\ln\left(1 - \mathrm{e}^{-\hbar\omega/T}\right)\right]_0^{\omega_{\max}} - \frac{\hbar}{3T}\int_0^{\omega_{\max}} \frac{\omega^3}{\mathrm{e}^{\hbar\omega/T} - 1}\mathrm{d}\omega\right] \tag{11}$$

$$F = 3NT\ln\left(1 - \mathrm{e}^{-\hbar\omega_{\max}/T}\right) - 3NT\frac{\hbar}{T\omega_{\max}^3}\int_0^{\omega_{\max}} \frac{\omega^3}{\mathrm{e}^{\hbar\omega/T} - 1}\mathrm{d}\omega \tag{12}$$

$\omega_{\max} = \omega_D \ldots$ bude Debayova frekvence, přičemž $\hbar\omega_D = T_D$, Debayova teplota...

$$F = 3NT \ln\left(1 - \mathrm{e}^{-T_D/T}\right) - 3NT \frac{\hbar}{T\omega_D^3} \int\limits_0^{\omega_D} \frac{\omega^3}{\mathrm{e}^{T_D/T} - 1} \mathrm{d}\omega \tag{13}$$

Uděláme substituci: $\frac{\hbar\omega}{T} = \frac{T_D}{T} = y \Rightarrow \omega = \frac{T}{\hbar} \cdot y$

$$F = 3NT \ln\left(1 - \mathrm{e}^{-T_D/T}\right) - 3NT \frac{\hbar}{T\omega_D^3} \int\limits_0^{T_D/T} \frac{\left(\frac{T}{\hbar}\right)^3 \cdot y^3}{\mathrm{e}^y - 1} \cdot \frac{T}{\hbar} \mathrm{d}y \tag{14}$$

$$F = 3NT \ln\left(1 - \mathrm{e}^{-T_D/T}\right) - 3NT \frac{1}{\omega_D^3} \left(\frac{T}{\hbar}\right)^3 \int\limits_0^{T_D/T} \frac{y^3}{\mathrm{e}^y - 1} \mathrm{d}y \tag{15}$$

$$F = 3NT \ln\left(1 - \mathrm{e}^{-T_D/T}\right) - 3NT \frac{1}{\omega_D^3} \left(\frac{T_D}{\hbar}\right)^3 \left(\frac{T}{T_D}\right)^3 \int\limits_0^{T_D/T} \frac{y^3}{\mathrm{e}^y - 1} \mathrm{d}y$$

Přičemž ovšem $T_D/T = \omega$:

$$F = 3NT \ln\left(1 - \mathrm{e}^{-T_D/T}\right) - 3NT \left(\frac{T}{T_D}\right)^3 \int\limits_0^{T_D/T} \frac{y^3}{\mathrm{e}^y - 1} \mathrm{d}y \tag{16}$$

Z rovnice (16) vytkneme $3NT$ a získáme

$$F = 3NT \left[\ln\left(1 - \mathrm{e}^{-T_D/T}\right) - \left(\frac{T}{T_D}\right)^3 \int\limits_0^{T_D/T} \frac{y^3}{\mathrm{e}^y - 1} \mathrm{d}y\right] \tag{17}$$

Helium He^4 je kapalné pouze při velmi nízkých teplotách, kdy $T \to 0$. Členy obsahující T se tedy změní takto: $T_D/T \to \infty$ a $\ln\left(1 - \mathrm{e}^{-T_D/T}\right) \to 0$.

Z rovnice (17) tedy dostaneme:

$$F = -3NT \left(\frac{T}{T_D}\right)^3 \int\limits_0^{\infty} \frac{y^3}{\mathrm{e}^y - 1} \mathrm{d}y \tag{18}$$

Člen $\int\limits_0^{\infty} \frac{y^3}{\mathrm{e}^y - 1} \mathrm{d}y$ v (18) jsme si na přednáškách definovali jako funkci $B_3(0)$

$$F = -3NT \left(\frac{T}{T_D}\right)^3 B_3(0) \tag{19}$$

Tepelná kapacita C_V je záporně vzatá druhá derivace F násobená teplotou

$$C_V = -T \frac{\partial^2 F}{\partial T^2}$$

$$C_V = -T \frac{\partial^2}{\partial T^2} \left(-3N \frac{T^4}{T_D^3} B_3(0)\right)$$

$$C_V = 3NT B_3(0) \frac{\partial^2}{\partial T^2} \left(\frac{T^4}{T_D^3}\right)$$

$$C_V = 3NT \frac{12T^2}{T_D^3} B_3(0)$$

$B_3(0) = \Gamma(4)\zeta(4)$, přičemž: $\Gamma(4) = 6$ a $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$.

$$C_V = N\frac{12\pi^4}{5}\left(\frac{T}{T_D}\right)^3 \tag{20}$$

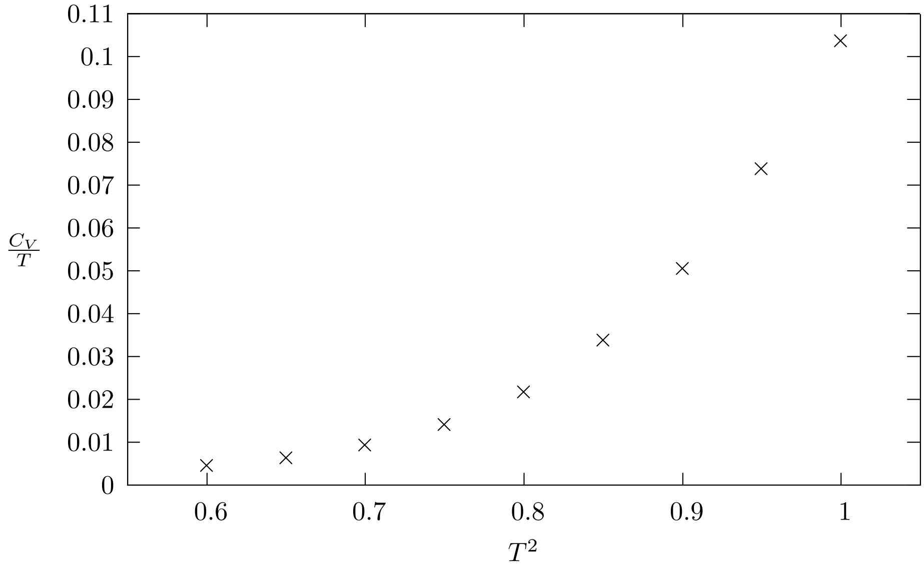
Vyjádřením Debayovy teploty z (20) získáme

$$T_D = \sqrt[3]{N\frac{12\pi^4}{5}\frac{T^3}{C_V}} \tag{21}$$

Tato rovnice se dá přepsat:

$$T_D = \sqrt[3]{NT^2\frac{12\pi^4}{5}\frac{T}{C_V}} \tag{22}$$

Zde nám vystupuje závislost T/C_V. Vyneseme si tedy zadaná data jako závislost jako $C_V/T(T^2)$ do obrázku 1.



Obrázek 1: Závislost $C_V/T(T^2)$

Závislost by měla být lineární, ovšem jak je vidět, lineární je pouze do $T^2 \approx 0.75$, tedy až do hodnoty $T \approx 0.85$. Nad teplotou právě $0.8\,\mathrm{K}$ se právě mění druh excitace (z fononů na rotony). Proložíme-li přímku lineární částí (tj. prvními čtyřmi hodnotami), získáme směrnici $C_T/T^3 \approx 54$, přičemž C_V je zde v jednotkách $\mathrm{J/kg/K}$.

C_V v případě, že je vyjádřena v jednotkách $\mathrm{J/kg/K}$ odpovídá veličině C_V/m, tedy o tepelnou kapacitu dělenou hmotností. Abychom zjistili Debayovu teplotu, provedeme rozměrovou analýzu. Vyjádříme-li tedy N jako počet částic na jednotku hmotnosti a dosadíme Boltzmanovu konstantu, tak se vztah (22) změní na

$$T_D = \sqrt[3]{kT^2\frac{N}{m}\frac{12\pi^4}{5}\frac{T}{C_V/m}} \tag{23}$$

Převedeme do tvaru, v němž se bude rozměrová analýza provádět lépe

$$T_D = \left[k\frac{N}{m}\frac{12\pi^4}{5}\frac{T^3}{C_V/m}\right]^{1/3} \tag{24}$$

A provedeme rozměrovou analýzu

$$\mathrm{K} = \left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}\frac{1}{\mathrm{kg}}\frac{\mathrm{K}^3}{\mathrm{J/K\,kg}}\right]^{1/3}$$

Ze znalosti hustoty ($\rho \approx 145\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$) a jedne částice $m_{\mathrm{He}} \approx 4 \times 1,67 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$ spočteme, že $\frac{N}{m} \approx 1,497 \cdot 10^{26}\,\mathrm{kg}^{-1}$.

Dosadíme tedy do rovnice (24) a Debayovu teplotu T_D spočteme jako

$$T_D \approx 20.8\ [\mathrm{K}]$$

Rovnici (21) můžeme upravit do tvaru:

$$T_D = \left(\frac{3N}{4\pi V}\right)^{1/3} 2\pi\hbar v \tag{25}$$

Objem V převedeme na podíl ρ/m. Získáme tak již dříve spočtené N/m. Vyjádříme si rychlost v a dostaneme:

$$v = \frac{\mathrm{k_B} T_D}{\left(\frac{3}{4\pi}\frac{N}{m}\rho\right)^{1/3} 2\pi\hbar} \tag{26}$$

Dosazením již dříve napsaných hodnot získáme rychlost asi

$$v \approx 250\ \left[m \cdot s^{-1}\right]$$