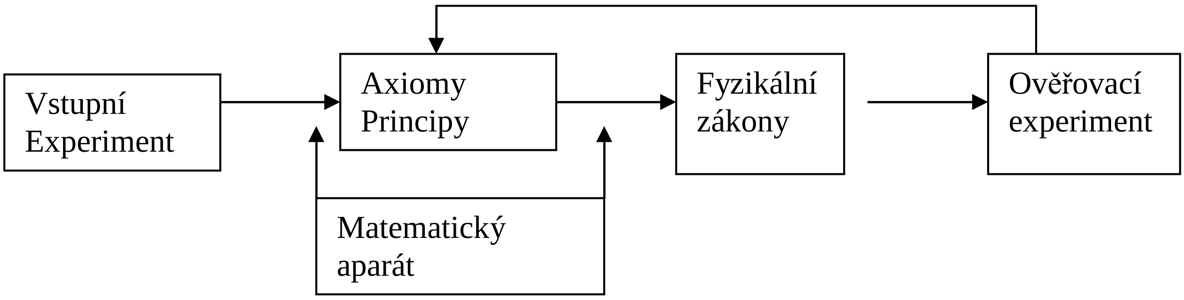
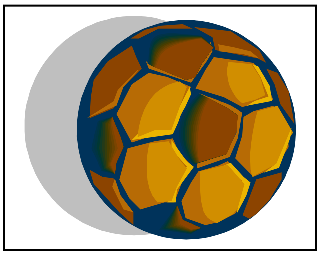
F1040 – Mechanika a molekulová fyzika

Typed by Petr Šafařík

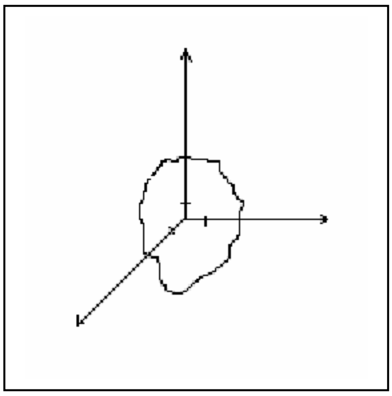


Popis pohybu Hmotného body

Hmotný bod – model reálného tělesa

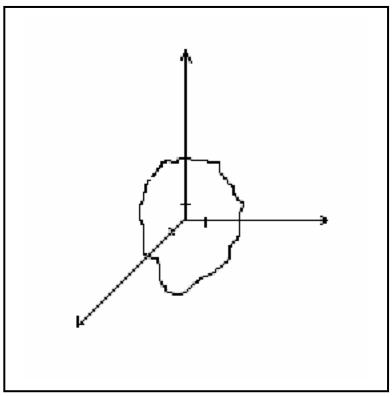
Těleso	Bod	Hmotný bod
 m, rozměry, tvar	. Bezrozměrný, beztvarý	. bezrozměrný, beztvarý, HMOTNÝ -model reálného tělesa, jehož rozměry zanedbáváme Zanedbatelnost: -vůči jiným tělesům -z hlediska experimentu

Popis polohy (pohybu) HB vzhledem k dané vztažné soustavě



Vztažná soustava souřadnic (kartézská) spojená s bodem na vztažném tělese.

Volný Hmotný Bod – je takový HB, že vliv okolních objektů je zanedbatelný (=neměřitelný)
Inerciální vztažná soustava je taková soustava, jenž je spjatá s volným hmotným bodem.



Je-li ve středu této vztažné soustavy Slunce, poté se taková vztažná soustava nazývá Galileova.

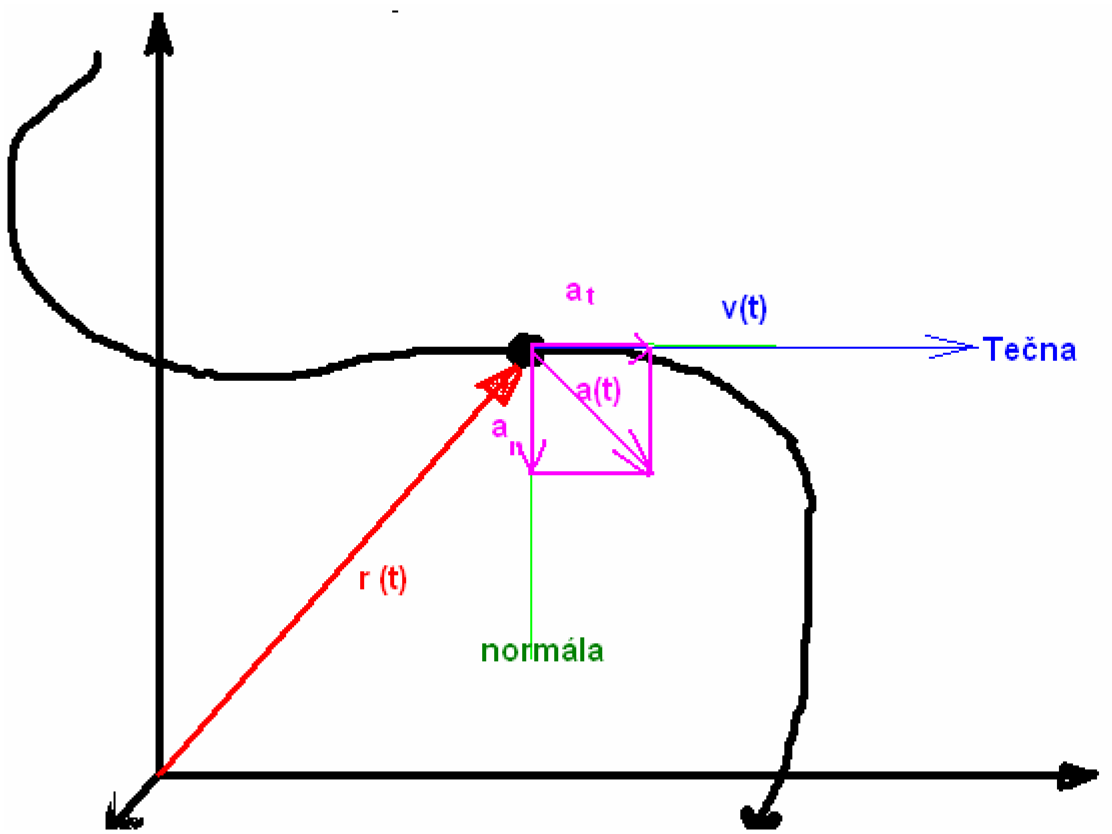
I.Newtonův zákon = vzájemný pohyb volných HB je rovnoměrný přímočarý, nebo klid.

Soustava spojená se Sluncem =Galileova = inerciální
Soustava spojená se Zemí = Laboratorní... Inerciální je pouze přibližně
$\vec{r}_{(t)}$ ... polohový vektor; vektorová funkce času
$\Delta\vec{r}_{[t;t+\Delta t]}$ ... vektor posunutí v intervalu $[t;t+\Delta t]$

$v_{průměr} = \langle\vec{v}\rangle = \dfrac{\Delta r_{[t;t+\Delta t]}}{\Delta t}$ ... průměrná rychlost v intervalu $[t;t+\Delta t]$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}(t;t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\langle\vec{v}\rangle_{(t;t+\Delta t)} =$$
$$=\left(\lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t};\lim_{\Delta t\to 0}\frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t};\lim_{\Delta t\to 0}\frac{z(t+\Delta t)-z(t)}{\Delta t}\right)=$$
$$=\left(\frac{dx}{dt};\frac{dy}{dt};\frac{dz}{dt}\right)=(\dot{x};\dot{y};\dot{z})=\dot{r}$$
$$\vec{v}(t)=\dot{r}$$
$$\vec{a}(t)=\dot{\vec{v}}(t)=\ddot{\vec{r}}\Rightarrow\vec{a}(t)=\frac{d^2r}{dt^2}$$

Zrychlení:



$\vec{\tau}$ ... jednotkový vektor ve směru tečny

$|\vec{\tau}| = 1$

$\vec{n}$ ... jednotkový vektor ve směru normály

$|\vec{n}| = 1$

$\vec{v}_{(t)} = v_{(t)}\vec{\tau}_t$

$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \dot{\tau}$

$\angle(\tau;\dot{\tau}) = 90°$

$\tau \cdot \tau = 1$

$\frac{d}{dt}(|\tau|\cdot|\tau|\cdot\cos 0) = 1$

$\dot{\tau}\tau + \tau\dot{\tau} = 0$

$2\tau\dot{\tau} = 0 \Rightarrow \tau \perp \dot{\tau}$

$\vec{n} = \frac{\dot{\vec{\tau}}}{|\dot{\vec{\tau}}|} \Rightarrow$ vektor dělený jeho velikostí je jednotkový vektor v tom směru.

$a = \dot{v}$

$\vec{a} = \dot{\vec{v}}$

$\vec{a} = \frac{d(v_{(t)}\tau_{(t)})}{dt} = \dot{v}_{(t)}\tau_{(t)} + \dot{\tau}_{(t)}v_{(t)} = \dot{v}_{(t)}\tau_{(t)} + |\dot{\vec{\tau}}|\cdot\vec{n}\cdot v_{(t)}$

$\dot{v}_{(t)}\tau_{(t)}$ … tečné zrychlení $\vec{a}_\tau$

$|\dot{\vec{\tau}}|\cdot\vec{n}\cdot v_{(t)}$ … normálové zrychlení $\vec{a}_n$

Rovnoměrný pohyb

$v = konst. \Rightarrow \dot{v} = 0 \Rightarrow$ nemění rychlost

$\vec{a}_\tau = \vec{0}$

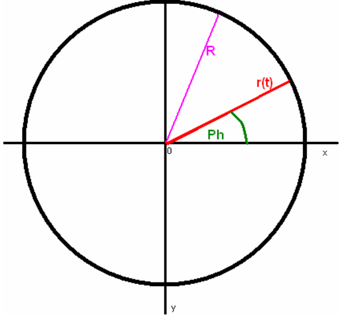
Přímočarý pohyb

$\dot{\vec{\tau}} = 0 \Rightarrow$ nemění směr

$\vec{a}_n = \vec{0}$

Pohyb po kružnici

Rovnoměrný



$a = \frac{v^2}{R}$

$\vec{a} = \vec{a}_n$

$a_n = \frac{v^2}{R}$

$x_t = R\cos\varphi_{(t)}$ | $x = R\cos\omega t$

$y_t = R\sin\varphi_{(t)}$ | $y = R\sin\omega t$

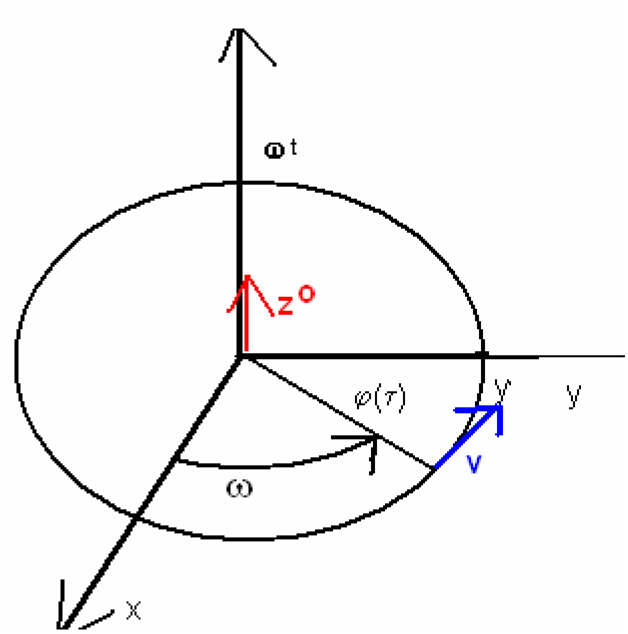
Rovnoměrný pohyb znamená: $\varphi = \omega t$ … přímá úměra, kde ω je konstanta úměrnosti.

$$\begin{array}{l|l|l} x = R\cos\omega t & \dot{x} = -R\omega\sin\omega t & \ddot{x} = -R\omega^2\cos\omega t \\ y = R\sin\omega t & \dot{y} = R\omega\cos\omega t & \ddot{y} = -R\omega^2\sin\omega t \end{array}$$

$$a = \sqrt{\ddot{x} + \ddot{y}} = \sqrt{R^2\omega^4\cos^2\omega t + R^2\omega^4\sin^2\omega t} = \sqrt{R^2\omega^4}\sqrt{\cos^2\omega t + \sin^2\omega t} = R\omega^2$$

$$\sqrt{\cos^2\omega t + \sin^2\omega t} = \sqrt{1}$$

$$v = R\omega \Rightarrow \omega = \frac{v}{R} \Rightarrow a = \frac{v^2}{R}$$



$\omega = \pm\dot{\varphi}$, kde se znaménko určí pravidlem pravé ruky

$\mathbf{z}^0$ ... jednotkový vektor

Definice: úhlové rychlosti:

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi}\mathbf{z}^0$$

$$\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}} = \ddot{\varphi}\mathbf{z}^0 + \dot{\varphi}\dot{\mathbf{z}}^0$$

$$\dot{\varphi}\dot{\mathbf{z}}^0 = 0$$

$$v = \omega R$$

$$\angle(\vec{\omega}R) = 90°$$

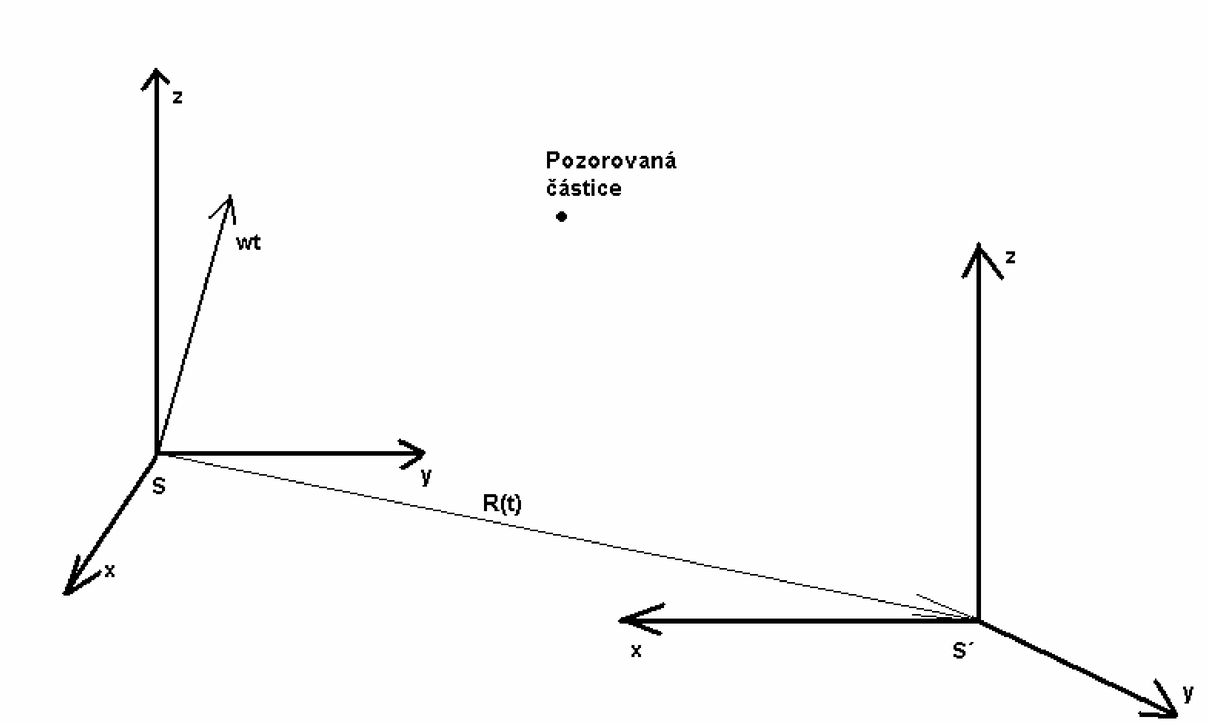
$$\angle(\vec{v};\vec{r}) = 90°$$

$$\angle(\vec{v};\vec{\omega}) = 90°$$

$$|\mathbf{r}| = R$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{v} = \vec{\omega}\otimes\vec{r} \\ \vec{a} = \dot{\vec{v}} \\ \vec{a} = (\vec{w}\otimes\vec{r}) = \dot{\vec{w}}\otimes\vec{r} + \vec{w}\otimes\vec{v} \\ \vec{a}_\tau = \vec{\varepsilon}\otimes\vec{r} \\ \vec{a}_n = \vec{w}\otimes\vec{v} \end{array}}$$

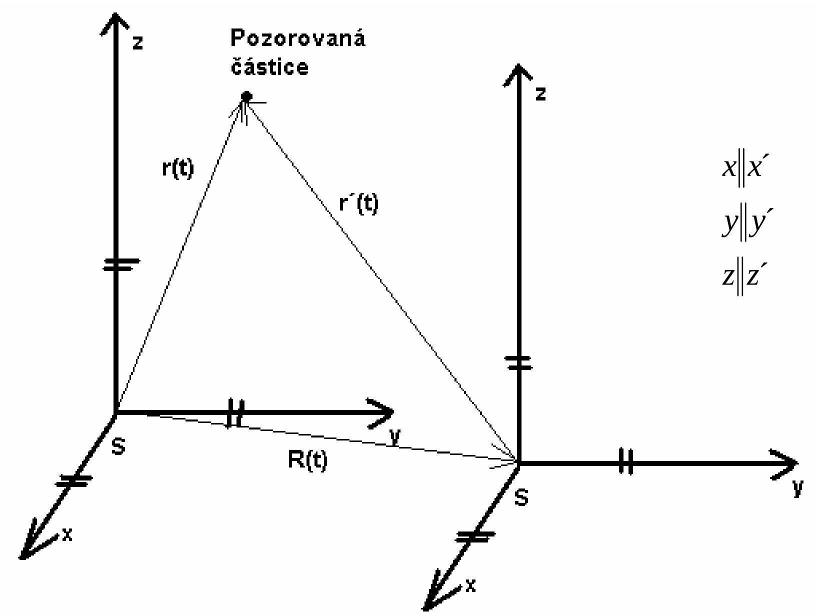
Pohyb z hlediska různých pozorovatelů



každý pohyb se může rozložit na Translační/Rotační
$\mathbf{R}_t$ ...vektor translace S´ vůči S.
$\mathbf{R}_t = (x_t; y_t; z_t)_S$
S... vůči který se pohybuje
wt ... úhlová rychlost pohybu S´vůči S.
Obecný pohyb:

A.) Translační
B.) Rotační

A.) Translační:
$\vec{\omega} = \vec{0}$



$x \| x'$
$y \| y'$
$z \| z'$

$\vec{r}_{(t)} = \vec{r}'_t + \vec{R}_{(t)}$

$\vec{v}_{(t)} = \vec{v}'_t + \vec{V}_{(t)}$

$\vec{a}_{(t)} = \vec{a}'_t + \vec{A}_{(t)}$

Pro případ, že pohyb S´vůči S je rovnoměrný přímočarý:

$\vec{R}_{(t)} = \vec{V}t + \vec{R}_0$

$\vec{V}_{(t)} = konst$

$\vec{A}_{(t)} = \vec{0}$

Galileova transformace:

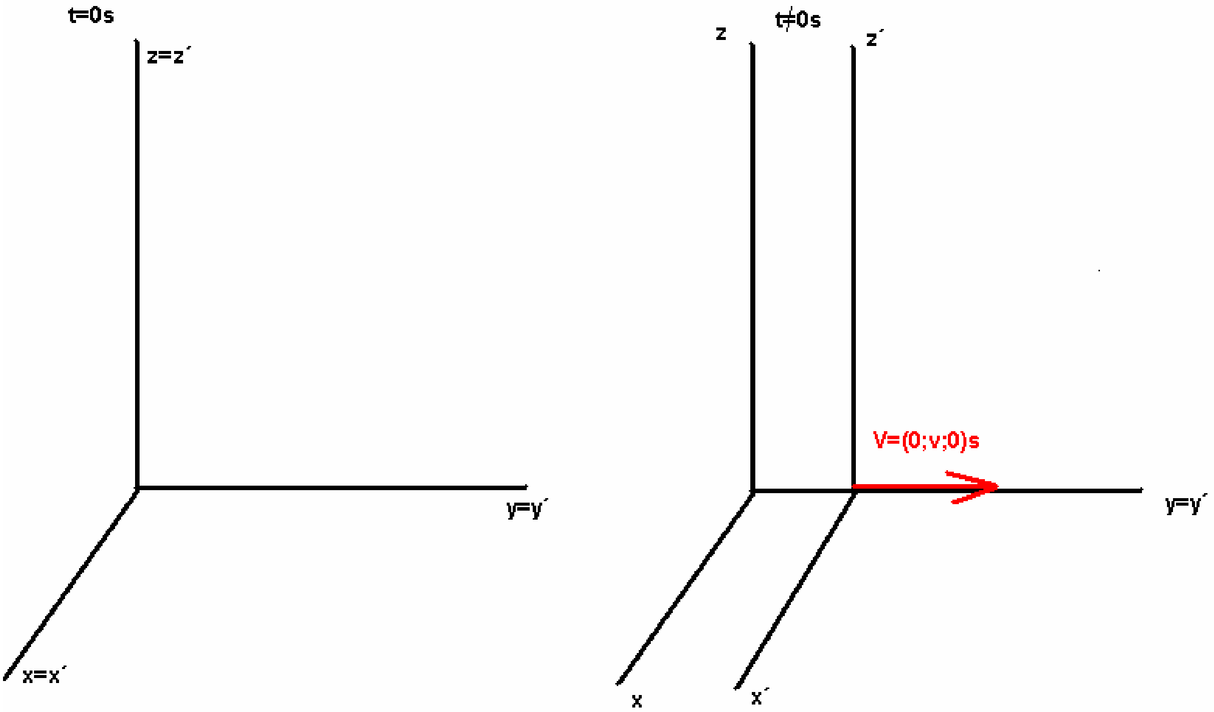
$\vec{r}_{(t)} = \vec{r}' + \vec{V}t + \vec{R}_0$

$\vec{v}_{(t)} = \vec{v}'_{(t)} + \vec{V}$

$\vec{a}_{(t)} = \vec{a}'_{(t)}$

Galileův princip relativity: Zákony mechaniky jsou ve všech inerciálních soustavách stejné.

Galileova transformace:



$x_t = x'_t$

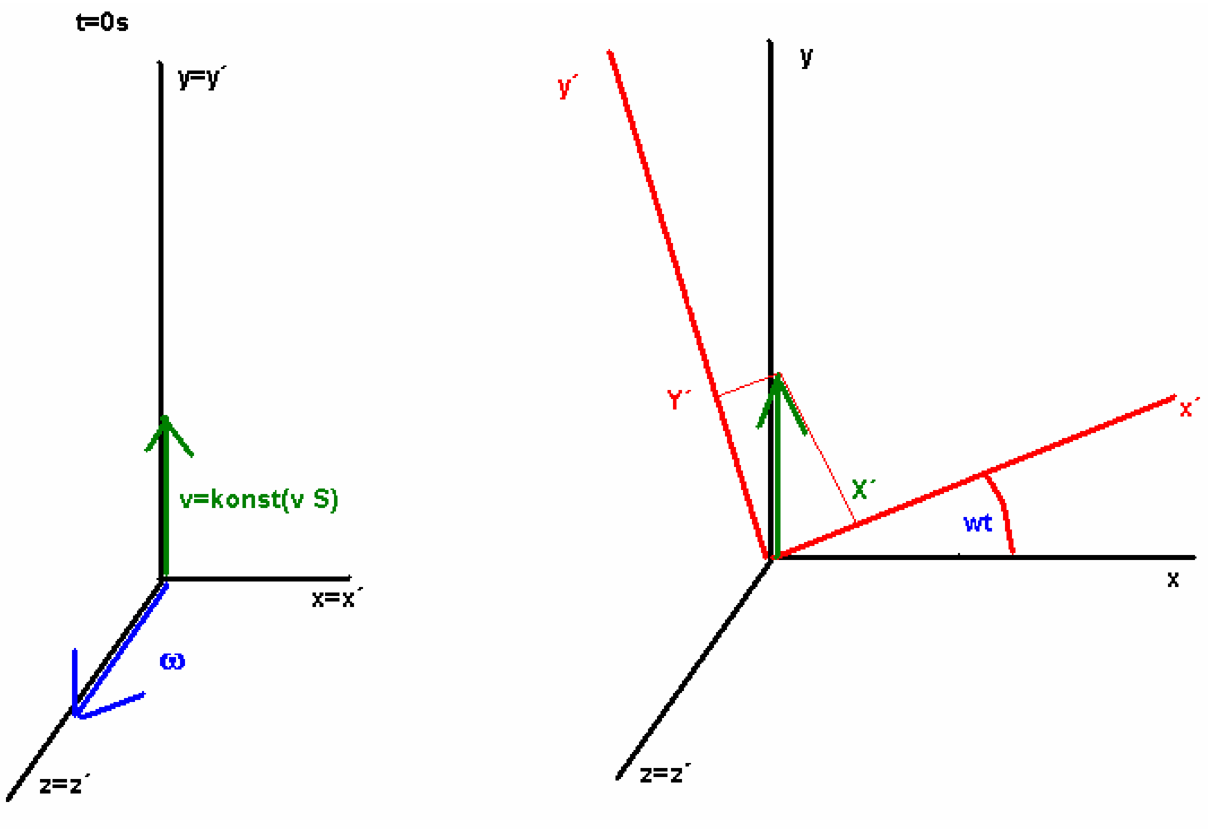
$y_t = y'_t + Vt$

$z_t = z'_t$

B.) Rotační

$v = (0; v; 0)_S$

$a = (0; 0; 0)_S$



$x'_{(t)} = vt \sin \omega t$

$y'_{(t)} = vt \cos \omega t$

$z'_{(t)} = 0$

$\vec{v}'_{(t)} = (v \sin \omega t + v\omega \cos \omega t; v \cos \omega t - v\omega t \cos \omega t; 0)_S$

Pohybové rovnice hmotného bodu

I. Newtonův zákon:

1. Vzájemný pohyb volných hmotných bodů je rovnoměrný, přímočarý.
2. Volný hmotný bod se v inerciální vztažné soustavě pohybuje rovnoměrně přímočaře.

II. Newtonův zákon

$\vec{p} = m\vec{v}$

$ma =$ Matematicky popsat, jak okolní objekty způsobují, že hmotný bod nebude volný hmotný bod.

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \dot{\vec{p}} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\dot{\vec{v}} + \dot{m}\vec{v} = \dot{m}\vec{v} + m\vec{a}$$

pro m=konst. bude

$$\dot{m} = 0 \Rightarrow \dot{\vec{p}} = m\vec{a} = \vec{F}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = ????$$

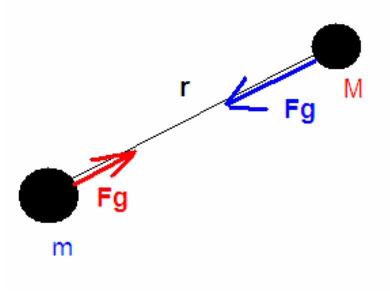
Pokus: měření $\frac{d\vec{p}}{dt}$

bude se provádět pokus vzájemného působení pouze dvou objektů, aby se omezil vliv dalších složek sil

Newton: $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$, kde $\vec{F}$ popisuje vliv okolního objektu(ů) na testovací objekt.

Silové zákony:

1. Gravitační síla:



$$\vec{F}_g = \kappa \frac{Mm}{r^2}(-1)\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$$

kde $\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$ je jednotkový vektor ve směru $\vec{r}$ a

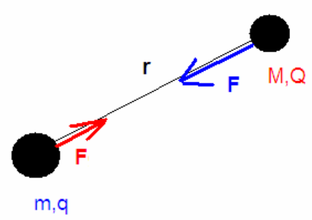
(-1) znamená, že síla působí obráceným směrem, než ukazuje jednotkový vektor

2. Elektrická síla:

$$\vec{F}_g = \kappa \frac{Mm}{r^2}(-1)\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$$

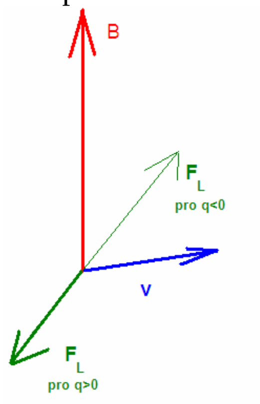
$$\vec{F}_e = \kappa \frac{Qq}{r^2}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$$

Elektrická síla je ale mnohonásobně větší, než síla gravitační, proto se gravitační může zanedbat



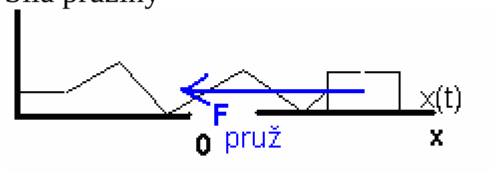
$$F_e \succ\succ\succ F_g$$

3. Síla působící na nabité těleso pohybující se v elektrickém poli indukčnosti **B**



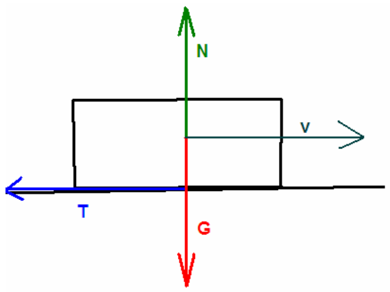
$\vec{F}_L = q\vec{v} \times \vec{B}$
Lawrencova síla

4. Síla pružiny



$$\vec{F}_p = -kx \cdot \vec{x}^0$$

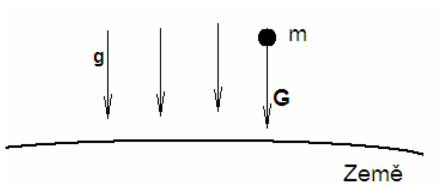
5. Třecí síla



$\vec{T} = -Nf\left(\frac{\vec{v}}{v}\right)$

$\left(\frac{\vec{v}}{v}\right)$ jednotkový vektor ve směru **v**.

6. Tíhová síla



$$\vec{G} = m\vec{g}$$

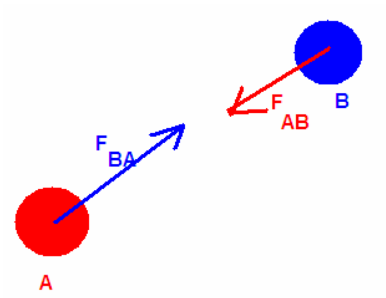
$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{výsledná}$$

$$\vec{F}_V = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n$$

$\vec{F}_1; \vec{F}_2; ...; \vec{F}_n$ jednotlivé síly… silový zákon… princip superpozice

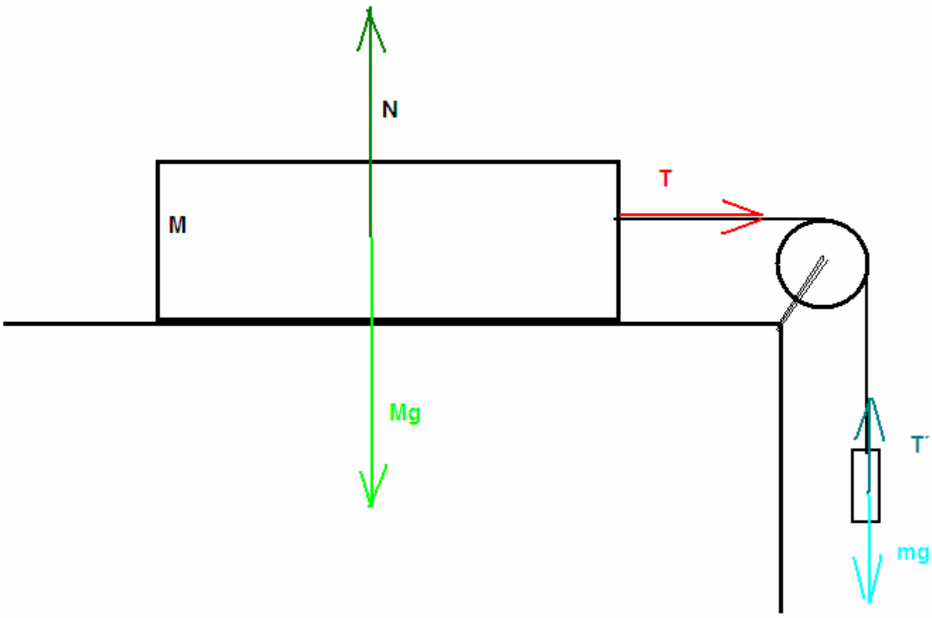
III. Newtonův zákon

Vzájemné působení objektů



$$\boxed{\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}}$$

Příklad:



$$M\vec{A} = \vec{G} + \vec{N} + \vec{T}$$

$$M\vec{A} = M\vec{g} + \vec{N} + \vec{T}$$

$$l = \frac{1}{2}At^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2l}{A}}$$

Rozklad do složek:

$$x : MA_x = T$$

$$\left.\begin{array}{r} y : MA_y = N - Mg \\ \text{Vazební podmínka} \\ A_y = 0 \end{array}\right\} N = Mg$$

… důsledek vazební podmínky, **nikoli** akce a reakce

$$x = MA_x = T$$

Pro závaží platí:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}´$$

$$x : ma_x = 0$$

$$y : ma_y = T´ - mg$$

Vazební podmínka:

$$\vec{A} = (A;0) \wedge \vec{a} = (0;a_y) = (0;-a) \Rightarrow A = a$$

$$\left.\begin{aligned} MA &= T \\ m(-a) &= -mg + T' \\ A &= a \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} MA &= T \\ -mA &= -mg + T' \end{aligned}\right\} T = T'$$

Máme-li nehmotnou kladku, poté $T=T'$

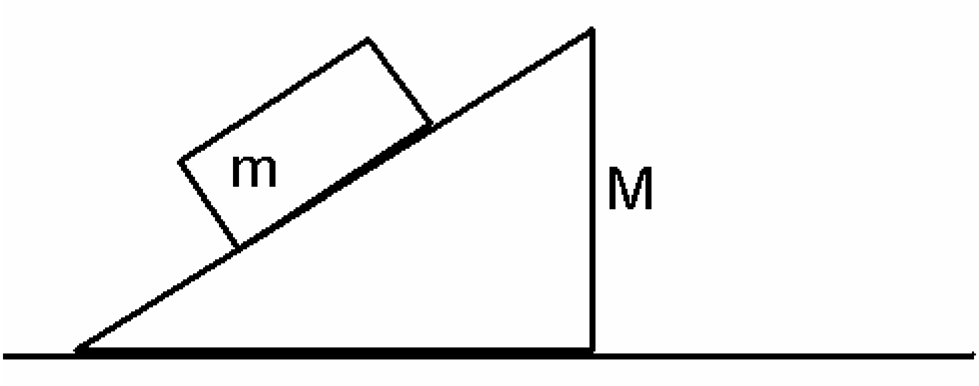
$$MA = T$$

$$-mA = -mg + T$$

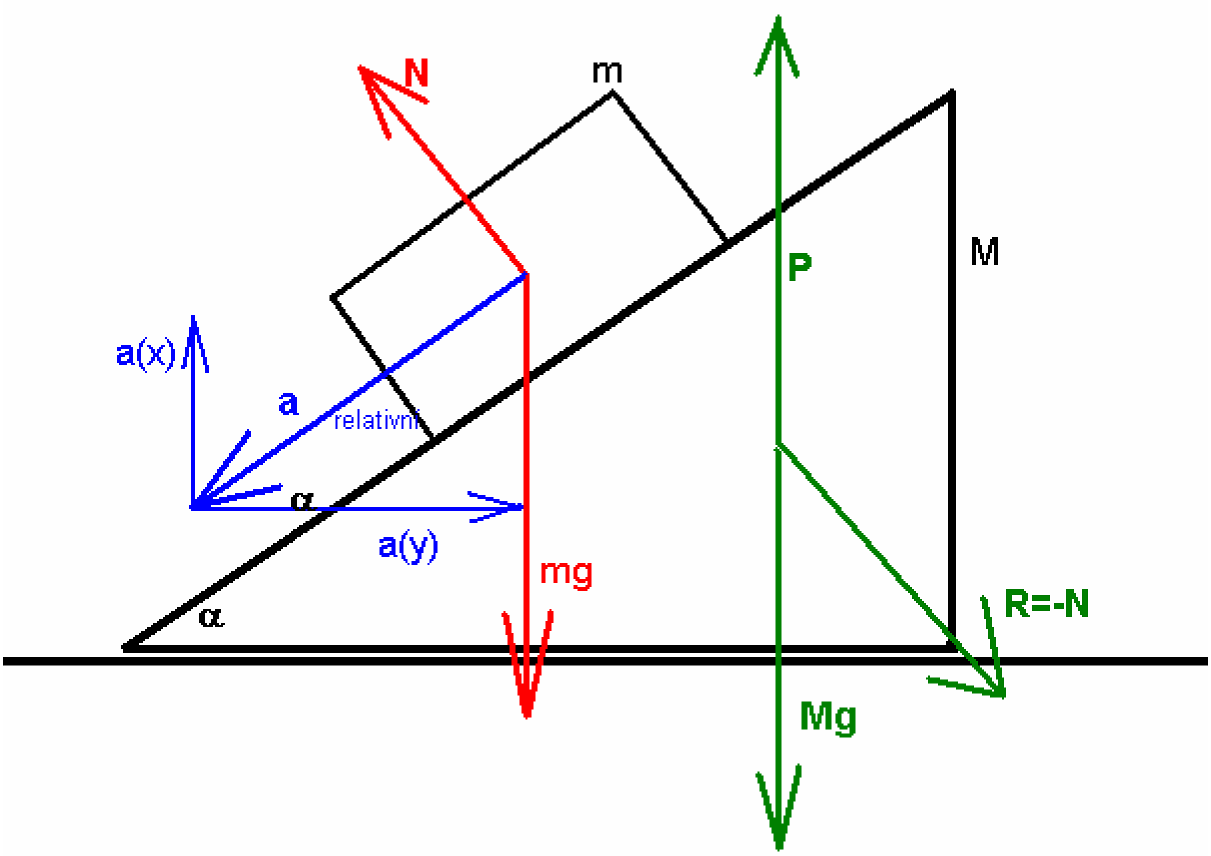
$$(M+m)A = mg$$

$$A = \frac{mg}{M+m}$$

Příklad: Na klín položíme těleso, přičemž mezi klínem a tělesem je nulové tření, stejně jako mezi klínem a podložkou. Co se stane s klínem a tělesem?



Silový rozbor:
Červené jsou síly působící na těleso m
Zelené jsou síly působící na klín M
Modré jsou jednotlivé složky zrychlení a tělesa m.



$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}$ ... výslednice všech sil, jimiž okolní objekty působí na těleso *m*.

$\frac{d\vec{P}}{dt} = m\vec{A}$ ... výslednice všech sil, jimiž okolní objekty působí na těleso *M*.

$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}$

$M\vec{A} = M\vec{g} + \vec{P} + (-\vec{N})$

$ma_x = 0 - N\sin\alpha \qquad MA_x = 0 + 0 + N\sin\alpha$

$ma_y = -mg + N\cos\alpha \qquad MA_y = -Mg + P - N\cos_a$

4 rovnice pro 6 neznámých:
$a_x; a_y; A_x; A_y; P; N$
vazební podmínka: vertikální zrychlní klínu je nulové:
$A_y = 0 \Rightarrow A = A_x$

Dodáme podmínku:
a-relativní (a_{rel}) je rovnoběžné se skosenou hranou klínu.
a_{rel} ... zrychlení m vůči M.

$\vec{a}_{rel} = \vec{a} - \vec{A}$

$\frac{a_y - A_y}{a_x - A_x} = tg\alpha$ ... z obrázku

$$\left.\begin{aligned} ma_x &= -N\sin\alpha \\ ma_y &= -mg + N\cos\alpha \end{aligned}\right\} N = ma_y \cos\alpha + mg\cos\alpha - ma_x \sin\alpha$$

$$MA = N\sin\alpha$$

$$a_y = (a_x - A)\tan\alpha \Rightarrow a_x \sin\alpha - A\sin\alpha$$

$$\Big\} N = mg\cos\alpha - mA\sin\alpha$$

$$0 = -Mg + P - N\cos\alpha$$

$$N = \frac{MA}{\sin\alpha}$$

$$N = N$$

$$\frac{MA}{\sin\alpha} = -mA\sin\alpha + mg\cos\alpha$$

$$A = \frac{mg\cos\alpha\sin\alpha}{M + m\sin^2\alpha}$$

$$N = \frac{Nmg\cos\alpha}{M + m\sin\alpha}$$

$$N = (mg\sin\alpha)\left(\frac{M}{M + m\sin^2\alpha}\right)$$

Pokud se klín nehýbe Přidá se, jakmile klín uvolníme

Tření

Pokud se těleso pohybuje platí:

$T_d = Nf$

Pokud se těleso nepohybuje:

$T_s = Nf_0$ ... pouze maximální statická třecí síla.

$[0;t_0]..a_0$

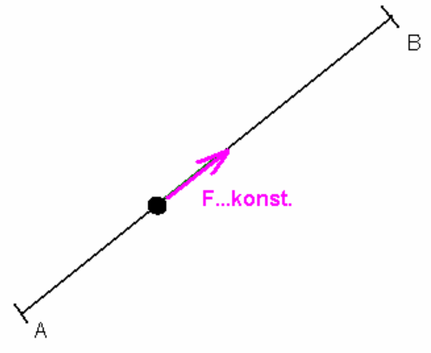
$ma = F - T_s$

$Ts_{(t)} = F_{(t)}$

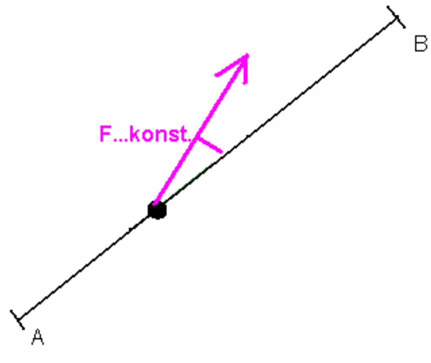
$$t_{(0)} : T_s(t_0) = Nf_0 \Rightarrow mgf_0 = Kf_0 \Rightarrow t_0 = \frac{mgf_0}{K}$$

$$t \succ t_0 : ma = F - F_d = Kt_0 - Nf \Rightarrow a = \frac{mgf_0 - mgf}{m} = g(f_0 - f)$$

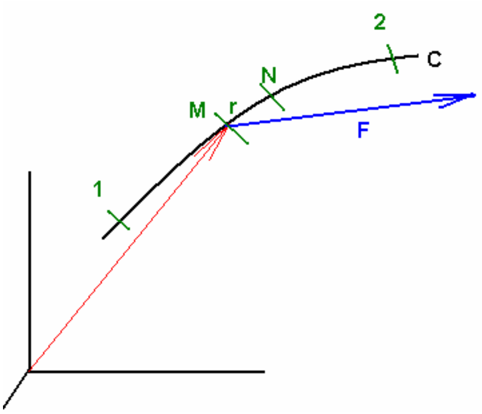
Práce a kinetická energie



Pokud **F**... konst
a **F** je rovnoběžná s **r**
pak práce A je rovno:
$A_{12} = Fs$



Pokud **F**... konst
a **F** není rovnoběžná s **r**
pak práce A je rovno:
$A_{12} = Fs\cos\alpha = \vec{F}\Delta\vec{r}$



Pokud **F** není konst
a **F** není rovnoběžná s **r**
α ... není konst.

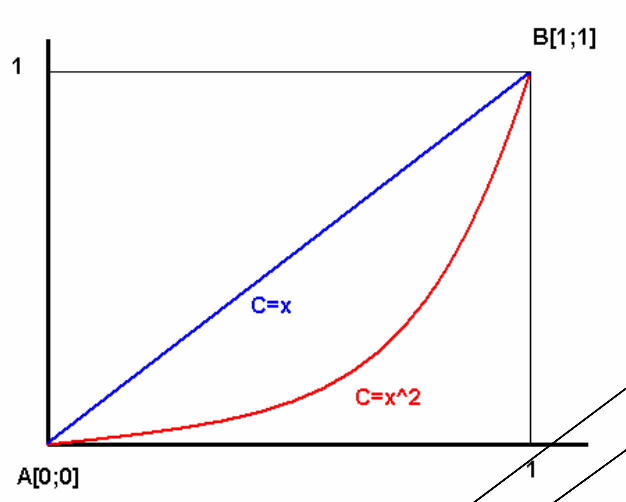
F je jedna ze sil působících na částici
oblouk MN aproximujeme úsečkou
$\Delta\vec{F}$ bude na MN minimální a můžeme ji zanetbat
A_{12} ... součet elementárních prací
$\vec{F}_{(\vec{r},\vec{v},t)}$
$\sum \vec{F}_{(\vec{r},\vec{v},t)}\Delta\vec{r} \to \int_C \vec{F}_{(\vec{r},\vec{v},t)} dr$
$C : \vec{r}_{(t)} = \left(x_{(t)}; y_{(t)}; z_{(t)}\right)$
$d\vec{r} = \left(dx, dy, dz\right)$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_{(t)} \Rightarrow d\vec{r} = \vec{v}_{(t)} dt$$
$$\vec{F} d\vec{r} = \left[F\left(\vec{r}_{(t)}; \vec{v}_{(t)}; t\right) \cdot \vec{v}_{(t)}\right] dt$$

$$F\left(\vec{r}_{(t)}; \vec{v}_{(t)}; t\right) \cdot \vec{v}_{(t)} = f_{(x)}$$

$$A_{12} = \int_C \vec{F} d\vec{r} = \int_{t1}^{t2} f_{(t)} dt = \int_{t1}^{t2} \left(\vec{F}\vec{v}\right) dt = \int_{t1}^{t2} \left(\vec{F}_{(r_{(t)}; v_{(t)}; t)} \cdot \vec{v}_{(t)}\right) dt$$

Př:
z=konst.=0... pohyb v rovině



$$\vec{F}_{(\vec{r})} = \left(\vec{F}_{x(x;y)}; \vec{F}_{y(x;y)}\right) = \left(ax^2 y; b(y-x)\right)$$
$$a = 1\left[Nm^{-3}\right]$$
$$b = 1\left[Nm^{-1}\right]$$

$$\vec{r}' = (0{,}2; 0{,}5)$$
$$\vec{F} = (0{,}02N, 0{,}3N)$$

$$x = \chi_1 t$$
$$y = \chi_2 t^2 \ldots \chi_{1,2} = 1\left[ms^{-1}\right]$$

$$\begin{array}{l|l} x = t & \dot{x} = 1 \\ y = t^2 & \dot{y} = 2t \end{array}$$

$$F_x = x^2 y = t^2 t^2 = t^4$$
$$F_y = y - x = t^2 - t$$

$$\vec{F}\vec{v} = F_x \dot{x} + F_y \dot{y} = t^4 + \left(t^2 - t\right) 2t$$

$$\int_C = \vec{F} d\vec{r} = \int_0^1 \left(t^4 + 2t^3 - 2t^2\right) dt = \frac{1}{30} [J]$$

$$C_2: \begin{array}{c|c} x=t & \dot{x}=1 \\ y=t & \dot{y}=1 \end{array}$$

$$\vec{F}=\left(t^2;0\right)$$

$$\vec{F}\vec{v}=t^3+0=t^3$$

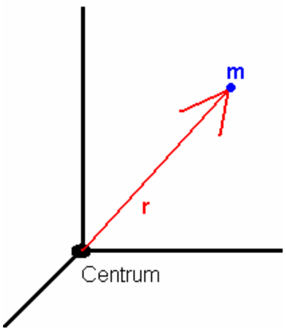
$$A\int_0^1 t^3 dt=\frac{1}{4}[J]$$

Konzervativní silové pole

Pole, které splňuje následující podmínky, se nazývá konzervativní silové pole.
Jaké jsou podmínky na silové pole, aby práce A_{12} po křivce *C* nezávisela na tvaru *C*, ale pouze na počátečním a koncovém bodě *A,B*.

Tvrzení:
Centrální pole je konzervativní.

Důkaz:



$$\boxed{\vec{F}_{Centralni}=F\left(\pm\frac{\vec{r}}{r}\right)=\left(\pm\frac{F_{(\vec{r})}}{r}\right)\vec{r}}$$

$$\boxed{\left(\pm\frac{F_{(\vec{r})}}{r}\right)=\theta_r}$$

$$A=\int_C \vec{F}_C dr$$

$$\vec{F}_C dr=\theta_{(r)}\vec{r}d\vec{r}=$$

$$\left|\begin{array}{l} \vec{r}\ldots r \\ \vec{r}\cdot\vec{r}=r^2=r\cdot r \\ \frac{d\vec{r}}{dt}\vec{r}+\vec{r}\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{dr}{dt}r+r\frac{dr}{dt} \\ \frac{d\vec{r}}{dt}\vec{r}=r\frac{dr}{dt} \\ \vec{r}d\vec{r}=rdr \end{array}\right|$$

$$=\theta_{(r)}dr$$

$A=\int_A^B \theta_{(r)} r dr$ ... ve výsledku nefiguruje r, ale pouze r, takže není závislý na tvaru trajektorie.

Práce gravitačního pole

$$\vec{F}_g = \frac{\aleph Mm}{r^2}\left(-\frac{\vec{r}}{r}\right)$$

$$\vec{F}_g d\vec{r} = -\frac{\aleph Mm}{r^3}\vec{r}d\vec{r} = -\frac{\aleph Mm}{r^3} r dr = -\frac{\aleph Mm}{r^2} dr$$

$$A = \int_{r_1}^{r_2} -\frac{\aleph Mm}{r^2} dr = -\aleph Mm \int_{r1}^{r2} \frac{dr}{r^2} = \left.\frac{-\aleph Mm}{r}\right|_{r1}^{r2}$$

$$A_{AB} = -\aleph Mm\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

Potenciální energie

Pro:

$r_1 \to r$

$r_2 \to \infty$

Platí:

$A = -\dfrac{\aleph Mm}{r} = u_{(r)}$ ... potenciální energie částice v gravitačním poli v bodě **r**.

Kinetická energie

Na částici působí více různých sil, které vykonávají různé práce:

$$F_{1-12} = \int_C F_1 d\vec{r}$$

$$F_{2-12} = \int_C F_2 d\vec{r}$$

$$A_{12} = \sum A_{j-12} = \sum \int_C \vec{F}_j dr = \int_C \left(\sum \vec{F}_j d\vec{r}\right) = \int_C \vec{F}_v d\vec{r}$$

$\vec{F}_V = ma$
$dr = mad\vec{r}$ ...fyzikální vyjádření

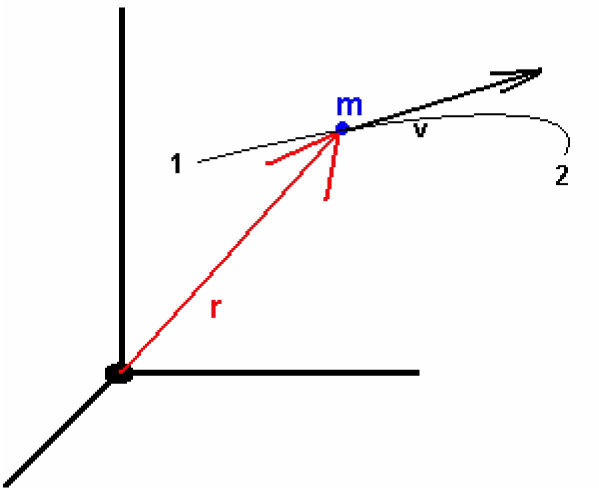
$$mad\vec{r} = m\frac{dv}{dt}(\vec{v}dt) = m\vec{v}d\vec{r} = mvdv$$

$$\int \vec{F}_v d\vec{r} = \int_{v1}^{v2} mvdv = \frac{1}{2}m\left(v_2^2 - v_1^2\right)$$

Kinetická energie $E_k = \dfrac{1}{2}mv^2$

Celková práce všech sil které na částici působí určuje změnu kinetické energie částice.

Zákon zachování mechanické energie



Pohyb v silovém poli $\vec{F}_{(\vec{r})}$

$\vec{F}_{(\vec{r})}$ … jediná síla působící na m.

$$(\Delta E_k)_{1\to 2} = \int_C \vec{F}_{(\vec{r})} d\vec{r}$$

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \int_C \vec{F}_{(\vec{r})} d\vec{r}$$

ZZE částice v gravitačním poli.

$$\vec{F}_{(\vec{r})} = -\frac{\aleph mM}{r^2}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$$

$$\vec{F}_{(\vec{r})} = -\frac{\aleph mM}{r^3}\vec{r} d\vec{r}$$

$$\int_C \vec{F}_{(\vec{r})} d\vec{r} = \int_1^2 -\frac{\aleph mM}{r^2} dr = \aleph mM \frac{1}{r}\Big|_{r1}^{r2}$$

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \aleph mM \frac{1}{r}\Big|_{r1}^{r2}$$

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \aleph mM \frac{1}{r_2} - \aleph mM \frac{1}{r_1}$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \left(-\aleph mM \frac{1}{r_1}\right) = \frac{1}{2}mv_1^2 + \left(-\aleph mM \frac{1}{r_2}\right)$$ …tento součet se zachovává pro libovolný bod.

Neboli: $\frac{1}{2}mv_1^2 + \left(-\aleph mM \frac{1}{r_1}\right) = konst. = E_0$ … celková mechanická energie

Potenciální energie částice v gravitačním poli

$U_{(r)} = -\frac{\aleph mM}{r}$ … potenciální energie částice m v gravitačním poli částice M.

Práce gravitačního pole

$W_{1\to 2} = \left[\frac{\aleph mM}{r_2} - \frac{\aleph mM}{r_1} \right]_{\substack{r_1=r \\ r_2=\infty}}$ … práce, kterou gravitační síla vykoná na posunut.

ZZE pružiny

$\vec{F} = (-kx;0;0)$

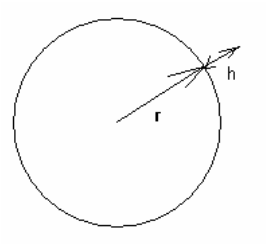
$\vec{F}d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z + dz$

$F_y dy + F_z + dz = 0$

$\vec{F}d\vec{r} \int_{\vec{r}1}^{r2} -kxdx = -\frac{1}{2}k\left(x_2^2 - x_1^2\right) = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$

$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = konst. = E_0$ … celková mechanická energie

Přechody mezi potenciálními energiemi $\left[mgh \leftrightarrow \frac{\aleph mM}{r} \right]$



$r = R + h$

$U = -\frac{\aleph mM}{R+h}$

$U = -\frac{\aleph mM}{R} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{h}{R}\right)}$

$\left| \frac{1}{1+x} \cdot \frac{(1-x)}{(1-x)} = \frac{1-x}{1-x^2} = 1-x \right|$ zanedbatelné

$U = -\frac{\aleph mM}{R} \frac{1}{1+\frac{h}{R}} \doteq -\frac{\aleph mM}{R}\left(1-\frac{h}{R}\right) = -\frac{\aleph mM}{R} + m\left(\frac{\aleph M}{R^2}\right)h$

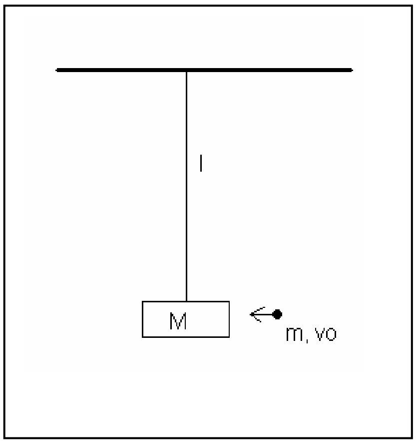
$\left| \frac{\aleph M}{R^2} = g \right|$

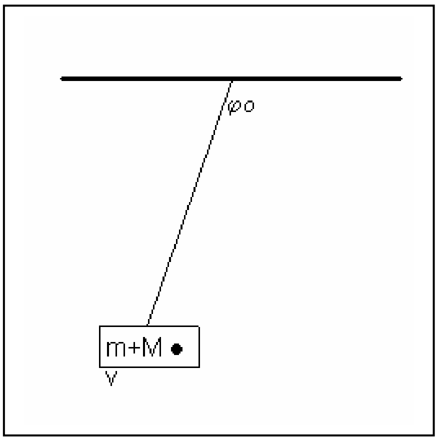
$E_k + U = E_0$

$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{\aleph mM}{R} + mgh = \left| -\frac{\aleph mM}{R} = konst \right| = E_0$

$\frac{1}{2}mv^2 + mgh = konst$

Příklad:
Střela o hmotnosti *m* a počáteční rychlosti v_0 narazí do kyvadla a vychýlí ho o úhel φ_0.





v... společná rychlost soustavy bezprostředně po srážce
Jaká byla rychlost v_0 ?

Před srážkou:
Celková hybnost soustavy střela + kyvadlo:

$$P_C = m\vec{v}_0 + M\vec{V}_0$$

$$\vec{V}_0 = \vec{0}$$

Po srážce:

$$P_0 = (m+M)v$$

$$\vec{P}_0 = \vec{P}_C \Rightarrow m\vec{v}_0 = (m+M)\vec{v}$$

$\vec{v}, \vec{v}_0$ ... stejný směr

$$\vec{v}_0 = \frac{m+M}{m}\vec{v}$$

$$v_0 = \frac{m+M}{m}v$$

Mechanická energie

Stav 1.: $E_{k1} + U_1 = \frac{1}{2}(m+M)v^2 + 0$

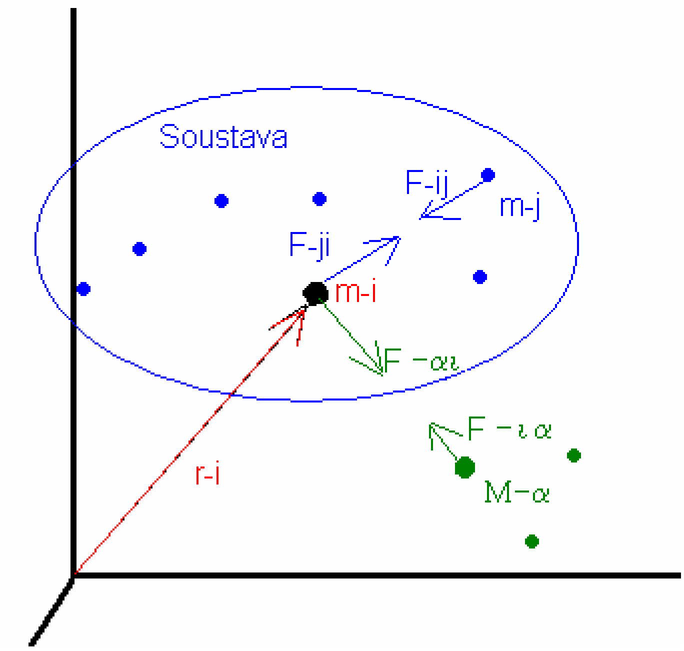
Stav 2.: $E_{k2} + U_2 = 0 + (m+M)gh ... h = l - l\cos\varphi_0$

$$\frac{1}{2}(m+M)v^2 = (m+M)gl(1-\cos\varphi_0)$$

$$v = \sqrt{2gl(1-\cos\varphi_0)}$$

$$v_0 = \frac{m+M}{m}\sqrt{2gl(1-\cos_0)}$$

Mechanika soustavy částic



Okolní objekty i-té částice

A) $m_1;...;m_{i-1};m_{i+1};...;m_N$

B) M_α

Síla, kterou působí j-tá částice na i-tou

$\vec{F}_{ji}^{\,\text{int}}$

$\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}^{\,ext}$

$\vec{F}_{i\alpha}$

$\vec{F}_{i\alpha}$ ...nepatří do soustavy, proto nás nyní nezajímá.

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \vec{F}_{ij}^{\,ext} + \sum_{\alpha=1}^{K} \vec{F}_{i\alpha}^{\,ext}$$

$$dodefinujeme: \vec{F}_{ii} = \vec{0}$$

První impulsová věta:

Celková hybnost=součet všech hybností

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{M} \vec{p}_i$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}\sum \vec{p}_i = \sum \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{N}\left[\sum_{\substack{i=1 \\ j\neq i}}^{N} \vec{F}_{ij}^{\,\text{int}} + \sum_{\alpha=1}^{K} \vec{F}_{i\alpha}^{\,ext}\right] = \sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{i=1 \\ j\neq i}}^{N} \vec{F}_{ij}^{\,\text{int}} + \sum_{i=1}^{N}\sum_{\alpha=1}^{K} \vec{F}_{i\alpha}^{\,ext} = \vec{F}_V^{\,\text{int}} + \vec{F}_V^{\,ext} =$$

$\left|\vec{F}_V^{\,\text{int}} = \vec{0} \text{ ...akce a reakce}\right|$

$\boxed{\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_V^{\,ext}}$ ...1.Impulsová věta (důsledek II. a III. Newtonova zákona)

Izolovaná soustava

Zákon zachování hybnosti izolované soustavy:

$\vec{F}_V^{ext} = \vec{0}$ resp. $\vec{F}_{i\alpha}^{ext} = \vec{0}$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{P} = konst$$

Neizolovaná soustava

pro kterou platí, že $\vec{F}_V^{ext} = \vec{0}$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{P} = konst$$