F1421 – Základní matematické metody ve fyzice - Přednášky

Typed by Petr Šafařík

Algebra vektorů v R(3)
Orientované úsečky v **R**3

$\mathbf{AB} = [A; B]$
Délka: $d(\mathbf{AB})$
Směr: dán přímkou, na které leží
Orientace: je-li přímka orientována

Volný vektor:
u=množina všech vektorů dané délky, směru a orientace
Nulový vektor : **0**
Opačný vektor k **AB** je **BA**

u;v...volné
AB... libovolně umístění **u**
AC...odpovídající umístění **v**
Operace:
Sčítání: **AD=AB+AC**
Násobení číslem

$\alpha \in \mathbf{R}$

$\mathbf{AC} = \alpha\mathbf{AB}$

$d(\mathbf{AC}) = |\alpha| d(\mathbf{AB})$

$p(\mathbf{AC}) = p(\mathbf{AB})$

$(\mathbf{AC}) \|^{+} (\mathbf{AB}) pro : \alpha \succ 0$souhlasně

$(\mathbf{AC}) \|^{-} (\mathbf{AB}) pro : \alpha \prec 0$nesouhlasně

u;v...volné
AB... libovolně umístění **u**
AC...odpovídající umístění **v**
Vlastnosti:

1. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
2. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$
3. $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$
4. $\mathbf{u} + \mathbf{u}' = \mathbf{0}$

1-4) Komutativní grupa

5. $(\alpha\beta)\vec{u} = \alpha(\beta)\vec{u} = \beta(\alpha\vec{u})$
6. $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$
7. $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$
8. $(-1)\vec{u} = -\vec{u}$

1-8) Vektorový prostor

Systém vektorů $\vec{u}_1; \vec{u}_2; .....; \vec{u}_n$

Systém čísel $\alpha_1; \alpha_2; ....; \alpha_n;$

$\vec{b} = \alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + ... + \alpha_n\vec{u}_n$

$\vec{b}$ je lineární kombinace vektorů $\vec{u}_1; \vec{u}_2; .....; \vec{u}_n$ s koeficienty $\alpha_1; \alpha_2; ....; \alpha_n;$

$\vec{u} = u_1\vec{a} + u_2\vec{b} + u_3\vec{c}$

$\vec{v} = v_1\vec{a} + v_2\vec{b} + v_3\vec{c}$

$\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$
$\vec{v} = (v_1; v_2; v_3)$
$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} = \left(u_1\vec{a} + u_2\vec{b} + u_3\vec{c}\right) + \left(v_1\vec{a} + v_2\vec{b} + v_3\vec{c}\right) = \vec{a}(u_1 + v_1) + \vec{b}(u_2 + v_2) + \vec{c}(u_3 + v_3)3$
$\vec{w}$ ... je lineární kombinace báze $\left(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}\right)$
$\alpha_1\vec{u}_1 + ...\alpha_n\vec{u}_n = \vec{0} tak, že \exists \alpha_n \in \mathbf{R} platí : \alpha_n \neq 0$
je-li $\alpha_1 \neq 0$ pak platí $\vec{u}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\vec{u}_2 - ... - -\frac{\alpha_n}{\alpha_1}\vec{u}_n$

Systém vektorů $\vec{u}_1 ... \vec{u}_n$ je **<u>lineárně závislý</u>** tehdy, když pro $\alpha_1 ... \alpha_n$ platí $\alpha_1\vec{u}_1 + ...\alpha_n\vec{u}_n = \vec{0}$.
V opačném případě je systém **<u>lineárně nezávislý</u>**!

Řekneme, že $(\vec{u}_1 ... \vec{u}_n)$ je <u>maximálně nezávislý systém</u>, jestliže:
1. je nezávislý
2. přidáním jakéhokoli vektoru vznikne vektorový systém lineárně závislý. Resp. systém $(\vec{u}_1 ... \vec{u}_n)$ je závislý pro libovolné $\vec{u} \Rightarrow$ ***<u>BÁZE VEKTOROVÉHO PROSTORU</u>***

Počet prvků báze = dimenze prostoru
$\mathbf{R}^1 = 1$
$\mathbf{R}^2 = 2$
$\mathbf{R}^3 = 3$
etc...
$\mathbf{R}^2 ... \dim = 2$
$\vec{w} = w_1\vec{u} + w_2\vec{v}$
$\vec{w} = w_1\vec{a} + w_2\vec{b} + w_3\vec{c}$
$\vec{w} = (w_1; w_2; w_3)_{(\vec{a};\vec{b};\vec{c})}$
...složky **w** vzhledem k bázi (**a**;**b**;**c**)

$\vec{u} = u_1\vec{a} + u_2\vec{b} + u_3\vec{c}$
$\vec{v} = v_1\vec{a} + v_2\vec{b} + v_3\vec{c}$

$\mathbf{u} = (u_1; u_2; u_3)$
$\mathbf{v} = (v_1; v_2; v_3)$

$\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v} = \left(u_1\vec{a} + u_2\vec{b} + u_3\vec{c}\right) + \left(v_1\vec{a} + v_2\vec{b} + v_3\vec{c}\right) = \mathbf{a}(u_1 + v_1) + \mathbf{b}(u_2 + v_2) + \mathbf{c}(u_3 + v_3)$
w je lineární kombinace báze (**a**;**b**;**c**)
$\mathbf{w} = (u_1 + v_1; u_2 + v_2; u_3 + v_3)_{(\mathbf{a};\mathbf{b};\mathbf{c})}$
$\alpha\mathbf{u} = (\alpha u_1; \alpha u_2; \alpha u_3)_{(\mathbf{a};\mathbf{b};\mathbf{c})}$

$(\mathbf{a};\mathbf{b};\mathbf{c})$ ... dvě báze ... $\vec{u} = u_1\vec{a} + u_2\vec{b} + u_3\vec{c}$
$(\mathbf{a}';\mathbf{b}';\mathbf{c}')$ $\vec{u} = u_1'\vec{a}' + u_2'\vec{b}' + u_3'\vec{c}'$

Ortonormální báze (vektory jsou na sebe kolmé a jejich velikost je vždy=1)

$(\mathbf{e}_1;\mathbf{e}_2;\mathbf{e}_3)$...*báze*

$\angle(\mathbf{e}_i;\mathbf{e}_j) \overset{i\neq j}{=} 90°$

$|\mathbf{e}_i| = 1$

Přechod z báze nečárkované na čárkovanou

$(\mathbf{e}_1;\mathbf{e}_2;\mathbf{e}_3) \to (\mathbf{e}'_1;\mathbf{e}'_2;\mathbf{e}'_3)$

$\mathbf{e}'_1 = \tau_{11}\mathbf{e}_1 + \tau_{12}\mathbf{e}_2 + \tau_{13}\mathbf{e}_3$

$\mathbf{e}'_2 = \tau_{21}\mathbf{e}_1 + \tau_{22}\mathbf{e}_2 + \tau_{23}\mathbf{e}_3$

$\mathbf{e}'_3 = \tau_{31}\mathbf{e}_1 + \tau_{32}\mathbf{e}_2 + \tau_{33}\mathbf{e}_3$

de facto jde o to, abychom objevili koeficienty t... použijeme proto **matici přechodu**, kam se napíší jednotlivé koeficienty.

$$T = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix} \text{... matice přechodu}$$

Skalární součin vektorů **u;v**

$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\angle(\mathbf{u};\mathbf{v})$

$\mathbf{e}'_1 = \tau_{11}\mathbf{e}_1 + \tau_{12}\mathbf{e}_2 + \tau_{13}\mathbf{e}_3 \quad |\mathbf{e}_1$

$\mathbf{e}'_1\mathbf{e}_1 = \tau_{11}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + \tau_{12}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 + \tau_{13}\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1$

Jsou to vlastně tři skalární součiny $\tau_{11}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1;\tau_{12}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1;\tau_{13}\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1$; přičemž $\tau_{12}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1;\tau_{13}\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1$ dají každý nulu. takže nám zůstane poslední skalární součin $\tau_{11}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1$, z něhož plyne, že

$\tau_{11} = \cos\angle(\mathbf{e}'_1;\mathbf{e}_1)$... t(1;1) je kosinus úhlu mezi čárkovaným a nečárkovaným vektorem obecně:

$\tau_{ij} = \cos\angle(\mathbf{e}'_i;\mathbf{e}_j)$

$$T = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{3} u_i\mathbf{e}_i = \sum_{k=1}^{3} u_k\mathbf{e}_k$$

$$\mathbf{u} = \sum_{j=1}^{3} u'_j\mathbf{e}' = \sum_{j=1}^{3} u'_j\left[\sum_{k=1}^{3}\tau_{jk}\mathbf{e}_k\right] = \sum_{k,j=1}^{3} u'_j(\tau_{jk}\mathbf{e}_k) = \sum_{k=1}^{3}\left(\sum_{j=1}^{3} u'_j\tau_{jk}\right)\mathbf{e}_k$$

$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}'_1\tau_{11} + \mathbf{u}'_2\tau_{21} + \mathbf{u}'_3\tau_{31}$

Ortonormální báze $\mathbf{e}$ a $\mathbf{e}'$

$(\mathbf{e}_1;\mathbf{e}_2;\mathbf{e}_3)\xrightarrow{T}(\mathbf{e}'_1;\mathbf{e}'_2;\mathbf{e}'_3)$

$\mathbf{e}'_i=\tau_{i1}\mathbf{e}_1+\tau_{i2}\mathbf{e}_2+\tau_{i3}\mathbf{e}_3; i=1,2,3$

$\mathbf{e}_i=\sigma_{j1}\mathbf{e}'_1+\sigma_{j2}\mathbf{e}'_2+\sigma_{j3}\mathbf{e}'_3; j=1,2,3$

$$T=\begin{pmatrix}\tau_{11}&\tau_{12}&\tau_{13}\\\tau_{21}&\tau_{22}&\tau_{23}\\\tau_{31}&\tau_{32}&\tau_{33}\end{pmatrix}\qquad S=\begin{pmatrix}\sigma_{11}&\sigma_{12}&\sigma_{13}\\\sigma_{21}&\sigma_{22}&\sigma_{23}\\\sigma_{31}&\sigma_{32}&\sigma_{33}\end{pmatrix}$$

$\tau_{ij}=\cos$ úhlu, který svírá i-tý čárkovaný vektor s j-tým nečárkovaným.

$\tau_{ij}=\cos(\mathbf{e}'_{\mathrm{i}};\mathbf{e}_j)=\cos(\mathbf{e}_j;\mathbf{e}'_{\mathrm{i}})=\sigma_{ji}$

$\sigma_{ij}=\cos(\mathbf{e}_i;\mathbf{e}'_{\mathrm{j}})=\cos(\mathbf{e}'_{\mathrm{j}};\mathbf{e}_i)=\tau_{ji}$

Matice S je transponovaná k matici T.
Podmínky pro závislosti koeficientů t:

$\mathbf{e}_i\perp\mathbf{e}'_k\Rightarrow 3$ možnosti $\Rightarrow$ 3 podmínky

$|\mathbf{e}_i|=1\Rightarrow 3$ vektory $\Rightarrow 3$ podmínky

celkem tedy 6 podmínek:
Celkový počet tau je 9. Z toho 6 podmíněných, takže pouze 3 budou nezávislé.

$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos(\mathbf{u};\mathbf{v})$

$[\mathbf{u};\mathbf{v}]\to\mathbf{uv}\in\mathbf{R}$

Vlastnosti vektorů

1. $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$
2. $(\alpha\mathbf{u})\mathbf{v}=(\alpha\mathbf{v})\mathbf{u}$
3. $(\mathbf{u}+\mathbf{v})\mathbf{w}=\mathbf{uw}+\mathbf{vw}$
4. $\mathbf{uu}\geq\mathbf{0}$; rovnost $\mathbf{uu}\geq\mathbf{0}\Leftrightarrow\mathbf{u}=0$

$\mathbf{u}=u_1\mathbf{e}_1+u_2\mathbf{e}_2+u_3\mathbf{e}_3$

$\mathbf{v}=v_1\mathbf{e}_1+v_2\mathbf{e}_2+v_3\mathbf{e}_3$

$(\mathbf{e}_1;\mathbf{e}_2;\mathbf{e}_3)\ldots\textit{báze}\ldots$ nemusí být ortonormální --> obecně

$$\mathbf{uv}=(u_1\mathbf{e}_1+u_2\mathbf{e}_2+u_3\mathbf{e}_3)(v_1\mathbf{e}_1+v_2\mathbf{e}_2+v_3\mathbf{e}_3)=\left(\sum_{i=1}^{3}u_i\mathbf{e}_i\right)\left(\sum_{j=1}^{3}u_j\mathbf{e}_j\right)=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}u_i\mathbf{e}_iv_j\mathbf{e}_j=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}u_iv_j(\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j)=$$

$$=u_1v_1(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1)+u_1v_2(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)+u_1v_3(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3)+u_2v_1(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1)+u_2v_2(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2)+u_2v_3(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3)+u_3v_1(\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1)+u_3v_2(\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2)+u_3v_3(\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3)$$

Pro ortonormální bázové vektory platí:
$\mathbf{uv} = u_1v_1(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1) + u_2v_2(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2) + u_3v_3(\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3)$ zbytek jsou nuly

$\mathbf{e}'_i = \tau_{i1}\mathbf{e}_1 + \tau_{i2}\mathbf{e}_2 + \tau_{i3}\mathbf{e}_3$

$(\tau_{i1};\tau_{i2};\tau_{i3})$...složky vektoru

$\mathbf{e}'_i$ v bázi nečečárkové $(\mathbf{e}_1;\mathbf{e}_2;\mathbf{e}_3;)$

$\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = 0 = \tau_{i1}\tau_{j1} + \tau_{i2\,j2} + \tau_{i3\,j3}$

$\sum_{k=1}^{3}\tau_{ik}\tau_{jk} = 0 \Rightarrow i \neq j$ **nebo** $\sum_{k=1}^{3}\tau_{ik}\tau_{jk} = 1 \Rightarrow i = j$

podmínka kolmosti: $\delta_{ij} = 0...i \neq j; \delta_{ij} = 1...i = j$

Podmínky ortogonality:
T... ortogonální matice

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{3} u_i\mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{3} u_i\left(\sum_{j=1}^{3}\sigma_{ij}\mathbf{e}'_j\right) = \sum_{j=1}^{3}\left(\sum_{i=1}^{3}u_i\sigma_{ij}\right)\mathbf{e}'_j$$

$$\mathbf{u} = \sum_{j=1}^{3} u'_j\mathbf{e}'_j$$

$$\mathbf{u}'_j = \sum_{i=1}^{3} u_i\sigma_{ij} = u_1\sigma_{1j} + u_2\sigma_{2j} + u_3\sigma_{3j}$$

$$\mathbf{u}'_1 = \sigma_{11}\mathbf{u}_1 + \sigma_{21}\mathbf{u}_2 + \sigma_{31}\mathbf{u}_3$$
$$\mathbf{u}'_2 = \sigma_{12}\mathbf{u}_1 + \sigma_{22}\mathbf{u}_2 + \sigma_{32}\mathbf{u}_3$$
$$\mathbf{u}'_3 = \sigma_{13}\mathbf{u}_1 + \sigma_{23}\mathbf{u}_2 + \sigma_{33}\mathbf{u}_3$$

$$\mathbf{u}' = (u_1;u_2;u_3)\begin{pmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31}\\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32}\\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33}\end{pmatrix} = (\mathbf{u})S$$

$$\mathbf{u}' = (\mathbf{u})S$$
$$\mathbf{u} = (\mathbf{u}')T$$

Vektorový součin

Zobrazení, které dvojici vektorů **u** a **v** přiřadí vektor **w**:
$[\mathbf{u};\mathbf{v}] \to \mathbf{w} = \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$

Velikost: $|\mathbf{w}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\sin(\mathbf{u};\mathbf{v})$

Směr: $\mathbf{w} \perp$ na rovinu vektorů $\mathbf{u};\mathbf{v}$

Orientace: Pravidlo pravé ruky

U nulového vektoru **0** není definována velikost, směr ani orientace.

Vlastnosti:

1. $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = -\mathbf{v} \otimes \mathbf{u}$
2. $\alpha(\mathbf{u}) \otimes \mathbf{v} = \mathbf{u} \otimes (\alpha\mathbf{v}) = \alpha(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})$
3. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \otimes \mathbf{w} = \mathbf{u} \otimes \mathbf{w} + \mathbf{v} \otimes \mathbf{w}$
4. $\mathbf{u} \otimes (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = \mathbf{u} \otimes \mathbf{w}$

$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3$$

$$\begin{aligned}\mathbf{uv} &= u_1v_1(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1) + u_1v_2(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2) + u_1v_3(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3) + \\ &+ u_2v_1(\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1) + u_2v_2(\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2) + u_2v_3(\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3) + \\ &+ u_3v_1(\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1) + u_3v_2(\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2) + u_3v_3(\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3)\end{aligned}$$

Přičemž:

$$(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1) = \mathbf{0}$$

$$(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_3$$

$$(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3) = -\mathbf{e}_2$$

$$(\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1) = -\mathbf{e}_3$$

$$(\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2) = \mathbf{0}$$

$$(\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3) = -\mathbf{e}_1$$

$$(\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_2$$

$$(\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1$$

$$(\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3) = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{u} = (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{e}_1 + (u_3v_1 - u_1v_3)\mathbf{e}_2 + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{u} = (u_2v_3 - u_3v_2; u_3v_1 - u_1v_3; u_1v_2 - u_2v_1)$$

Smíšený součin $\mathbf{u}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w})$

$$\mathbf{u}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}) = u_1(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w})_1 + u_2(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w})_2 + u_3(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w})_3 = \det\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a} \otimes (\mathbf{b} \otimes \mathbf{c}) = (\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{ab})\mathbf{c}$$

Diferenciální rovnice

neznámá funkce jedné proměnné

Proměnná	t	funkce x(t)
	x	funkce y=f(x)

Rovnice obsahuje neznámou funkci a její derivaci. Nazývá se ODR... Obyčejná diferenciální rovnice (Angl. zkratka je ODE)
Příkladem jsou rovnice II.Newtonova zákona

$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_{výsl}(\mathbf{r};\mathbf{v};t)$

$m\mathbf{a}$... derivace hybnosti

$\mathbf{r}_{(t)} = (x_{(t)}; y_{(t)}; z_{(t)})$

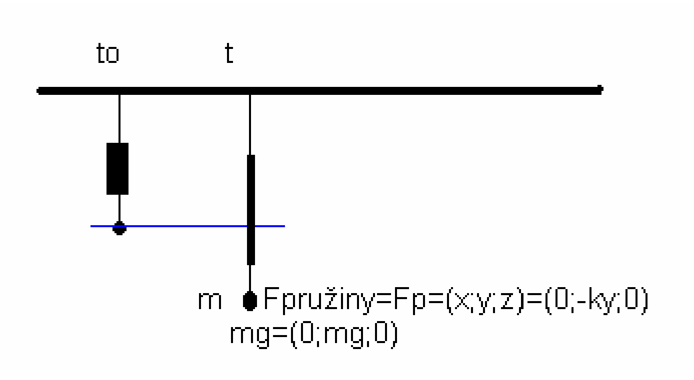
$\mathbf{v}_{(t)} = (\dot{x}; \dot{y}; \dot{z})$

$\mathbf{a}_{(t)} = (\ddot{x}; \ddot{y}; \ddot{z})$

$x: m\ddot{x} = \mathbf{F}_{výsl;X}(x; y; z; \dot{x}; \dot{y}; \dot{z})$

$y: m\ddot{y} = \mathbf{F}_{výsl;Y}(x; y; z; \dot{x}; \dot{y}; \dot{z})$

$z: m\ddot{z} = \mathbf{F}_{výsl;Z}(x; y; z; \dot{x}; \dot{y}; \dot{z})$



$ma = Fg + Fp$

$m\ddot{y} = mg - ky$

$\ddot{y} + \frac{k}{m}y = g$

Obyčejná diferenciální rovnice 2. řádu (řád je určen nejvyšší derivací), nehomogenní (když se ...=0 homogenní; ...$\neq$ 0 nehomogenní), lineární (všechny derivace jsou v 1.mocnině=>lineární) s konstantními koeficienty.

Řád určuje počet konstant... počet počátečních podmínek.
Zahrneme-li tlumení, pak jsou dva modely.

$m\ddot{y} = mg - ky - b\dot{y}$ ... Stokesův model... není reálný

$m\ddot{y} = mg - ky - C\dot{y}^2$ ... Newtonův model

$\left(\frac{\dot{y}}{y}\right)$... bude přehazovat +/-; jednotkový vektor ve směru y

Rovnice I. řádu
Př.: Rozpad jader
t=0 => No
t... =>N(t)

$$\frac{dN_{(t)}}{dt} = -\alpha N_{(t)}$$ Změna počtu jader za jednotku času je přímo úměrný počtu jader

$$\dot{N}_{(t)} = -\alpha N_{(t)}$$

$$\dot{N}_{(t)} + \alpha N_{(t)} = 0$$

ODR 1. řádu lineární, homogenní, s konstantními koeficienty.
Řešíme pomocí separací proměnných

$$\frac{dN}{dt} = -\alpha N \Rightarrow \frac{dN}{N} = -\alpha \cdot dt$$

Každou stranu integrujeme

$$\int \frac{dN}{N} = \int -\alpha dt$$

$$\int \frac{1}{N} dN = -\alpha \int dt$$

$$\ln N = -\alpha t + C$$

$$C = \ln K$$

$$N = Ke^{-\alpha t}$$

K... předem neurčená kladná konstanta
obecné řešení diferenciálních rovnic

$$N_{(t)} = Ke^{-\alpha t}$$

Konkrétním výběrem K vznikají PARTIKULÁRNÍ ŘEŠENÍ
Počáteční podmínka $t = 0; N_{(0)} = N_0$

$$\left(\begin{array}{l} N_{(0)} = e^{-0} K \\ N_{(0)} = K \\ K = N_0 \end{array} \right)$$

Partikulární řešení pro naši rovnici je

$$N = N_0 e^{-\alpha t}$$

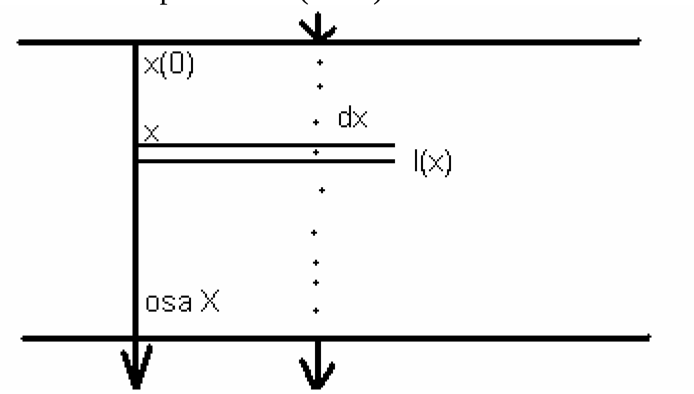
τ ... poločas rozpadu

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\alpha t}$$

$$\alpha\tau = \ln 2$$

$$\tau = \frac{\ln 2}{\alpha}$$

Př.2
Zákon absorpce záření (RTG)



$$\frac{dI}{dx} = -I\mu$$

$$\frac{dI}{I} = -\mu dx$$

$$I = I_0 e^{-\mu x}$$

mí... lineární koeficient absorpce

Př.3
Pohyb v odporujícím prostředí
Částice je urychlena a následně jediná síla, která na tuto částici působí, je síla odporová...

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_{odpor}$$

1.) Stakesův model: $\mathbf{F}_{odpor} = -B\dot{x}$
2.) Newtonův model: $\mathbf{F}_{odpor} = -C\dot{x}^2$

1: Stakes:

$$m\ddot{x} = -b\dot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} = 0$$

substituce:

$$\dot{x} = v$$

$$\dot{v} + \frac{b}{n}v = 0$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{b}{n}v = 0$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{b}{n}v$$

....

$$v = v_0 e^{-\frac{b}{m}t}$$

2: Newton:

$m\ddot{x} = -C\dot{v}^2$

Substituce:

$\dot{x} = v$

následně platí:

$m\dot{v} = -Cv^2$

$$m\frac{dv}{dt} = -Cv^2$$

$$-\frac{dv}{v^2} = -\frac{C}{m}dt$$

$$\int \frac{1}{v^2}dv = -\frac{C}{m}\int dt$$

$$\int v^{-2}dv = -\frac{C}{m}\int dt$$

$$\frac{v^{-1}}{-1} = -\left(\frac{C}{m}t + K\right)$$

$$\frac{1}{v} = \frac{C}{m}t + K \Rightarrow \frac{1}{v} = \frac{ct + mK}{m} \Rightarrow v = \frac{m}{ct + mK}$$

$pro: t = 0 \to v_{(0)} = v_0$

$$v_0 = \frac{1}{K} \Rightarrow K = \frac{1}{v_0}$$

$$v = \frac{m}{Ct + \frac{m}{v_0^{-1}}} = \frac{mv_0}{v_0Ct + m}$$

Derivací *v* získáme polohový vektor, proto:

$$x_{(t)} = \int v_{(t)}dt$$

následuje stejný postup integrace a upravování...

Lineární rovnice

-jsou to takové rovnice, které jsou prvního řádu a nemají konstantní koeficienty.

hledaná funkce: x(t)

$$\dot{x} + f_{(t)}x = g_{(t)}$$

x... neznámá fce.

f(x) i g(x)... známé funkce

funkci x si rozepíšeme na libovolný součin dvou jiných funkcí u a v

$x_{(t)} = u_{(t)} \cdot v_{(t)}$ dosadíme do zadané fce. $\dot{x} + f_{(t)}x = g_{(t)}$

$\dot{x} = \dot{u}v + u\dot{v}$

$$\dot{u}v + u\dot{v} + fuv = g$$

vytýkáme společné členy:

$$v(\dot{u}+fu)+u\dot{v}=g$$

Volba x=uv byla natolik libovolná, že jsme mohli určit člen u tak, že

$$\dot{u}=-fu \wedge \dot{u}+fu=0$$

Z druhé části plyne:

$$\frac{du}{dt}=-fu$$

$$\frac{du}{u}=-fdt$$

$$\ln u=-\int f_{(t)}dt$$

$$u=Ce^{-\int f_t dt}$$

dosadíme do $v(\dot{u}+fu)+u\dot{v}=g$ (první člen $v(\dot{u}+fu)$je roven nule, proto zůstává: $u\dot{v}=g$.

Dosazením dostáváme:

$$C\exp\left[-\int f_t dt\right]\cdot\frac{dv}{dt}=q_{(t)}$$

$$dv=\frac{1}{C}\exp\left[\int f_t dt\right]\cdot q(t)dt$$

$$v=\frac{1}{C}\int g_{(t)}\exp\left[\int f_t dt\right]dt+p$$

Uvědomíme-li si, že x=uv, poté:

$$x=uv=\frac{C}{\exp\left(\int f_{(t)}dt\right)}\cdot\frac{1}{C}\int g_{(t)}\exp\left[\int f_{(t)}dt\right]dt+p$$

$$x=\frac{\int g_{(t)}\exp\left[\int f_{(t)}dt\right]dt+p}{\exp\left(\int f_{(t)}dt\right)}$$

Př.:

$$u=\exp\left(-\int tdt\right)=e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

$$v=\int\left(te^{\int tdt}\right)dt+p=\int te^{\frac{1}{2}t^2}dt+p=$$

$$\left|\begin{aligned}&\frac{1}{2}t^2=wt\\&dt=dw\\&dt=\frac{dw}{t}\end{aligned}\right|$$

$$\int e^w dw+p=e^w+p$$

$$v=e^{\frac{1}{2}t^2}+p$$

$$x=vu=e^{-\frac{1}{2}t^2}\left(e^{\frac{1}{2}t^2}+p\right)=$$

$$=1+p\exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right)$$

Diferenciální rovnice 2. řádu, lineární, s konstantními koeficienty

$x_{(t)}$...hledaná funkce

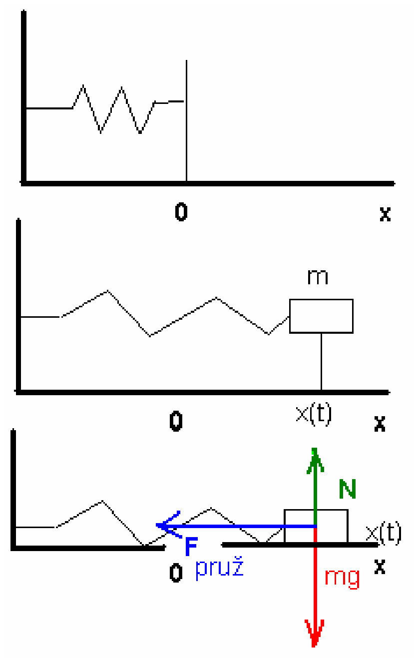
$a_{2(t)}\ddot{x}+a_{1(t)}\dot{x}+a_{0(t)}x=f_{(t)}$... obecně, s proměnnými koeficienty (Proměnné funkce času)

$a_2\ddot{x}+a_1\dot{x}+a_0x=f_{(t)}$... obecně pro konstantní koeficienty

Normovaný tvar: $\ddot{x}+p\dot{x}+q=g_{(t)}$

Dvě možnosti: 1.) $g_{(t)}=0$

2.) $g_{(t)}\neq 0$



$m\vec{a}=\vec{F}_p+\vec{N}+\vec{G}$

$$\left.\begin{matrix} x: m\ddot{x}=-kx \\ y: m\ddot{y}=0\Rightarrow \dot{y}=0 \end{matrix}\right\}\ddot{x}+\frac{k}{m}x=0$$

Úkol najít všechna $x_{(t)}$ která vyhovují

$\ddot{x}+\frac{k}{m}x=0$

$\frac{k}{m}=\omega^2$...kladná konstanta

$\ddot{x}=-\omega^2 x$

$e^{i\alpha}=\cos\alpha+i\sin\alpha$

Předpokládáme řešení ve tvaru:

$x^{(t)}=e^{\alpha t}$

$\dot{x}=\lambda e^{\lambda t}$

$\ddot{x}=\lambda^2 e^{\lambda t}$

$\lambda^2 e^{\lambda t}=\ddot{x}$

$\lambda^2 e^{\lambda t}=-\omega^2 t$

$\lambda^2 e^{\lambda t}+\omega^2 t=0\,|:e^{\lambda t}$

$\lambda^2+\omega^2=0$... charakteristická rovnice dané diferenciální rovnice

$\lambda^2=-\omega^2$

$\lambda_{1,2}=\pm i\omega$ ...charakteristické kořeny rovnice

$x_{1t}=e^{i\omega t}$

$x_{2t}=e^{-i\omega t}$ ... fundamentální systém řešení

$x=C_1x_1(t)+C_2x_2(t)$... $C_1;C_2$... libovolné konstanty

$\left(C_1\ddot{x}_1 + C_2\ddot{x}_2\right) + \omega^2\left(C_1 x_1 + C_2 x_2\right) = 0$

$C_1\left(\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1\right) + C_2\left(\ddot{x}_2 + \omega^2 x_2\right) = 0$

Přičemž: $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ ... základní rovnice

$x_{(t)} = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}$ ... Obecné řešení a další již neexistují.

Hledáme množinu řešení $x_{(t)}$, které jsou **reálnými funkcemi**.

Podmínka je tedy: $x = \overline{x}$ ($\overline{x}$ je komplexně sdružené k x)

$C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t} = \overline{C}_1 e^{-i\omega t} + \overline{C}_2 e^{i\omega t}$

$e^{i\omega t}\left(C_1 - \overline{C}_2\right) = e^{-i\omega t}\left(\overline{C}_1 - C_2\right)$

$e^{2i\omega t}\left(C_1 - \overline{C}_2\right) = \left(\overline{C}_1 - C_2\right)$

$C_1 - \overline{C}_2 = 0$

$\overline{C}_1 - C_2 = 0$

$\forall t \Rightarrow C_2 - \overline{C}_1$

$C = a + ib; a, b \in \mathbf{R}$

$x_{(t)} = (a + ib)(\cos\omega t + i\sin\omega t) + (a - ib)(\cos\omega t + i\sin\omega t)$

$x_{(t)} = 2a\cos\omega t - 2b\sin\omega t$

Vybrali jsme jen reálné složky součinu

$2a = A; -2b = B$

$x_{(t)} = A\cos\omega t + B\sin\omega t$

$A, B \in \mathbf{R}$

Počáteční podmínky:

$x_{(0)} = x_0$

$v_{(0)} = \dot{x}_{(0)} = v_0$

$x_0 = A$

$\dot{x} = -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t$

$\dot{x}_0 = \omega t$

$A = x_0$

$B = \dfrac{\dot{x}_0}{\omega}$

$x_{(t)} = x_0\cos\omega t + \dfrac{\dot{v}_0}{\omega}\sin\omega t$

... Partikulární řešení, které odpovídá konkrétním počátečním podmínkám

ω... kruhová rychlost

T=2π/ω... perioda

1. $x_0 \neq 0 \wedge v_0 = 0 \Rightarrow x_{(t)} = x_0\cos\omega t$
2. $x_0 = 0 \wedge v_0 \neq 0 \Rightarrow x_{(t)} = \dfrac{v_0}{\omega}\sin\omega t$

$x_{(t)} = A ... amplituda$

$x_{(t)} = A\sin(\omega t + \theta) = (A\sin\theta)\cos\omega t + A\cos\theta(\sin\omega t)$

$A\sin\theta = x_0$

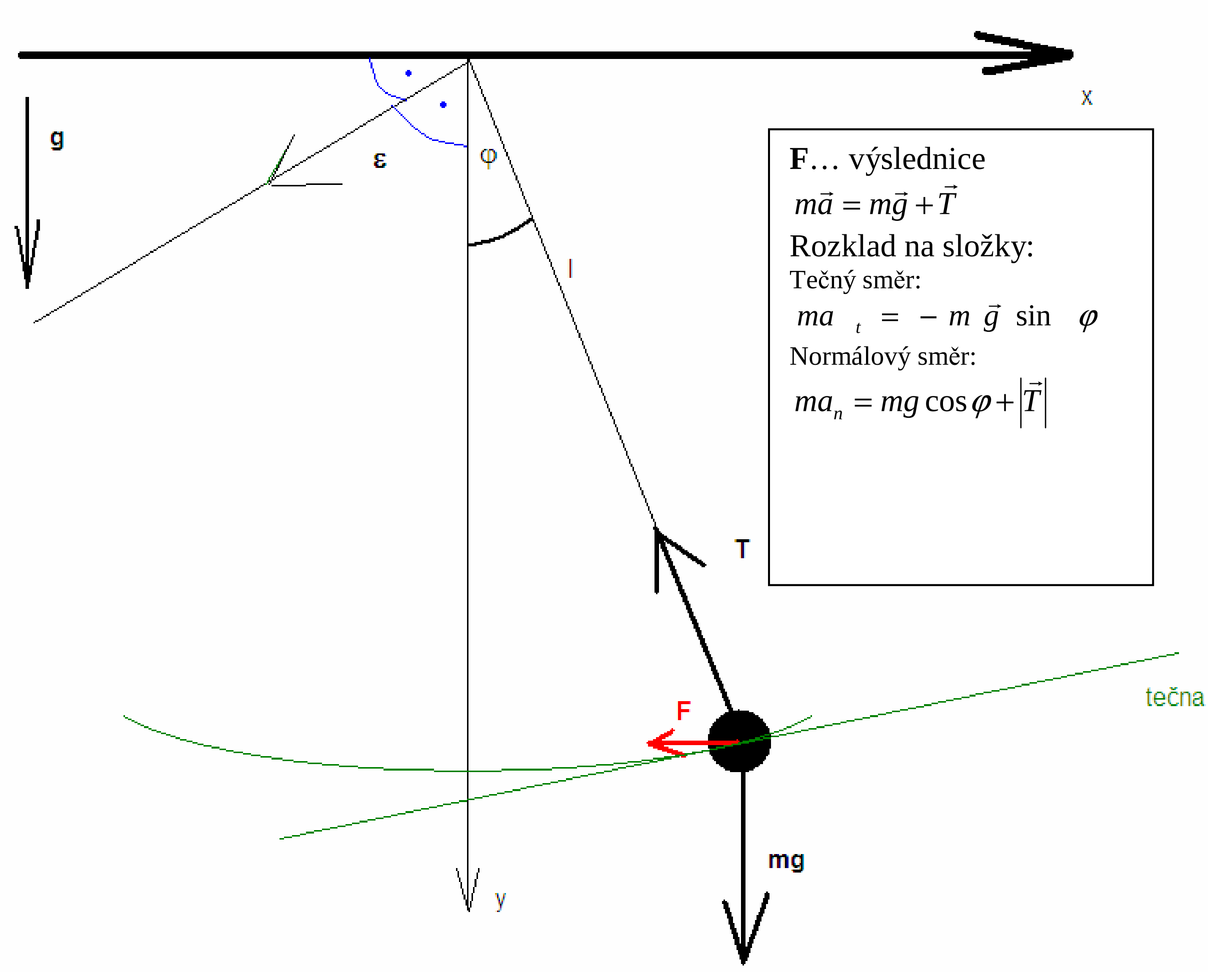
$A\cos\theta = \frac{v_0}{\omega}$

$A^2\left(\sin^2\theta + \cos\theta\right) = x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2$

$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}$

$\omega t + \theta$ ...fáze pohybu

Příklad 2.)



Vztah mezi $\vec{a};\vec{\varepsilon}$

$\vec{a}_t;\vec{\varepsilon}$

$v = \omega l$ obecně: $\vec{a}_t = \vec{\varepsilon} \times \vec{l}$

$a_t = \varepsilon l$ $\vec{a}_t = \ddot{\varphi} l$

tečna: $ma_t = -mg\sin\varphi \Rightarrow a_t = g\sin\varphi$

normála: $ma_n = mg\cos\varphi + \left|\vec{T}\right| \Rightarrow a_n = g\cos\varphi + \left|\vec{T}\right|$

$$\ddot{\varphi}l = -g\sin\varphi$$

$$\ddot{\varphi}l + g\sin\varphi = 0$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0$$

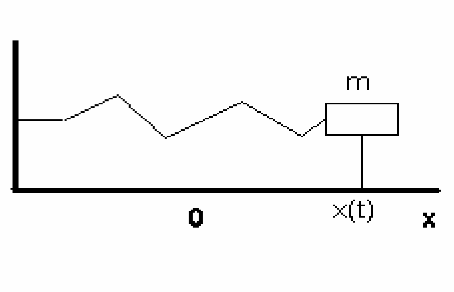
Pro $\varphi \to 0 \Rightarrow \sin\varphi \approx \varphi rad$

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0$$

$$\frac{g}{l} = \omega^2$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Příklad 3.)



$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}$

$b \succ 0$

$b\dot{x}$ ... odpor prostředí

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

$$\lambda^2 + \delta\lambda + \omega^2 = 0$$

$$\lambda_{1;2} = \frac{-2\delta \pm 2\sqrt{\delta^2 - \omega^2}}{2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega^2}$$

1. $\delta = \omega$
2. $\delta \succ \omega$
3. $\delta \prec \omega$

Ad 2. $\delta \succ \omega$

$\lambda_1; \lambda_2$ ...reálné proměnné

$$x_1(t) = e^{\lambda_1 t} = e^{\left(-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega^2}\right)t} = \exp t\left(-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega^2}\right)$$

$$x_2(t) = e^{\lambda_2 t} = e^{\left(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega^2}\right)t} = \exp t\left(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega^2}\right)$$

Obecně:

$$x_{(t)} = C_1 x_1 + C_2 x_2$$

$$C_1; C_2 \in \mathbf{R}$$

$$x_{(t)} = \left[C_1 \exp\left(t\sqrt{\delta^2 - \omega^2}\right) + C_2 \exp\left(-t\sqrt{\delta^2 - \omega^2}\right)\right]\exp(-t\delta)$$

Ad 3. $\delta \prec \omega$

$\lambda_{1;2} = -\delta \pm i\sqrt{\omega^2 - \delta^2}$ ... komplexně sdružené kořeny

$$x_1(t) = e^{\lambda_1 t} = e^{\left(-\delta + i\sqrt{\omega^2 - \delta^2}\right)t} = \exp t\left(-\delta + i\sqrt{\omega^2 - \delta^2}\right)$$

$$x_2(t) = e^{\lambda_2 t} = e^{\left(-\delta - i\sqrt{\omega^2 - \delta^2}\right)t} = \exp t\left(-\delta - i\sqrt{\omega^2 - \delta^2}\right)$$

Obecně:

$$x_{(t)} = C_1 x_1 + C_2 x_2$$

$$C_1; C_2 \in \mathbf{R}$$

$$x_{(t)} = \left[C_1 \exp\left(t\left(i\sqrt{\omega^2 - \delta^2}\right)\right) + C_2 \exp\left(t\left(-i\sqrt{\omega^2 - \delta^2}\right)\right)\right]\exp(-t\delta)$$

$$x_{(t)} \in \mathbf{R} \Rightarrow C_1 = C_2^*$$

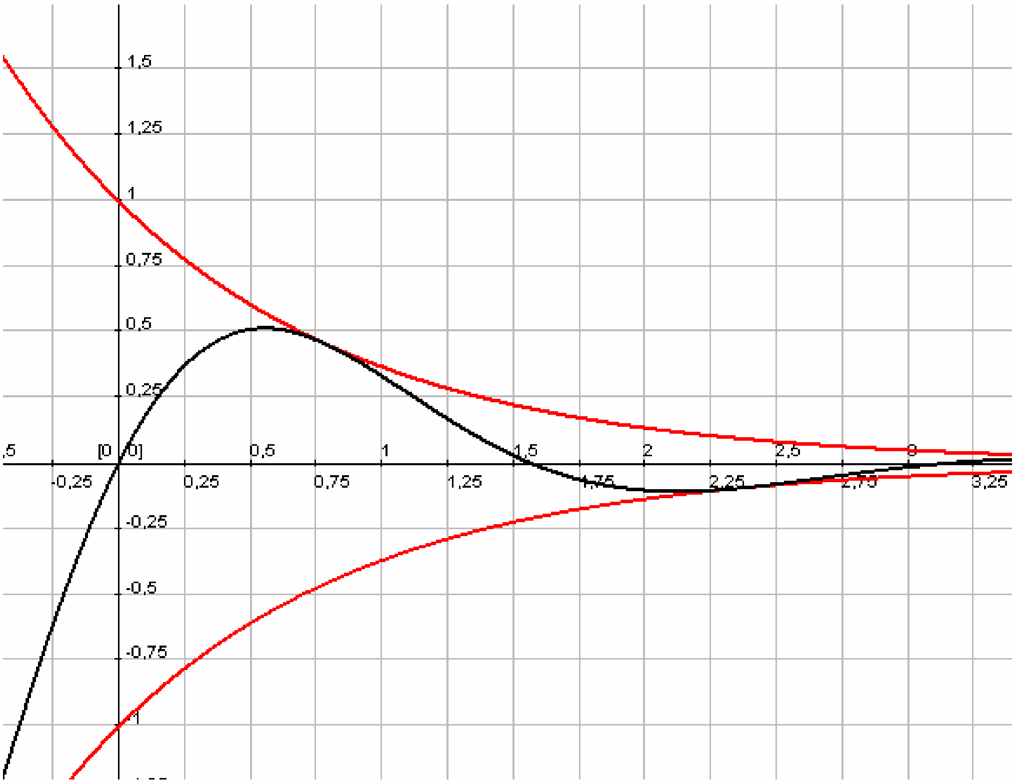
$$\sqrt{\omega^2 - \delta^2} = \omega'$$

$$x_{(t)} = \exp(-\delta t)[A\cos\omega' t + B\sin\omega' t]$$

$$[A\cos\omega' t + B\sin\omega' t] = A\sin(\omega' t + \theta)$$

$$x_{(t)} = (A\exp(-\delta t))\sin(\omega' t + \theta)$$

$(A\exp(-\delta t))$... amplituda klesající s časem



Pohyb probíhá pouze v kladných souřadnicích.

Ad 1. $\delta = \omega$

(1) $x_1(t) = \exp(\lambda_1 t) = \exp(-t\delta)$

$\lambda_1 = \lambda_2 = -\delta$ ... charakteristický kořen rovnice

(2) $x_2(t) = t\exp(-t\delta)$

Ověření (2):

$$\dot{x} = e^{-\delta t} + te^{-\delta t}(-\delta) = (1 - t\delta)\exp(-t\delta)$$

$$\ddot{x} = -\delta e^{-t\delta} + (1 - t\delta)e^{-t\delta}(-\delta) = e^{-t\delta}\left(-2\delta + \delta^2 t\right)$$

$$\ddot{x}_2 + 2\delta\dot{x}_2 + \omega^2 x_2 = \left[\left(-2\delta + \delta^2 t\right) + \left(2\delta - 2\delta^2 t\right) + \delta^2 t\right]e^{-t\delta} = 0$$

$$\delta = \omega$$

Obecné řešení:

$$x_{(t)} = C_1 x_1 + C_2 x_2$$

$$x_{(t)} = e^{-t\delta}(C_1 + tC_2)$$ ... mezní periodický pohyb

Diferenciální rovnice n-tého řádu, lineární, s konstantními koeficienty

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + ... + a_2\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_0 x = 0$$

ODR, lineární, n-tého řádu, konst. koeficienty, homogenní

Předpokládané řešení: $x = e^{\lambda t}$

Charakteristická rovnice: $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{(n-1)} + ... + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$

Charakteristických kořenů: n-kořenů (vč. násobnosti)

Reálné kořeny:

$\lambda_1 ... násobnost = k_1$

...

$\lambda_r ... násobnost = k_r$

dvojic komplexně sdružených kořenů

$\left.\begin{matrix}\alpha_1 + i\beta_1 \\ \alpha_1 - i\beta_1\end{matrix}\right\} násobnost = 2l_1$

...

$\left.\begin{matrix}\alpha_S + i\beta_S \\ \alpha_S - i\beta_S\end{matrix}\right\} násobnost = 2l_S$

Celkem násobnost=n
$k_1 + ... + k_r + 2l_1 + ... + 2l_S = n$

Fundamentální systém:

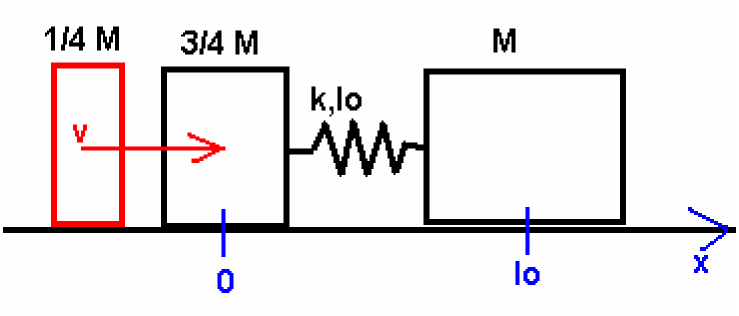
$$x_1 = \exp(\lambda_1 t); x_2 = t\exp(\lambda_1 t); ...; x_n = t^k \exp(\lambda_1 t)$$

$$x_{k+1} = \exp(\lambda_2 t); x_{k+2} = t\exp(\lambda_2 t); ...$$

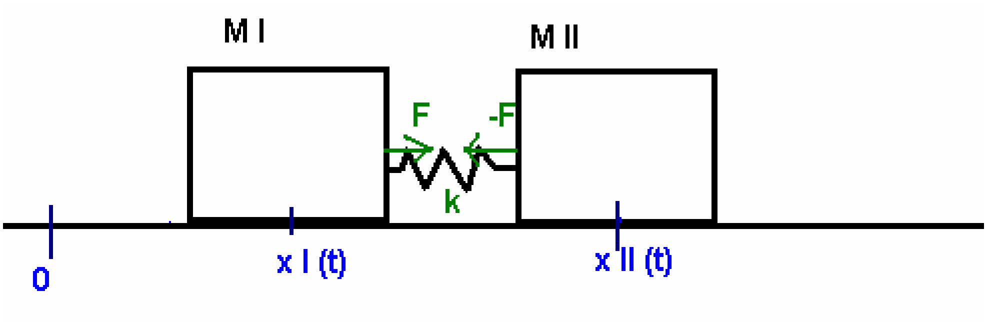
$$\exp t(\alpha_1 + i\beta_1); \exp t(\alpha_1 - i\beta_1); ..$$

Příklad:

t_0 :



t :



$$pro: L \succ L_0$$

$$L = x_{II} - x_I$$

$$\vec{F} = (-kL;0;0) = (-k(x_{II} - x_I);0;0)$$

$$M\ddot{x}_I = k(x_{II} - x_I - L_0)$$

$$M\ddot{x}_{II} = -k(x_{II} - x_I - L_0)$$

$$k\ddot{x}_2 = M\ddot{x}_I + kx_I + kl_0$$

$$\ddot{x}_{II} = \frac{1}{k}\left[x_I^{(4)} + k\ddot{x}_I\right]$$

$$\frac{M}{k}\left[Mx_I^{(4)} + k\ddot{x}_I\right] = -M\ddot{x}$$

$$x_I^{(4)} + \frac{2k}{M}\ddot{x}_I = 0$$

$$\lambda^4 + \frac{2k}{M}\lambda^2 = 0$$

$$\lambda^4 + \omega^2\lambda^2 = 0$$

$$\lambda^2(\lambda + i\omega)(\lambda - i\omega) = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots k_1 = 2 \\ \left.\begin{array}{l} \lambda_3 = i\omega \\ \lambda_4 = -i\omega \end{array}\right\} \ldots\ldots l_1 = 1 \end{array}\right\} k = 2 + 2\cdot 1 = 4$$

$$x_{I-1} = 1$$
$$x_{I-2} = t$$
$$x_{I-3} = \exp(it\omega)$$
$$x_{I-4} = \exp(-it\omega)$$

$$x_I = C_1 + C_2 t + \left(C_3 \exp(it\omega) + C_4 \exp(-it\omega)\right) = C_1 + C_2 t + A\cos t\omega + B\sin t\omega$$
$$x_I = C_1 + tC_2 + A\cos t\omega + B\sin t\omega$$
$$x_{II} = C_1 + C_2 t - A\cos\omega t - B\sin\omega t + L_0$$

Popis pohybu těžiště soustavy:

$$\frac{x_I + x_{II}}{2} = C_1 + C_2 t$$

Vzájemný pohyb těles (pohyb tělesa II vůči I)

$$x_{II} - x_I = -2A\cos t\omega - 2B\sin t\omega + L_0$$

Počáteční podmínky:

$$t_0 = 0$$

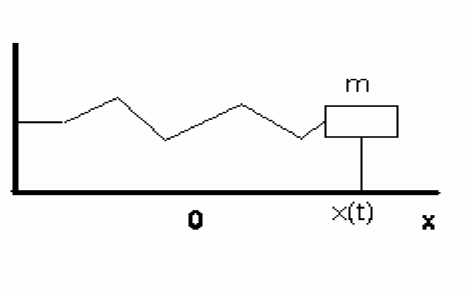
$$x(t_0): \begin{array}{ll} 0 = C_1 + A & C_1 = \frac{1}{2}L_0 \\ L_0 = C_1 - A & A = \frac{-L_0}{2} \end{array}$$

$$v(t_0): \begin{array}{ll} \frac{1}{4}v_0 = C_2 + B\omega & C_2 = \frac{1}{8}v_0 \\ 0 = C_2 - B\omega & B = \frac{v_0}{8\omega} \end{array}$$

$$x_I = \frac{1}{2}L_0 + \frac{1}{8}v_0 t - \frac{L_0}{2}\cos t\omega + \frac{v_0}{8\omega}\sin t\omega$$
$$x_{II} = \frac{1}{2}L_0 + \frac{1}{8}v_0 t - \frac{L_0}{2}\cos t\omega - \frac{v_0}{8\omega}\sin t\omega + L_0$$

Nehomogenní rovnice

ODR,L,KK,Nehomogenní



$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \sin \Omega t$ ...vynucující síla, která povzbuzuje kmitání

$\delta = \dfrac{b}{2m}$

$\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

$\omega' = \sqrt{\omega^2 - \delta^2}$

$\omega \succ \delta$

Ω ... frekvence vynucených kmitů

1. Najdeme obecné řešení homogenní rovnice
   $h(t) = (A \exp(-t\delta)) \sin(\omega' t + \theta)$
2. Najdeme partikulární řešení nehomogenní rovnice
   $x_p(t)$

   Obecné řešení nehomogenní rovnice: $x_p(t) = x_n(t) + x_p(t)$

   Předpokládané řešení $x_p(t)$:

   $x_p(t) = P \sin \Omega t + Q \cos \Omega t$

   $\dot{x}_p(t) = \Omega P \cos \Omega t - \Omega Q \sin \Omega t$

   $\ddot{x}_p(t) = -\Omega^2 P \sin \Omega t - \Omega^2 Q \cos \Omega t$

   Hledáme P a Q

   $$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega^2 x = \frac{F_0}{m} \sin \Omega t$$

   $$-\Omega^2 P \sin \Omega t - \Omega^2 Q \cos \Omega t + 2\delta\Omega P \cos \Omega t - 2\delta\Omega Q \sin \Omega t + \omega^2 P \sin \Omega t + \omega^2 Q \cos \Omega t = -\frac{F_0}{m} \sin \Omega t$$

   $$\sin \Omega t \left[(\omega^2 - \Omega^2) P - 2\delta\Omega Q - \frac{F_0}{m} \right] + \cos \Omega t \left[2\delta\Omega P + (\omega^2 - \Omega^2) Q \right] = 0$$

   Aby rovnost platila, musí být obě závorky rovny nule

$$\left(\omega^2-\Omega^2\right)P-2\delta\Omega Q=\frac{F_0}{m}$$
$$2\delta\Omega P+\left(\omega^2-\Omega^2\right)Q=0$$

$$\left[\left(\omega^2-\Omega^2\right)^2+4\delta^2\Omega^2\right]P=\frac{F_0}{m}\left(\omega^2-\Omega^2\right)$$
$$\left[\left(\omega^2-\Omega^2\right)^2+4\delta^2\Omega^2\right]Q=-\frac{F_0}{m}2\delta\Omega$$

$$P=\frac{\frac{F_0}{m}\left(\omega^2-\Omega^2\right)}{\left(\omega^2-\Omega^2\right)^2+4\delta^2\Omega^2}$$
$$Q=\frac{-\frac{F_0}{m}2\delta\Omega}{\left(\omega^2-\Omega^2\right)^2+4\delta^2\Omega^2}$$

Amplituda vynucených kmitů Av

$$A_V=\sqrt{P^2+Q^2}$$
$$A_V=\frac{F_0}{m}\cdot\frac{1}{\left(\omega^2-\Omega^2\right)^2+4\delta^2\Omega^2}\sqrt{\left(\omega^2-\Omega^2\right)^2+4\delta^2\Omega^2}$$
$$A_V=\frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{\left(\omega^2-\Omega^2\right)^2+4\delta^2\Omega^2}}$$

$$x_{(t)}=A\exp(-t\delta)\sin(t\omega+\theta)+A_V\sin(t\Omega+\theta)$$
$$x_{(t)}=A\exp(-t\delta)\sin(t\omega+\theta)+\frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{\left(\omega^2-\delta^2\right)+4\Omega^2\delta^2}}\sin(t\Omega+\theta)$$

Hledání partikulárního řešení

$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \ldots$ ... polynom

$P_{(t)}$ ... polynom stupně *m*:

$a_m t^m + a_{m-1}t^{m-1} + \ldots + a_1 t + a_0$

$= \sin t\omega, \cos t\omega \Rightarrow x_p = a\cos\Omega t + b\sin\Omega t$

$= \exp(\alpha t) \Rightarrow x_p = K\exp(\alpha t)$

$= \left[P_{(t)}\cos t\omega + Q_{(t)}\sin t\omega\right]\exp(\alpha t)$

$P_{(t)}$ ... polynom stupně m

$Q_{(t)}$ ... polynom stupně n

$M = \max[m;n]$

$\Rightarrow x_p = \left[a_{(t)}\cos t\omega + b_{(t)}\sin\Omega t\right]\exp(\alpha t)$

$a_{(t)}; b_{(t)}$... polynom stupně M

$y = y_H + y_p$

Speciální typy pravých stran:

$= \left[P_m\cos\beta x + R_n\sin\beta x\right]\exp(\alpha t)$

Partikulární řešení: yp=

1. $\exp(\alpha x)(S_r\sin\beta x + Q_r\cos\beta x)\ldots\alpha + \beta i$ není kořenem charakteristické rovnice
2. $x\exp(\alpha x)(S_r\sin\beta x + Q_r\cos\beta x)\ldots\alpha + \beta i$ jednoduchým kořenem charakter. rovnice
3. $x^2\exp(\alpha x)(S_r\sin\beta x + Q_r\cos\beta x)\ldots\alpha + \beta i$ dvojnásobný kořen charakteristické rovnice

   $S_r; Q_r\ldots$polynom stupně r

   $r = \max[m;n]$

$= \exp(\alpha x)\left(a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_0\right)$

Partikulární řešení: yp=

1. $\exp(\alpha x)\left(b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_0\right)\ldots\alpha$ není kořenem charakteristické rovnice
2. $x\exp(\alpha x)\left(b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_0\right)\ldots\alpha$ je jednoduchý kořen charakteristické rovnice
3. $x^2\exp(\alpha x)\left(b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_0\right)\ldots\alpha$ je dvojnásobným kořenem charakteristické rovnice

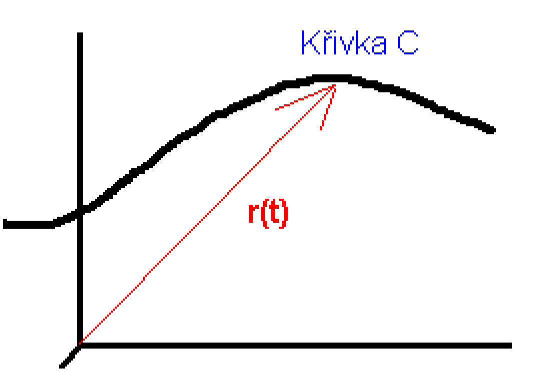
Křivkový integrál

Určitý Riemanův integrál

$\int_a^b f_{(x)} dx = F_{(b)} - F_{(a)}$

Zobecnění Riemanova integrálu

C... křivka v prostoru
$C : t \in [a;b] \rightarrow \vec{r}_{(t)} \in \mathbf{R}^3$



A... otevřená množina v **R**(3), která obsahuje body o souřadnicích $\lfloor x_{(t)}; y_{(t)}; z_{(t)} \rfloor pro \forall t \in [a;b]$

$f : (x;y;z) \in A \rightarrow f_{(x;y;z)} \in \mathbf{R}$

Křivkový integrál I.druhu z funkce f po křivce C

$f_{(x;y;z)}$ ... lineární hustota drátu (hmotnost připadající na jednotku délky)

$f_{(\vec{r})}$ ... hustota

$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$

$dm = f_{(\vec{r})} dl$

$\vec{r} = (x;y;z) = A$

$B = (x + dx; y + dy; z + dz)$

$x = x_{(t)}$

$y = y_{(t)}$

$z = z_{(t)}$

$\frac{dx}{dt} = \dot{x}_{(t)}$

$\frac{dy}{dt} = \dot{y}_{(t)}$

$\frac{dz}{dt} = \dot{z}_{(t)}$

dm... element hmotnosti

$$dm = f\left(x_{(t)}; y_{(t)}; z_{(t)}\right)\sqrt{\dot{x}_{(t)}^2 + \dot{y}_{(t)}^2 + \dot{z}_{(t)}^2}\,dt$$

$$f\left(x_{(t)}; y_{(t)}; z_{(t)}\right)\sqrt{\dot{x}_{(t)}^2 + \dot{y}_{(t)}^2 + \dot{z}_{(t)}^2} = g_{(t)}$$

$$m = \int_a^b f\left(x_{(t)}; y_{(t)}; z_{(t)}\right)\sqrt{\dot{x}_{(t)}^2 + \dot{y}_{(t)}^2 + \dot{z}_{(t)}^2}\,dt$$

... křivkový integrál I. druhu

$$\int_C f dl$$

Příklad:

$$x = R\cos t$$

$$y = R\sin t$$

$$t \in [0; 2\pi]$$

$$dl = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt = \sqrt{R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t}\,dt = Rdt$$

$$\int_C fdl = \int_0^{2\pi} 1Rdt = R\int_0^{2\pi} dt = 2\pi R[j]$$

$$\int_C f_{(\vec{r})}dl = \int_\alpha^\beta f_{\left(x_{(t)}; y_{(t)}; z_{(t)}\right)}\sqrt{\dot{x}_{(t)}^2 + \dot{y}_{(t)}^2 + \dot{z}_{(t)}^2}\,dt$$

Křivkový integrál II.druhu z funkce f po křivce C

$\mu_{(x,y,z)}$... lineární hustota (hmotnost drátu vztažená na jednotku délky)

$\dfrac{\Delta m_{(\vec{r};\Delta l)}}{\Delta l}$ ... průměrná lineární hustota elementu Δl umístěného v $\vec{r}$

$\lim\limits_{\Delta l \to 0} \dfrac{\Delta m}{\Delta l} = \mu_{(\vec{r})}$ ... lineární hustota v bodě

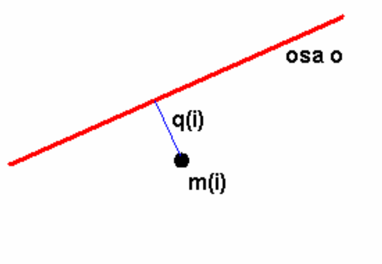
Hmotnost:

$\int_C \mu_{(\vec{r})} dl$ $\mu_{(\vec{r})} dl$ ...element hmotnosti dl... element délky

Těžiště (střed hmotnosti):

$\vec{r}_T = \dfrac{1}{m}\sum\limits_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i \to \dfrac{1}{m}\int_C \mu_{(\vec{r})}\vec{r}\,dl$ indexovaná proměnná **r**i se přemění na spojitou **r**.

Momenty setrvačnosti vzhledem k osám



$J_0 = \sum m_i q_i^2$ ... Moment setrvačnosti vzhledem k ose o

$$J_0 = \int_C \nu_{(\vec{r})} q^2 dl$$

J vůči osám x, y, z.

$$J_x = \int_C \mu_{(\vec{r})} \left(y^2 + z^2\right) dl$$

$$J_y = \int_C \mu_{(\vec{r})} \left(x^2 + z^2\right) dl$$

$$J_z = \int_C \mu_{(\vec{r})} \left(x^2 + y^2\right) dl$$

Deviační momenty (momenty setrvačnosti vzhledem k více osám):

$$D_{xz} = D_{yx} = -\int_C \mu_{(\vec{r})} xydl$$

$$D_{yz} = D_{zy} = -\int_C \mu_{(\vec{r})} yzdl$$

$$D_{xz} = D_{zx} = -\int_C \mu_{(\vec{r})} xzdl$$

Obvykle se tyto momenty sestavují do matice:

$$\begin{pmatrix} J_x & D_{xz} & D_{xz} \\ D_{xy} & J_y & D_{yz} \\ D_{xz} & D_{yz} & J_z \end{pmatrix}$$ ... tenzor momentu setrvačnosti

Př:

$$C: \begin{array}{ll} x = R\cos\alpha & \dot{x} = -R\sin\alpha \\ y = R\sin\alpha & \dot{y} = R\cos t \\ z = bt & \dot{z} = t \\ t \in [0;2\pi] & \end{array}$$

$$\mu = \mu_0 \ldots konst.$$

Hmotnost: $$m = \int_C \mu dl = \mu_0 \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 + b^2} dt = \left[\mu_0 \sqrt{R^2 + b^2} t\right]_0^{2\pi} = 2\pi\mu_0 \sqrt{R^2 + b^2}$$

$$x_T = \frac{1}{m}\int_C \mu_0 x dl = \frac{1}{m}\mu_0 \int_0^{2\pi} R\cos t\sqrt{R^2+b^2}\,dt = \left[\frac{R\mu_0\sqrt{R^2+b^2}}{m}\sin t\right]_0^{2\pi} = 0$$

Těžiště: $$y_T = ... = \frac{R\mu_0\sqrt{R^2+b^2}}{m}\int_0^{2\pi}\sin t dt = 0$$

$$z_T = \frac{1}{m}\mu_0\int_0^{2\pi} bt\sqrt{R^2+b^2}\,dt = \frac{b\mu_0\sqrt{R^2+b^2}}{m}\int_0^{2\pi} t dt = \pi b ... = \frac{1}{2}z_{\max}$$

Moment setrvačnosti vůči ose y:

$$j_y = \int_C \mu_{(x;y;z)}\left(x^2+z^2\right)dl = \left|\mu = \overline{K}\right| = \int_0^{2\pi}\overline{K}bt\left(R^2\cos^2 t + b^2 t\right)\sqrt{R^2+b^2}\,dt =$$

$$= \overline{K}b\sqrt{R^2+b^2}\left[R^2\int_0^{2\pi} t\cos^2 t dt + b^2\int_0^{2\pi} t^3 dt\right] \Rightarrow$$

$$\int_0^{2\pi} t\cos^2 t dt = \int_0^{2\pi} t\frac{1+\cos 2t}{2}dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} t dt + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} t\cos 2t dt =$$

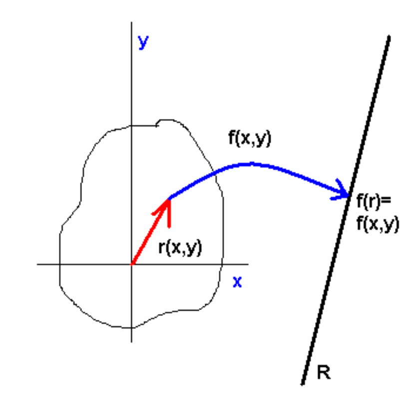
$$= \left.\frac{t^2}{4}\right|_0^{2\pi} + \frac{1}{2}\left[\left.\frac{t}{2}\sin 2t\right|_0^{2\pi} - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin 2t dt\right] = \pi^2 - \frac{1}{2} - \left.\frac{1}{2}\cos 2t\right|_0^{2\pi} = \pi^2$$

$$\int_0^{2\pi} t^3 dt = \left.\frac{1}{4}t^4\right|_0^{2\pi} = 4\pi^4$$

$$\Rightarrow J_y = \overline{K}b\sqrt{R^2+b^2}\left[R^2\pi^2 + 4b^2\pi^2\right]$$

Funkce více proměnných

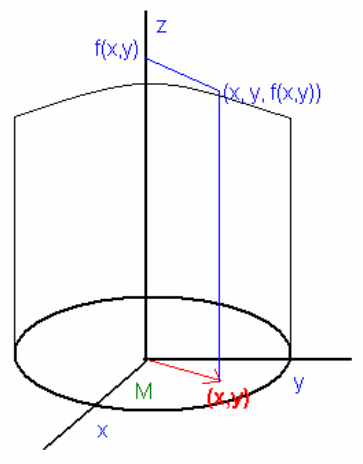
Funkce dvou proměnných



Zobrazení

$$f:(x,y)\in M;(x,y)\rightarrow f_{(x;y)}\in \mathbf{R}$$

$$G_f\left\{[x,y,z]\in \mathbf{R}^3 \middle| z=f_{(x;y)}\right\}$$



Parciální derivace

$$\frac{\partial f_{(x,y)}}{\partial x}=\lim_{h\rightarrow 0}\frac{f_{(x+h;y)}-f_{(x,y)}}{h}$$ ... parciální derivace

značí se také jako *fx*

Př.:

$$f_{(x,y)}=\arctan\frac{y}{x}$$

$$fx=\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\arctan\frac{y}{x}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\frac{-y}{x}=\frac{-y}{x^2+y^2}$$

$$fy = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\arctan\frac{y}{x} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$f_{(x,y)} \quad \begin{cases} fx = \dfrac{\partial f}{\partial x} & fxx = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\ldots \\ & fxy = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\ldots \\ fy = \dfrac{\partial f}{\partial y} & fyy = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\ldots \\ & fyx = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\ldots \end{cases}$$

$$fx = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(f)$$
$$fy = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(f)$$

Jsou-li *fxy* a *fyx* spojité potom *fxy*=*fyx*

$$fx = \frac{-y}{x^2+y^2}$$
$$fxy = -\frac{\left(x^2+y^2\right)-y2y}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{2y^2-\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$
$$fy = \frac{y}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$
$$fyx = \frac{\left(x^2+y^2\right)-2x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

Parciální derivace složené funkce

Vznik složené funkce:

$$F:(x,y)\to F_{(x,y)} = f\left[u_{(x,y)};v_{(x,y)}\right]$$

$$\left.\begin{matrix} u_{(x,y)} \\ v_{(x,y)} \end{matrix}\right\} \text{ vnitřní složky}$$

f… vnější složka

Předpoklady:

existuje: $\dfrac{\partial f}{\partial u};\dfrac{\partial f}{\partial v};\dfrac{\partial u}{\partial x};\dfrac{\partial u}{\partial y};\dfrac{\partial v}{\partial x};\dfrac{\partial v}{\partial y}$

$$Fx = \frac{\partial F_{(x,y)}}{\partial x}$$
$$Fy = \frac{\partial F_{(x,y)}}{\partial y}$$

$$\frac{\partial F_{(x,y)}}{\partial x}=\lim_{h\to 0}\frac{F_{(x+h;y)}-F_{(x,y)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f\left[u_{(x+h,y)},v_{(x+h,y)}\right]-f\left[u_{(x,y)},v_{(x,y)}\right]}{h}=$$

$$=\frac{1}{h}\left[f\left[u_{(x+h,y)},v_{(x+h,y)}\right]-f\left[u_{(x,y)},v_{(x+h,y)}\right]+f\left[u_{(x,y)},v_{(x+h,y)}\right]-f\left[u_{(x,y)},v_{(x,y)}\right]\right]=$$

$$=\frac{f\left[u_{(x+h,y)},v_{(x+h,y)}\right]-f\left[u_{(x,y)},v_{(x+h,y)}\right]}{v_{(x+h,y)}-v_{(x,y)}}\cdot\frac{v_{(x+h,y)}-v_{(x,y)}}{h}$$

$$u_{(x+h,y)}-u_{(x,y)}=H$$

$$v_{(x+h,y)}-v_{(x,y)}=K$$

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ \binom{H\to 0}{K\to 0}}} : \lim_{H\to 0}\frac{f_{[u+H,v+K]}-f_{[u,v+K]}}{H}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{u_{(x+h,y)}-u_{(x,y)}}{h}+\lim_{K\to 0}\frac{f_{(u,v+K)}-f_{(u,v)}}{K}\cdot\lim_{\to 0}\frac{v_{(x+h,y)}-v_{(x,y)}}{h}=$$

$$=\frac{\partial F_{(x,y)}}{\partial x}=\left.\frac{\partial f_{(u,v)}}{u}\right|_{\substack{u(x,y)\\ v(x,y)}}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\left.\frac{\partial f_{(u,v)}}{\partial v}\right|_{\substack{u(x,y)\\ v(x,y)}}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$Fx=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$Fy=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

Příklad:

$$F_{(x,y)}=\ln(\cos xy\cdot\sin xy)$$

Přímo:

$$Fx=\frac{1}{\cos xy\sin xy}\left(-y\sin^2 xy+y\cos^2 xy\right)$$

Vzorcem:

$$f:\ln(uv)$$

$$u=\cos xy$$

$$v=\sin xy$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\ln(uv)=\frac{1}{uv}v=\frac{1}{u}$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\ln(uv)=\frac{1}{uv}u=\frac{1}{v}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\cos xy=-y\sin xy$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\sin xy=y\cos xy$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{1}{u}(-y\sin xy)+\frac{1}{v}(y\cos xy)=\frac{1}{\cos xy}(-y\sin xy)+\frac{1}{\sin xy}(y\cos xy)=\frac{1}{\sin x\cos xy}\left(-y\sin^2 xy+y\cos^2 xy\right)$$

Příklad:

$$f(x,y)$$

$$x=x_{(r,\varphi)}=r\cos\varphi$$

$$y=y_{(r,\varphi)}=r\sin\varphi$$

$F_{(r,\varphi)} = f\left(r\cos\varphi, r\sin\varphi\right)$

$\frac{\partial F_{(r,\varphi)}}{\partial r} = Fr = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\varphi = fx\cos\varphi + fy\sin\varphi$

$F\varphi = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\varphi} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\varphi} = fx(-r\sin\varphi) + fy(r\cos\varphi)$

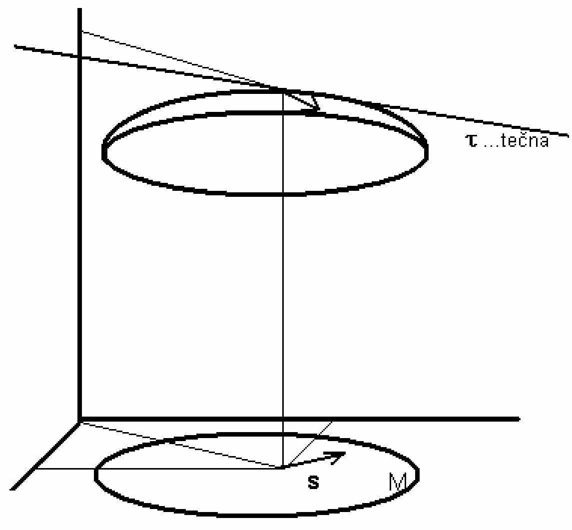
$Frr = fxx\cos\varphi\cos\varphi + fxy\cos\varphi\sin\varphi + fyx\sin\varphi\cos\varphi + fyy\sin\varphi\sin\varphi$

$Frr = fxx\cos^2\varphi + 2\,fxy\sin x\cos x + fyy\sin$

Parciální derivace ve směru

z=f(x,y)

(x,y)… pevné body… $(x,y) \Rightarrow (x_0; y_0)$



$|\vec{s}| = 1$

$\sqrt{s_x^2 + s_y^2} = 1$

$\vec{s} = (s_x; s_y)$

$p = (x_0 + ts_x; y_0 + ts_y)$

$F_{(t)} = f_{(x_0 + ts_x; y_0 + ts_y)}$

$$C: \left.\begin{aligned} x &= x_0 + ts_x \\ y &= y_0 + ts_y \\ z = F_{(t)} &= f\left(x_0 + ts_y; y_0 + ts_y\right) \end{aligned}\right\}$$ Parametrické vyjádření křivky *C* s parametrem *t*.

C… průnik *G(f)* s rovinou kolmou k souřadnicovým osám obsahující přímku, na níž leží vektor **s**.

Tečna k $C = \tau$

$\tau \in \rho$

$F'_{(0)}$ směrnice tečny τ

$F'_{(t)} = \frac{dF}{dt} = \frac{d}{dt} f\left(x_0 + ts_x; y_0 + ts_y\right) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}s_x + \frac{\partial f}{\partial y}s_y$

$$F'_{(0)} = \frac{\partial f_{(x_0;y_0)}}{\partial x} s_x + \frac{\partial f_{(x_0;y_0)}}{\partial y} s_y \Rightarrow \text{značíme:} \frac{\partial f_{(x_0;y_0)}}{\partial \vec{s}}$$

Příklad:

$$z = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right) = f_{(x,y)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}} = \frac{\partial f}{\partial x} s_x + \frac{\partial f}{\partial y} s_y = x_0 s_z + y_0 s_y$$

$$\vec{s} = ?\, aby \frac{\partial f_{(x_0;y_0)}}{\partial \vec{s}} = 0$$

$$\vec{s} = \left(\frac{-y}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}; \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \right)$$

Gradient

$$f \begin{array}{l} \to \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \to \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{array}$$

$$\vec{g} = (fx; fy)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}} = \frac{\partial f}{\partial x} s_x + \frac{\partial f}{\partial y} s_y = g_x s_x + g_y s_y = \vec{g}\vec{s} = |\vec{g}||\vec{s}|\cos(\angle \vec{g}; \vec{s})$$

Jaký zvolit směr **s** aby $\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}$...max

$$\vec{s} \|^{+} \vec{g} ... \cos(\angle \vec{s}; \vec{g}) = 1 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \vec{s}} = |\vec{g}| ... gradient$$

Gradient funkce *f* je směr největšího spádu funkční hodnoty