F3100 - Kmity, vlny, optika

Typed by Petr Šafařík

8. ledna 2007

Obsah

Vytvořeno jako neoficiální pomocný učební text k předmětu *F3100 - Kmity, vlny, optika*, které přednášel *doc. RNDr. Zdeněk Bochníček, Dr.*.

1 Osnova

1. Kmity – harmonické, tlumené, nucené, neharmonické kmity, superpozice
2. Vlny –postupná a stojatá vlna na přímce a v prostoru, superpozice, disperze, nelinearita, zvuk, vlny na vodě
3. Základní představy o světle
4. Geometrická optika
5. Vlnová optika
6. (Fotometrie)

2 Souhrn předešlé fyziky

- II. Newtonův zákon
$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$
$$\Rightarrow \vec{r}(t) + \text{počáteční podmínky}$$
$$\vec{r}(t=0) = \vec{r_0}$$
$$\left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{t=0}$$

- Zákon zachování mechanické energie
$$E_c = E_k + E_p = konst.$$
$$E_p = \int_A^B \vec{F} d\vec{r}$$
$$A \ldots \text{referenční bod}$$

- Matematiku
Řešení lineární diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty
$$A\ddot{x} + B\dot{x} + Cx = 0$$
$$\text{kde } A, B, C \in \mathbf{R}; \dot{x} = \frac{dx}{dt}; \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$$
$$A\lambda^2 + B\lambda + C = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

Pro $D > 0$ poté: $x = P_1 e^{r_1 \cdot t} + P_2 e^{r_2 \cdot t}$

Pro $D = 0$ poté: $x = P_1 e^{-\frac{B}{2A} \cdot t} + P_2 t e^{-\frac{B}{2A} \cdot t} = e^{-\frac{B}{2A} \cdot t}(P_1 + t \cdot P_2)$

Pro $D < 0$ poté: $x = P_1 e^{\left(-\frac{B}{2A} + i\frac{\sqrt{|D|}}{2A}\right)t} + P_2 e^{\left(-\frac{B}{2A} - i\frac{\sqrt{|D|}}{2A}\right)t}$

$$\Rightarrow x = e^{-\frac{B}{2A}t} \cdot \left(P_1 e^{\frac{\sqrt{|D|}}{2A}t} + P_2 e^{-i\frac{\sqrt{|D|}}{2A}t}\right)$$

Přičemž

$$\left(P_1 e^{\frac{\sqrt{|D|}}{2A}t} + P_2 e^{-i\frac{\sqrt{|D|}}{2A}t}\right) = P_3 \sin(\omega t + \varphi)$$

$$x = P_3 e^{-\frac{B}{2A}t} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

Část I
Kmity

3 Harmonické kmity

3.1 Definice aneb dva pohledy

Co jsou to harmonické kmity? Jsou dva pohledy:

1. Kinematicky
$$x_{(t)} = A\sin(\omega_0 t + \varphi)$$

2. Dynamicky
$$\vec{F} = -k\vec{r} \text{ pro } k > 0 \ldots\ n \text{ dimenzionální}$$
$$F = -k \cdot r \ldots\ 1 \text{ dimenzionální}$$

kde $x_{(t)}$ a $\vec{r}$ je výchylka

3.2 Řešení

Podle 2.Newtonova zákona platí
$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Dosadíme-li za $\vec{F} = -k\vec{r}$ a uvědomíme-li si, že $a = \frac{dx^2}{dt^2}$ poté dostaneme:
$$-kx = m\frac{dx^2}{dt^2}$$

neboli:
$$m\frac{dx^2}{dt^2} + kx = 0$$

Pokud provedeme substituci, že $\frac{k}{m} = \omega^2$ získáme:
$$\frac{dx^2}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

Řešení této diferenciální rovnice odpovídají dvě funkce:

- Goniometrické řešení:
$$x_{(t)} = A\sin(\omega_0 t + \varphi)$$

- Exponenciální řešení

$$x_{(t)} = A \cdot e^{i(\omega_0 t + \varphi)}$$

kde $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Ostatní dvě konstanty (A, φ) jsou určeny počátečními podmínkami. Nám vyhovovaly následující hodnoty (aby se shodovaly s ukázaným experimentem). $A \ldots$ amplituda se určí jako $x_{(t=0)}$
$\varphi \ldots$ počáteční fáze se určí jako $v = \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0}$

$$v_{(t)} = \frac{dx}{dt} = \omega_0 A \cos\left(\omega_0 t + \varphi\right)$$

kde $\omega_0 A$ je amplituda rychlosti

$$a_{(t)} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 A \sin\left(\omega_0 t + \varphi\right)$$

kde $\omega_0^2 A$ je amplituda zrychlení

3.3 Mechanická energie

$$E_{(t)} = E_k^{(t)} + E_p^{(t)}$$

$$E_k^{(t)} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 \cos^2\left(\omega_0 t + \varphi\right)$$

$$E_p^{(t)} = -\int_0^x F_{(t)} dx' = \int_0^x k x' dx = \frac{1}{2} k x_{(t)}^2$$

$$x_{(t)}^2 = A^2 \sin^2\left(\omega_0 t + \varphi\right)$$

$$E_p^{(t)} = \frac{1}{2} k \cdot A^2 \sin^2\left(\omega_0 t + \varphi\right)$$

$$E_{(t)} = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 \cos^2\left(\omega_0 t + \varphi\right) + \frac{1}{2} k \cdot A^2 \sin^2\left(\omega_0 t + \varphi\right)$$

$$E_{(t)} = \frac{1}{2} m \sqrt{\frac{k}{m}}^2 A^2 \cos^2\left(\omega_0 t + \varphi\right) + \frac{1}{2} k \cdot A^2 \sin^2\left(\omega_0 t + \varphi\right)$$

$$E_{(t)} = \frac{1}{2} k A^2 \left[\cos^2\left(\omega_0 t + \varphi\right) + \sin^2\left(\omega_0 t + \varphi\right)\right]$$

$$\left[\cos^2\left(\omega_0 t + \varphi\right) + \sin^2\left(\omega_0 t + \varphi\right)\right] = 1$$

$$E_{(t)} = \frac{1}{2} k A^2$$

3.4 Příklady harmonických oscilátorů

3.4.1 Pružiny

Tuhost pružiny k

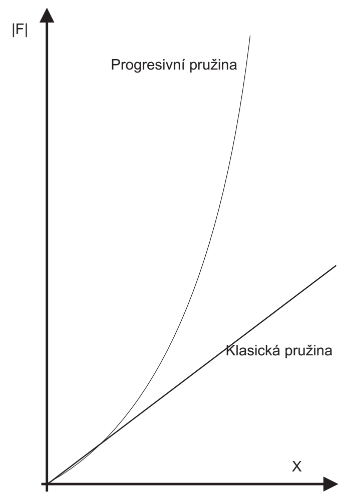
$$F_p = -kx$$

$$k = \frac{Gd^4}{8D^3n}$$

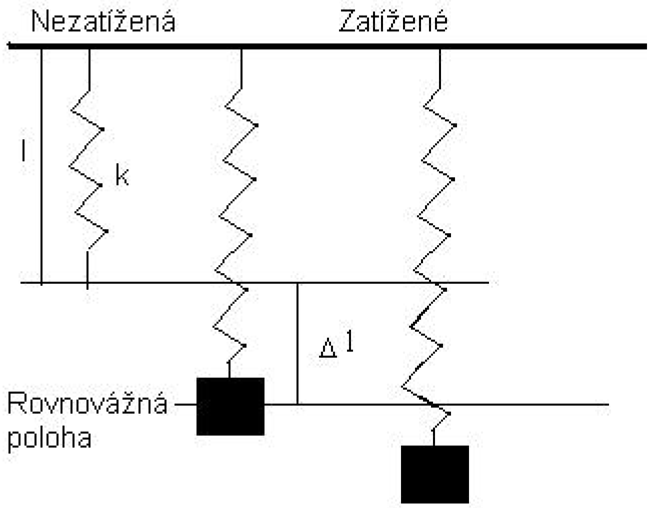
G ... modul pružnosti v torzi
d ... průměr drátu
D ... průměr vinutí
n ... počet závitů

Progresivní pružiny

V některých případech je třeba, aby pružina neměla k lineárně závisté na výchylce x, ale aby závislost byla strmější (např. na motorce, kdy je třeba, aby pružina pružila jak s nízkou zátěží (jeden člověk - řidič), tak i s dvojnásobnou zátěží(řidič a spolujezdec) stejně kvalitně, aby nebyla moc tvrdá pro jednoho, přičemž by byla dostatečná pro dva, nebo naopak dostatečná pro jednoho, ale příliš měkká pro dva pasažéry). Zde se používá tzv. progresivních pružin, kde je závislost strmější. Dosáhne se tím nelineárním vinutím drátů.



Příklad



$$\vec{F}g = (-mg; 0; 0)$$

$$\vec{F}p_{staticka} = \vec{F}s = (k\Delta l; 0; 0)$$
$$\Rightarrow k = \frac{mg}{\Delta l}$$

$$m \cdot \vec{a} = \sum \vec{F}$$
$$m \cdot \vec{a} = \vec{F}g + \vec{F}s + \vec{F}_d$$
$$\vec{F}g + \vec{F}s = 0$$
$$\Rightarrow m \cdot \vec{a} = \vec{F}_d$$
$$m \cdot \vec{a} = -kx$$
$$\ddot{x} + \frac{k}{m} \cdot x = 0 \ldots \frac{k}{m} = \omega^2$$

Přičemž si musíme uvědomit: $r^2 + \omega^2 = 0 \Rightarrow r = i\omega$
Pak jistě snadno přijdeme na výsledky:

$$x = A \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\dot{x} = A\omega \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\ddot{x} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi)$$

Ověříme jednoduše dosazením do $\ddot{x} + \frac{k}{m} \cdot x = 0$:
$-A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) + \omega^2 \cdot A \sin(\omega t + \varphi) = 0$
$0 = 0$

3.4.2 Kyvadlo

Aproximace Snadno lze odvodit, že síla neodpovídá úhlu, ale jeho sinusu, neboli:

$$F \not\sim \varphi \text{ ale } F \sim \sin\varphi$$

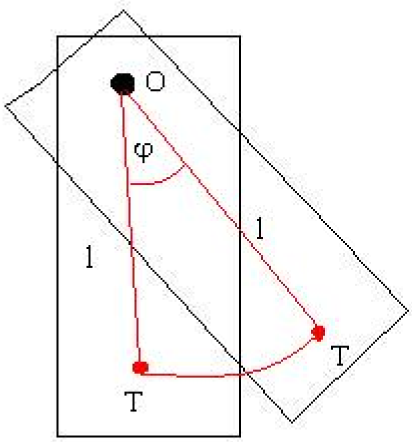
$$\Downarrow$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

a

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{h}}$$

Příklad



Natáčení tělesa s těžištěm T kolem osy o vzdálené o l do úhlu φ

II. Newtonův zákon přejde v II. Impulsovou větu

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \Rightarrow \vec{M} = J \cdot \vec{\varepsilon}$$

$\vec{F} \rightarrow \vec{M} \ldots$ Síla $\rightarrow$ Moment síly
$m \rightarrow J \ldots$ Hmotnost (charakteristika tělesa) $\rightarrow$ Moment setrvačnosti
$\vec{a} \rightarrow \vec{\varepsilon} \ldots$ Zrychlení $\rightarrow$ Úhlové zrychlení

$$\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$M = -m \cdot g \cdot l \cdot \sin\varphi$$

$$J\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mgl\sin\varphi$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{mgl}{J} \cdot \sin\varphi = 0$$

$$\sin\varphi \doteq \varphi$$

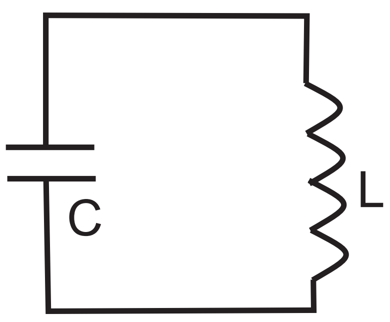
$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{mgl}{J} \cdot \varphi = 0$$

$$\frac{mgl}{J} = \omega^2$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega^2\varphi = 0$$

Nyní již řešíme klasicky jako těleso na pružině.

3.4.3 Elektrické kmity v elektrickém LC obvodu



Z Krichovových zákonů plyne: $U_C + U_L = 0$. Dále víme, že $U_C = \frac{Q}{C}$ a taky že $U_L = -L\frac{dI}{dt}$

$$\frac{Q_{(t)}}{C} - L\frac{dI_{(t)}}{dt} = 0$$

$$i = -\frac{dQ}{dt}$$

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{1}{CL}Q = 0$$

$$\frac{1}{CL} = \omega^2$$

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \omega^2 Q = 0$$

4 Tlumené harmonické kmity

4.1 Definice

Ve skutečnosti ovšem neexistují netlumené kmity, takže reálnější je

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx + F_t$$

kde F_t je tlumící síla. Otázkou je, jak vyjádříme právě F_t Jsou zde tři možné pohledy.

1. Třecí síla(smyk)
$$|F_t| = konst. \Rightarrow F_t \pm konst.$$

2. F_t je úměrná rychlosti ($F_t \sim v$)
$$\text{Stokesův vztah: } F_t = -6\pi\mu r \cdot v$$
Hodí se pro malé rychlosti a malé kulové tělesa

3. F_t je úměrná kvadrátu rychlosti ($F_t \sim v^2$)
$$\text{Newtonův vztah: } F_t = \frac{1}{2}\rho C_x S v^2$$
kde C_x je koeficient odporu prostředí o hustotě ρ a S je aktivní průřez. Tento vztah se hodí pro větší rychlosti a/nebo pro obecné tělesa.

4.2 Příklad

Pro jednoduchost budeme počítat s ($F_t \sim v$)

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - B \cdot v$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx + B \cdot v = 0$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + B\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{B}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

Substituce: $\frac{B}{m} = 2\gamma$ a $\frac{k}{m} = \omega_0^2$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

Této diferenciální rovnici vyhovuje:

$$x = Ae^{\alpha t}$$

a tedy

$$\frac{dx}{dt}\alpha Ae^{\alpha t} \text{ a } \frac{d^2x}{dt^2} = \alpha^2 Ae^{\alpha t}$$

$$\alpha^2 Ae^{\alpha t} + 2\gamma\alpha Ae^{\alpha t} + \omega_0^2 Ae^{\alpha t} = 0$$

$$\alpha^2 + 2\gamma\alpha + \omega_0^2 = 0$$

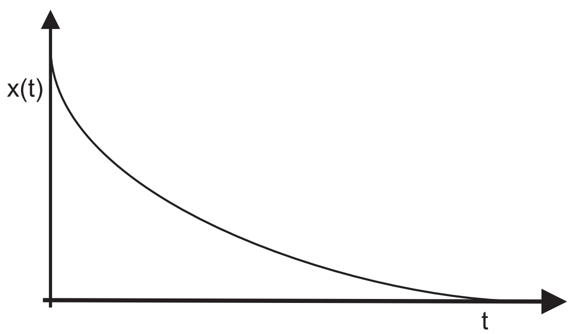
$$\alpha_{1,2} = \frac{-2\gamma \pm \sqrt{4\gamma^2 - 4\omega_0^2}}{2}$$

$$\alpha_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

4.2.1 Diskuse výsledků: $\gamma^2 > \omega_0^2$

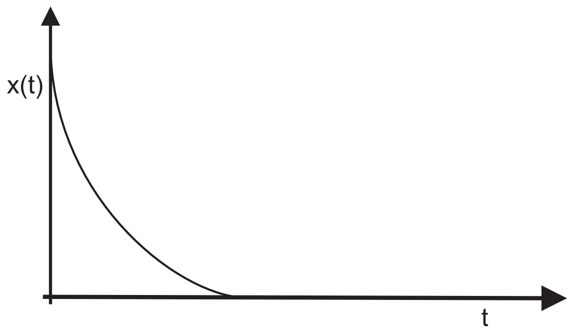
$\alpha_{1,2}$ jsou obě reálná a záporná

$$x_{(t)} = A_1 e^{-|\alpha_1|t} + A_2 e^{-|\alpha_2|t}$$



4.2.2 Diskuse výsledků: $\gamma^2 = \omega_0^2$

Dopadne to stejně, jako by $\gamma^2 > \omega_0^2$ jen s tím rozdílem, že se do nulové polohy dostane nejrychleji, tak aby se již dál nepřekmitla.

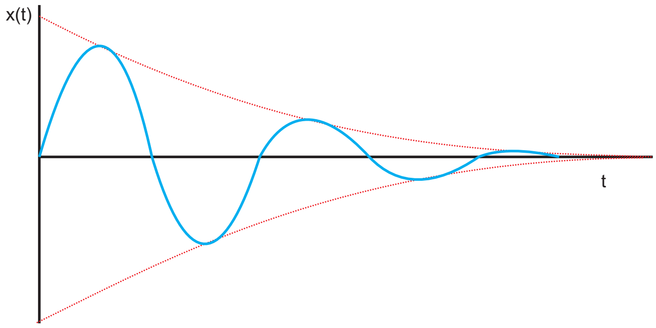


4.2.3 Diskuse výsledků: $\gamma^2 < \omega_0^2$

$$\alpha_{1,2} = -\gamma \pm \imath\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$
$$x_{(t)} = Ae^{-\gamma t} \sin{(\omega t + \varphi)}$$

Kde platí, že $\omega_0 = \sqrt{\sqrt{\omega} - \sqrt{\gamma}}$ a taky $Ae^{-\gamma t} = A_{(t)} \dots$ koeficient útumu. Může to také vyjádřit jako:

$$x_{(t)} = Ae^{-\gamma t + \imath(\omega t + \varphi)}$$



A jak to je s energiemi? Zachovává se mechanická energie i tentokrát? Zamyslíme-li se, tak matematický výsledek nás nepřekvapí. A jaký vlastně je, onen matematický výsledek?

$$E = E_p + E_k = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

matematickými úpravami získáme výsledek:

$$E = \frac{1}{2}kA^2$$

$$E_{(x)} = \frac{1}{2}kA_{(x)}^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cdot e^{-2\gamma t}$$

Zvolíme-li substituci $\frac{1}{2}kA^2 = E|_{t=0}$, pak zjistíme, že:

$$E_{(x)} = E_{(t)} = E_0 e^{-2\gamma t}$$

Chcete-li to slovně, tak celková mechanická energie E závisí na počáteční energii E_0 a následně *klesá s časem* podle funkce $e^{-2\gamma t}$[1].

A kam tato energie tedy mizí? Skutečně jsme tedy dokázali, že neplatí Zákon Zachování Mechanické Energie? Odpověď je ano.

Tato energie přejde v energii tepelnou a deformační způsobené odporem prostředí a třením.

[1]Exponenciální pokles energie platí jen přibližně ve větším časovém měřítku (ve srovnání s periodou). Pokud bychom počítali mechanickou energii přesně, vyšla by komplikovaná funkce, protože energie klesá podle okamžité rychlosti a ta se v průběhu periody mění. Celková mechanická energie klesá, zákon zachování mechanické energie platí jen málokdy (na Zemi v podstatě nikdy)

4.3 Porovnání jednotlivých tlumených oscilátorů

- *Činitel jakosti:*

  $Q = \frac{\omega}{2\gamma} \ldots$ Počet period v radiánech, za který klesne energie E na $\frac{1}{e}$ původní energie E_0
  Čas
  $$t_Q = \frac{\omega}{2\gamma\pi} \cdot T = \frac{frac2\pi T}{4\gamma\pi} T = \frac{1}{2\gamma}$$
  Energie
  $$E_{t_Q} = E_0 e^{-2\gamma t_Q} = E_0 e^{-\frac{2\gamma}{2\gamma}} = E_0 e^{-1} = \frac{E_0}{e}$$

- *Útlum*
  $$\lambda = \frac{A_0 e^{-\gamma t}}{A_0 e^{-\gamma(t+T)}} = e^{\gamma T}$$

- *Logaritmický dekrement útlumu*
  $$\delta = \ln \lambda = \gamma T = \frac{\pi}{Q}$$

5 Vynucené kmity

5.1 Definice a nástin řešení

II. Newtonovův zákon rozepíšeme jako:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - B\frac{dx}{dt} + F_{v;(t)}$$

kde: $-kx$ je harmonická složka
$B\frac{dx}{dt}$ je tlumící složka
$F_{v;(t)}$ je vynucující síla.

O případu, kde by se vyskytovala vynucující síla $F_{v;(t)}$ ale chyběla tlumící složka uvažovat nebudeme, protože

1. takové kmity se nevyskytují a
2. taková rovnice $\left(m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx + F_{v;(t)}\right)$ by vedla k nesmyslným výsledkům (kyvadlo s nekonečnou energií. . .)

Nyní je ještě třeba určit onu $F_{v;(t)}$ vynucující sílu. Takže co o ní víme? V našem experimentu byla periodická a závislá na čase. Našemu hledání odpovídá funkce[2]:

$$F_{v;(t)} = F_0 \sin(\Omega t)$$

Tato funkce kmitá s vlastní úhlovou rychlostí Ω a nabývá maxima F_0. Takže dosadíme-li, dostaneme:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - B\frac{dx}{dt} + F_0 \sin(\Omega t)$$

Snadnou úpravou, kdy všechny členy obsahující neznámou x přesuneme na jednu stranu a zbytek necháme na druhé získáme nehomogenní diferenciální rovnici druhého stupně.

[2]Volba vynucujícíc síly ve tvaru sinusovky není jednoznačně dána. Vynucující síla může mít i jiný průběh (a ve skutečnosti v mnoha případech má), dokonce ani nemusí být nutně periodická. Sinusový tvar je však vhodný pro relativně snadné analytické řešení.

S rosotucím tlumením je rezonační křivka nižší a širší. Málo tlumenými oscilátory dosáhneme vysoké výsledné amplitudy pouze s malou silou, ale musíme přesně nastavit zdroj vynucující síly do rezonanční frekvence. Silně tlumené oscilátory naopak jsou schopny kmitat se srovnatelnou amplitudou pro širší obor frekvencí vynucující síly (Př.: bubínek lidského ucha).

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (2\gamma)\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = F_0 \sin(\Omega t)$$

Tuto rovnici řešíme ve třech krocích:

1. Zhomogenizujeme $\left(\frac{d^2x}{dt^2} + (2\gamma)\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = F_0 \sin(\Omega t) \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + (2\gamma)\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0\right)$ a vyřešíme.
   Získáme tak x_0
2. Najdeme partikulární řešení x_p
3. Výsledné řešení je $x_{(t)} = x_{0(t)} + x_{p(t)}$

Protože jsme již v minulé kapitole našli řešení tlumených harmonických kmitů, máme i x_0

$$x_0 = Ae^{-\gamma t + \imath(\omega t + \varphi)}$$

Partikulární řešení budeme hledat ve tvaru:

$$x_p = A_v \sin(\Omega t + \phi)$$

kde konstanta A_v je rovna $A_v = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{\left(\Omega^2 - \omega_0^2\right) + 4\Omega^2\gamma^2}}$
a konstanta ϕ se spočítá jako $\phi = -\frac{2\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$

Výsledné $x_{(t)}$ tedy bude

$$x_{(t)} = Ae^{-\gamma t + \imath(\omega t + \varphi)} + \frac{\frac{F_0}{m} \cdot \sin\left(\Omega t - \frac{2\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right)}{\sqrt{\left(\Omega^2 - \omega_0^2\right) + 4\Omega^2\gamma^2}}$$

Z rovnice plyne, že po nekonečně dlouhém čase kmitání získá tvar $x_p = A_v \sin(\Omega t + \phi)$

Pokud je A_v maximální, říkáme, že nastala rezonance. Neboli extrém funkce $A_{v(\Omega)}$ Naštěstí nemusíme řešit celý tvar A_v, protože m a F_0 jsou konstanty a odmocnina taky nic nezmění na monotónnosti (o kterou nám jde), ale "pouze" tvar

$$\frac{d}{d\Omega}\left[\left(\Omega^2 - \omega_0^2\right) + 4\Omega^2\gamma^2\right] = 4\Omega\left(\Omega^2 - \omega^2\right) + 8\gamma^2\Omega$$

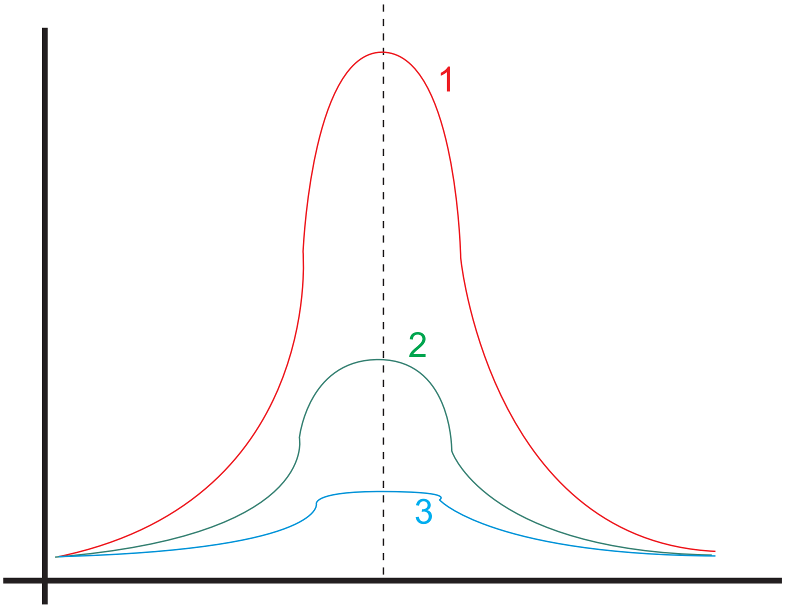
$$4\Omega\left(\Omega^2 - \omega_0^2 + 2\gamma^2\right) = 0$$

$$\Omega_1 = 0 \vee \Omega^2 - \omega_0^2 + 2\gamma^2 = 0$$

$$\Omega_{2,3} = \pm\sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$$

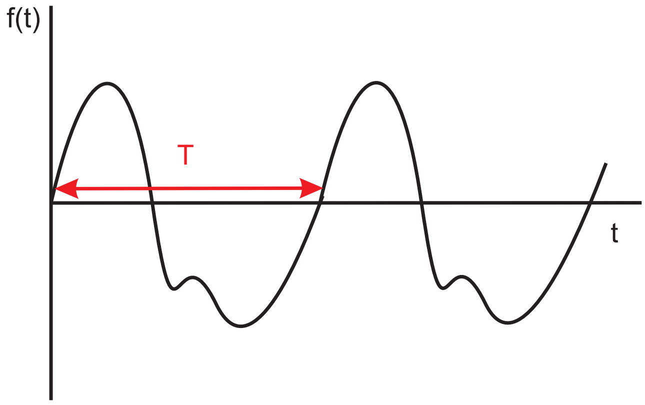
Protože Ω je frekvence a nulová frekvence nás nezajímá, tak Ω_1 vynecháme. Stejně tak jako frekvence nemůže být záporná, tak vynecháme i $\Omega_2 = -\sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$.

Získáme tedy *rezonanční frekvenci* $\Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$



$\gamma_3 > \gamma_2 > \gamma_1 \ldots$ větší dlumení, nižší rezonanční křivka

5.2 Fourierova řada, transformace



Jakákoli periodická funkce se dá popsat pomocí tzv. fourierovy řady, což je funkce složená pouze z konstant a funkcí sin a cos.

$$f_{(t)} = A_0 + \sum_{n=}^{\infty} A_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\omega t)$$

Vzpomeneme si, že $\omega = \frac{2\pi}{T}$
A_0, A_n a B_n jsou konstanty a získáme je z následujících vztahů:

$$A_n = \frac{2}{T}\int_0^T f_{(t)} \cos(n\omega t)\, dt \ldots n = 1, 2, \ldots \infty$$

$$B_n = \frac{2}{T}\int_0^T f_{(t)} \sin(n\omega t)\, dt \ldots n = 1, 2, \ldots \infty$$

$$A_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f_{(t)} dt$$

A co bychom mohli udělat s neperiodickou funkcí? Zde je možnost udělat z neperiodické funkce periodickou prostým posunutím periody do nekonečna $T \to \infty \Rightarrow \omega \to 0$

6 Superpozice kmitů

6.1 Skládání kmitů stejné frekvence (izochronní)

$u_{1,(t)} = u_{1,0} \sin(\omega t + \varphi_1)$
$u_{2,(t)} = u_{2,0} \sin(\omega t + \varphi_2)$
Kmity jsou izochronní, tedy mají stejnou frekvenci, neboli $f_1 = f_2 \Rightarrow \omega_1 = \omega_2$
Jak tedy zjistíme, co se bude dít, když tyto dva kmity pošleme spolu? Složí se, neboli můžeme fyzikálně napsat:

$$u_{(t)} = u_{1,(t)} + u_{2,(t)}$$

No, takže tady touto rovnicí veškerá fyzikální práce končí a místo fyzika musí nastoupit matematik (jenž se v každém fyzikovi skrývá) a pokračuje s vervou a chutí dál.

$$u_{(t)} = u_{1,(t)} + u_{2,(t)} = u_{1,0} \sin(\omega t + \varphi_1) + u_{2,0} \sin(\omega t + \varphi_2)$$

$$u_{(t)} = u_{1,0} (\sin \omega t \cos \varphi_1 + \cos \omega t \sin \varphi_1) + u_{2,0} (\sin \omega t \cos \varphi_2 + \cos \omega t \sin \varphi_2)$$

Pokud tedy vytkneme goniometrické členy, které jsou závislé na čase, získáme:

$$u_{(t)} = \sin(\omega t) [u_{1,0} \cos \varphi_1 + u_{2,0} \cos \varphi_2] + \cos(\omega t) [u_{1,0} \sin \varphi_1 + u_{2,0} \sin \varphi_2]$$

Členy v hranatých závorkách nezávisí na čase ale pouze na počátečních podmínkách $(\varphi, u_{1,0}, u_{2,0})$, takže to jsou "pouze" čísla. Proto nám nic nebrání v zavedení následující substituce:

$$u_{1,0} \cos \varphi_1 + u_{2,0} \cos \varphi_2 = B_1$$

$$u_{1,0} \sin \varphi_1 + u_{2,0} \sin \varphi_2 = B_2$$

Dostaneme tedy tvar:

$$u_{(t)} = B_1 \sin(\omega t) + B_2 \cos(\omega t)$$

Jednoduchými matematickými operacemi získáme tvar:

$$u_{(t)} = R \sin(\omega t + \varphi)$$

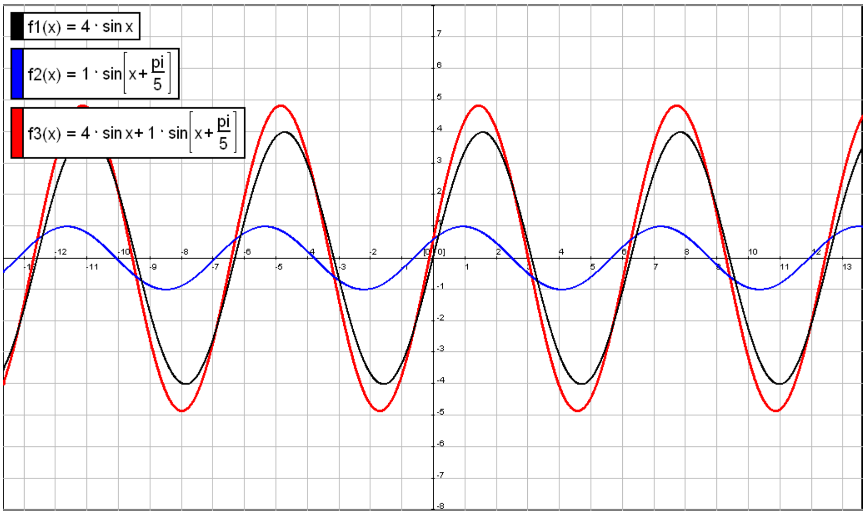
neboli že se jedná opět o periodickou *sin*usovou funkci, pouze fázově posunutou o φ a s amplitudou R.

$R = \sqrt{B_1^2 + B_2^2}$

Po dosazení a upravení:
$R = \sqrt{u_{1,0}^2 + u_{2,0}^2 + 2u_{1,0}u_{2,0}\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$
$\varphi = \arctan\left(\frac{B_2}{B_1}\right)$
Možnosti výsledků, neboli:

6.1.1 Diskuse: $\Delta\varphi = 0° \Rightarrow \cos\Delta\varphi = 1$

$R = u_{1,0} + u_{2,0}$



6.1.2 Diskuse: $\Delta\varphi = 180° \Rightarrow \cos\Delta\varphi = -1$

$R = |u_{1,0} - u_{2,0}|$

6.2 Skládání kmitů blízké frekvence

$u_{1,(t)} = u_0 \sin(\omega_1 t)$
$u_{2,(t)} = u_0 \sin(\omega_2 t)$
$\omega_1 \neq \omega_2 \Rightarrow f_1 \neq f_2$

$$u_{(t)} = u_{1,(t)} + u_{2,(t)}$$

A opět, jako v minulém případě, práce fyzika končí a přichází na řadu matematik...

$$u_{(t)} = u_0 \left(\sin\left(\omega_1 t\right) + \sin\left(\omega_2 t\right)\right)$$

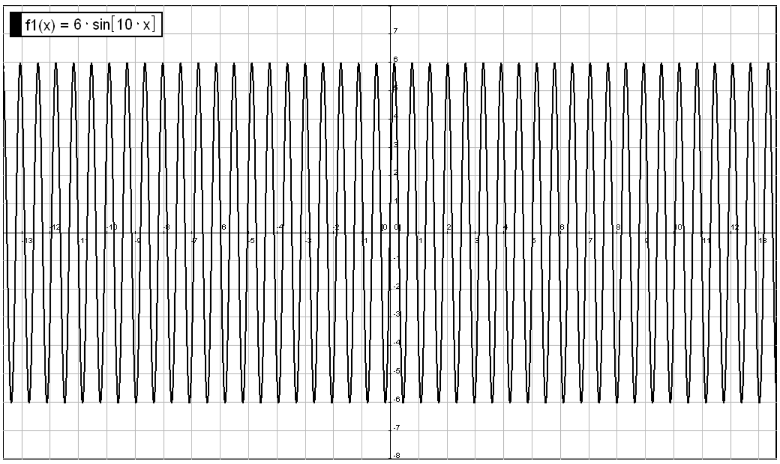
$$u_{(t)} = 2u_0 \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \cdot \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right)$$

Po zavedení následující substituce
$\frac{\omega_1+\omega_2}{2} = \overline{\omega}$
$\frac{\omega_1-\omega_2}{2} = \omega_R$
se nám výraz $u_{(t)}$ zjednoduší do podoby:

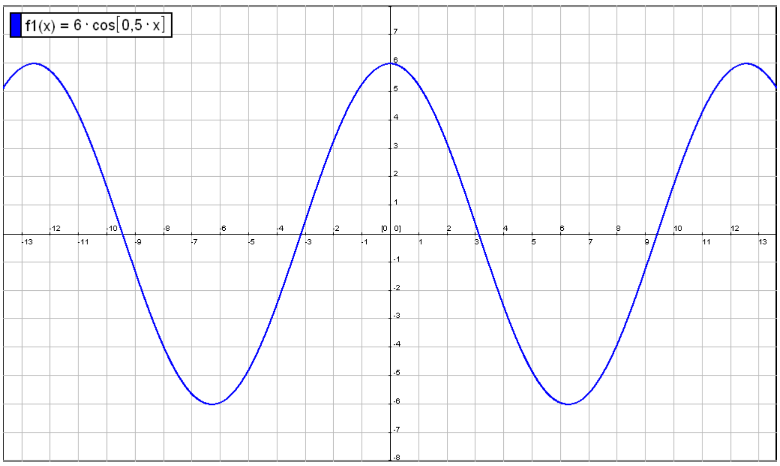
$$u_{(t)} = 2u_0 \sin\left(\overline{\omega} t\right) \cos\left(\omega_R t\right)$$

Pro blízké frekvence tedy platí: $\overline{\omega} >> \omega_R$

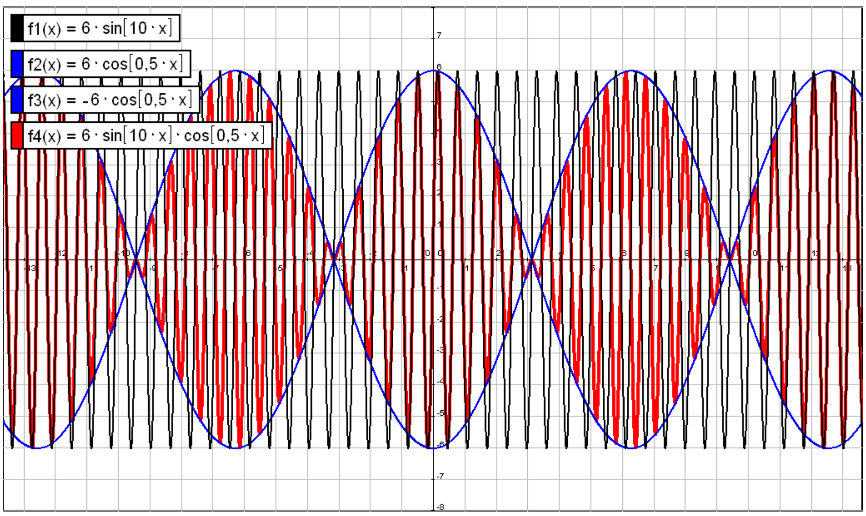
6.2.1 Graf $\sin\left(\overline{\omega} t\right)$



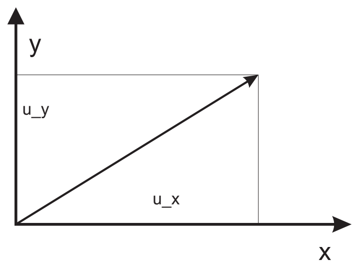
6.2.2 Graf $\cos(\omega_R t)$



6.2.3 Graf $sin(\overline{\omega} t)\cos(\omega_R t)$



6.3 Skládání kmitů ve dvou dimenzích



$$u_{x,(t)} = u_{0,x} \sin\left(\omega_1 t + \varphi_1\right)$$
$$u_{y,(t)} = u_{0,y} \sin\left(\omega_2 t + \varphi_2\right)$$

Zajímavé možnosti výsledků:

- $\omega_1 = \omega_2 \ldots$ Vzniklým obrazcem bude obecně obecná elipsa, ale také přímka, kružnice, elipsa v význačné poloze, obecné poloze (neboli "deformovaná elipsa")
- $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\text{Malé celé číslo}}{\text{Malé celé číslo}} \ldots$ vzniknou Lissajousovy obrazce:

7 Anharmonické oscilátory

7.1 Definice

Fyzikální vlastnosti harmonických oscilátorů: $F = -kx$; $E_p = V_x = \frac{1}{2}kx^2$

Pokud je *vratná síla* obecná funkce: $F_{(x)}$, pak je ji možné rozložit do Taylorova rozvoje:

$$F_{(x)} = F_0 + F_1x + F_2x^2 + F_3x^3 + F_4x^4 \dots$$

V tomto rozvoji vzhledem k fyzikálním zákonům a fyzikálnímu pozadí plati:

- $F_0 = 0$
- F_1x je část, která způsobuje harmonické kmitání a vyskytuje se *vždy*.
- $F_2x^2 + F_3x^3 + F_4x^4 \dots$ způsobují "rušení" harmonického průběhu kmitání vratné síly.

Obdobným postupem můžeme rozložit potenciální energii $V_{(x)}$:

$$V_{(x)} = V_0 + V_1x + V_2x^2 + V_3x^3 + V_4x^4 \dots$$

I v tomto rozvoji jsou jednotlivé části opodstatněné a zdůvodnitelné fyzikou:

- V_0 je nulová hladina potenciální energie, kterou si můžeme zvolit (rovnovážná poloha, těžiště tělesa, nehybný závěs, projíždějící rychlík, ...)
- V_1x je podmíněno $\left.\frac{\mathrm{d}V_{(x)}}{\mathrm{dx}}\right|_{x=0} = 0$
- V_2x^2 je harmonický člen funkce
- $V_3x^3 + V_4x^4 \dots$ opět neharmonické členy.

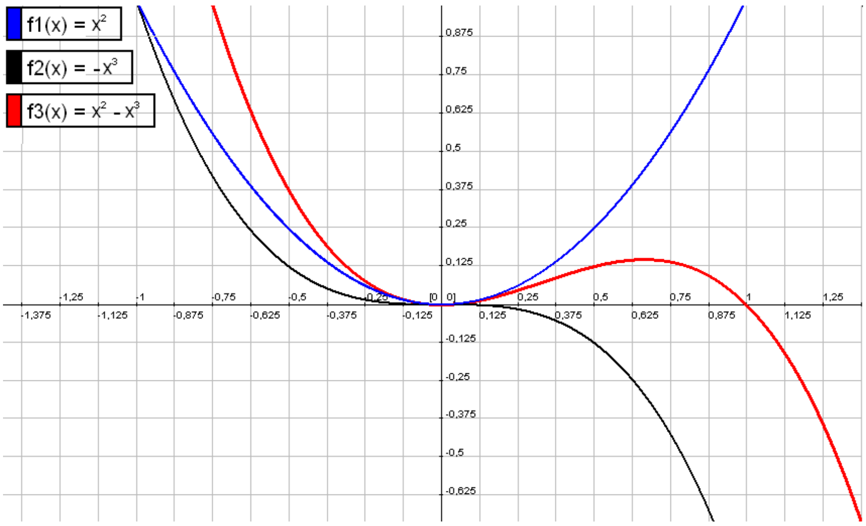
Závěr Libovolný oscilátor můžeme v dané aproximací v jistém okolí nahradit oscilátorem harmonickým.

7.2 Závislosti

Rozklad nabízí dvě možnosti:

7.2.1 První možnost

- $-kx +$ sudé mocniny x – síla
- $\frac{1}{2}kx +$ liché mocniny x – potenciální energie



Vlastnosti:

- Asymetrie $V_{(x)}$
- Minimální změna periody
- Změna střední hodnoty polohy

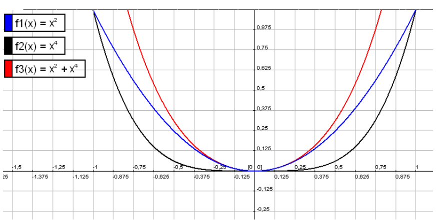
Příklad Příkladem by mohla být například chemická vazba $\Rightarrow$ Teplotní roztažnost materiálů . . .

7.2.2 Druhá možnost

- $-kx +$ liché mocniny x – síla
- $\frac{1}{2}kx +$ sudé mocniny x – potenciální energie

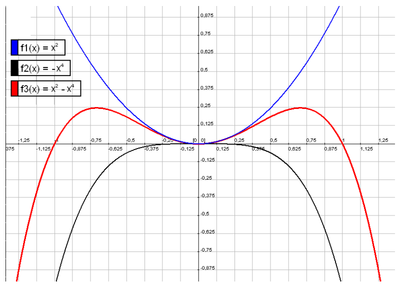
Máme zde dvě možnosti:
Takto se projeví, pokud bude:

kladná:



Tato síla se nazývá tvrdnoucí.
Zkrácení periody T

záporná:



Tato síla se nazývá měknoucí.
Prodloužení periody T

Vlastnosti:

- Symetrie $V_{(x)}$
- Změna periody
- stálá střední hodnota polohy

Příklad Příkladem je třeba nejzákladnější ze všech objektů, které se učí už na gymnáziu, neboli: *Matematické kyvadlo.*

Víme, že vratná síla je úměrná sinu α, neboli: $F \sim \sin\alpha$ a to tak, že $\sin\alpha \doteq \alpha$.

Ve Fourierově rozvoji se pak dostaneme k výrazu:

$$\sin\alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} - \frac{\alpha^5}{5!} - \frac{\alpha^7}{7!}\dots$$

$$T = T_0\left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\alpha_m}{2} + \frac{9}{64}\sin^2\frac{\alpha_m}{2} + \dots\right)$$

kde $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ a α_m ... úhlová amplituda výchylky.

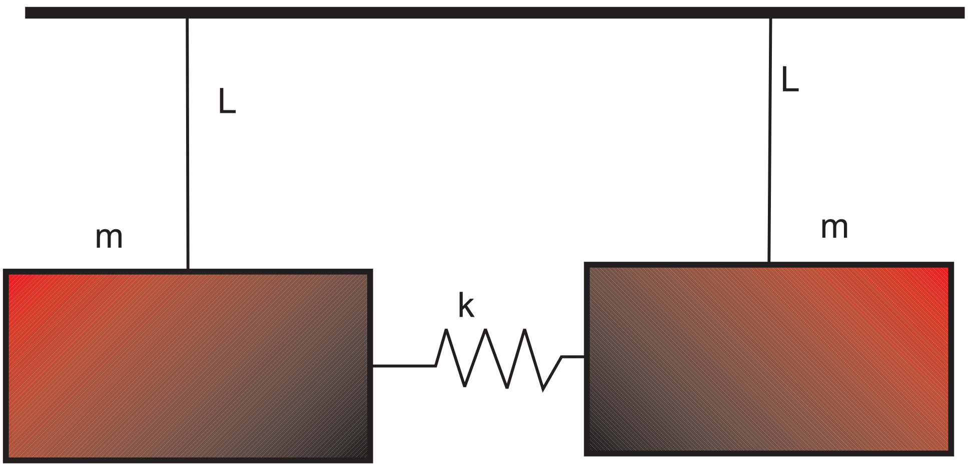
Pokud je $\alpha_m = 5°$ pak je chyba způsobená odlišností výrazu α od $T = T_0\left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\alpha_m}{2} + \frac{9}{64}\sin^2\frac{\alpha_m}{2} + \dots\right)$ asi $0,047\%$

Pokud je $\alpha_m = 10°$, poté je odchylka již $0,2\%$, čili řádově větší!

8 Vázané kmity

Vysvětleno v příkladě

8.1 Zadání



Máme dvě tělesa, matematická kyvadla, o hmotnosti m zavěšené na dvou závěsech délky l. Jedno těleso, nazývejme jej třeba těleso 1 jsme vychýlili do polohy x_0 v podélném směru. Jaké budou výsledné rovnice kmitání?

8.2 Rovnice

Pohybové rovnice pro každé těleso, pokud mezi nimi není pružina:

$$m\frac{d^2x_i}{dt^2} + \frac{mg}{l}x_i = 0 \dots i = 1,2$$

Pokud mezy tělesy je pružina, budou pro každé těleso vypadat rovnice jinak.

Těleso 1:

$$m\frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{mg}{l}x_1 = k\left(x_2 - x_1\right)$$

$$m\frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{mg}{l}x_1 - k\left(x_2 - x_1\right) = 0$$

Těleso 2:

$$m\frac{d^2x_2}{dt^2}+\frac{mg}{l}x_2=k\left(x_1-x_2\right)$$
$$m\frac{d^2x_2}{dt^2}+\frac{mg}{l}x_2-k\left(x_1-x_2\right)=0$$

Po zavedení následné substituce:

$$\frac{g}{l}=\omega_0^2$$

$$\frac{k}{m}=\omega_V^2$$

Získáme tvar:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}+\omega_0^2x_1-\omega_V^2\left(x_2-x_1\right)=0$$
$$\frac{d^2x_2}{dt^2}+\omega_0^2x_2-\omega_V^2\left(x_1-x_2\right)=0$$

Dalšími elementárními úpravami získáme tvary rovnic:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}+x_1\left(\omega_0^2+\omega_V^2\right)-\omega_V^2x_2=0$$

$$\frac{d^2x_2}{dt^2}+x_2\left(\omega_0^2+\omega_V^2\right)-\omega_V^2x_1=0$$

8.3 Převod normální souřadnice $\Leftrightarrow$ q_1, q_2

Odečtením a sečtením předešlých dvou rovnic získáme:

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(x_1+x_2\right)+\omega_0^2\left(x_1+x_2\right)$$
$$\frac{d^2}{dt^2}\left(x_1-x_2\right)+\omega_0^2\left(x_1-x_2\right)$$

Nyní máme již soustavu rovnic, které již nezávisí na dvou neznámých (x_1 A x_2) ale na jedné (x_1+x_2) resp. (x_1-x_2). Důležité je, že nové rovnice v normálních souřadnicích již mají odseparované proměnné, tedy nejsou závislé a řešíme je jako jednodimenzionální dva (nevázané) oscilátory!!!

Zavedeme si tedy substituci:
$x_1+x_2=q_1$ přičemž $x_1=\frac{q_1+q_2}{2}$
$x_1-x_2=q_2$ přičemž $x_2=\frac{q_1-q_2}{2}$

$\omega_0^2 + 2\omega_V^2 = (\omega')^2$

Rovnice se nám tedy zjednoduší do tvarů:

$$\frac{d^2 q_1}{dt^2} + \omega_0^2 q_1 = 0$$

$$\frac{d^2 q_2}{dt^2} + (\omega')^2 q_2 = 0$$

8.4 Výsledné rovnice vázaných kmitů

$$q_1 = q_{1;0} \sin(\omega_0 t + \varphi_1)$$

$$q_2 = q_{2;0} \sin(\omega_0 t + \varphi_2)$$

Význam koeficientů q_1 a q_2

- q_1 ... dvojnásobek výchylky těžiště soustavy z rovnovážné polohy
- q_2 ... vzájemná vzdálenost

8.5 Počáteční podmínky

Fyzik nemůže být spokojen, pokud nezná přesnou rovnici. A tu dosáhne počátečními podmínkami[3]. Směle tedy do nich.

$x_{1(t=0)} = x_0\,[m]$	$\left.\frac{dx_1}{dt}\right\|_{t=0} = 0\,[ms^{-1}]$
$x_{2(t=0)} = 0\,[m]$	$\left.\frac{dx_1}{dt}\right\|_{t=0} = 0\,[ms^{-1}]$

$q_{1(t=0)} = x_1 + x_2 = x_0 + 0 = x_0$
$q_{1(t=0)} = x_1 - x_2 = x_0 - 0 = x_0$
$\frac{dq_1}{dt} = 0$
$\frac{dq_2}{dt} = 0$
$\varphi_1, \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ ... Tato podmínka vzniká z nutnosti, že v čase $t = 0$ je maximální výchylka a nulová rychlosti.

Vzhledem k tomu, že jsou si $q_{1;0}$ a $q_{2;0}$ rovny, můžeme zapsat:

$q_{1;0} = q_{2;0} = x_0$

Rovnice se nám tedy značně zjednoduší:

[3]Tyto počáteční podmínky volíme proto, abychom popsali ukázaný experiment.

$$q_{1(t)} = x_0 \cos(\omega_0 t)$$
$$q_{2(t)} = x_0 \cos((\omega')\, t)$$

Z dřívějška víme, že

$$x_1 = \frac{q_1 + q_2}{2} = \frac{x_0}{2}\left(\cos \omega_0 t + \cos((\omega')\, t)\right)$$
$$x_2 = \frac{q_1 - q_2}{2} = \frac{x_0}{2}\left(\cos \omega_0 t - \cos((\omega')\, t)\right)$$

Pomocí součtových vzorců (ať žije Bartsch) zjistíme, že:

$$x_1 = x_0 \cos\left(\frac{\omega_0 + (\omega')}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_0 - (\omega')}{2} t\right)$$
$$x_2 = -x_0 \sin\left(\frac{\omega_0 + (\omega')}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_0 - (\omega')}{2} t\right)$$

Pokud si vzpomeneme na první substituce, tak za
$\omega^2 = \frac{g}{l}$ a poté taky $\omega_V^2 = \frac{k}{m}$, které snadno získáme ze vztahu $\omega_0^2 + 2\omega_V^2 = (\omega')^2$

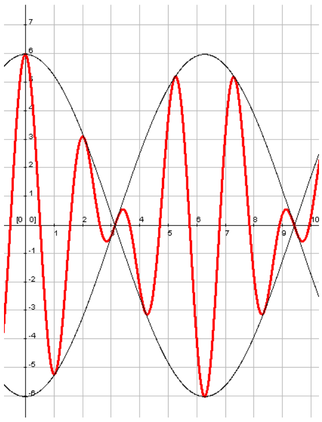
A protože je $\omega_0^2 >> \omega_V^2$ můžeme na základě $\omega_0^2 + 2\omega_V^2 = (\omega')^2$ říci, že ω' je velmi blízká ω_0

8.6 Závěr

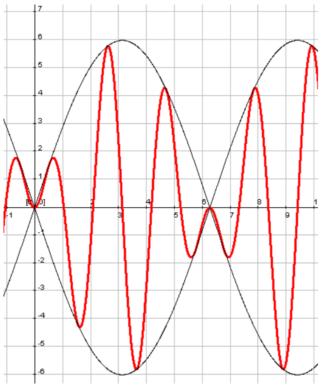
Máme-li tedy kmity s velmi slabou vazbou, poté se jedná o skládání kmitů *blízké frekvence.*

Chceme-li to graficky, tak pro tělesa 1 a 2 bychom měli tyto trajektorie:

Těleso 1



Těleso 2



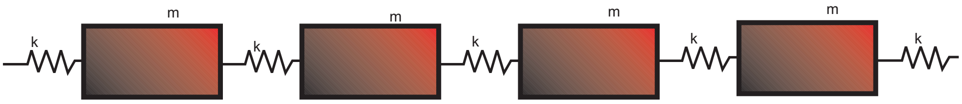
9 Kmitové módy

Kmitových modů je tolik, kolik je stupňů volnosti (ve fázi, v protifázi). Když se tělesa můžou kývat jen v jedné možné ose, existují 2 kmitové mody. Oba se budou kývat ve fázi a v protifázi.

Jakýkoli kmit je následně jen lineární kombinací kmitových modů.

Když částice kmitají ”normálními kmity”, tak všechny částice kmitají se stejnou frekvencí.

10 Kmity soustav s mnoha stupni volnosti



Libovolnou částici si označíme jako částici p. Okolní částice budiž $p \pm 1$, $p \pm 2$, $p \pm 3$ a tak dále.

Vytvoříme tedy pohybovou rovnici pro částici p

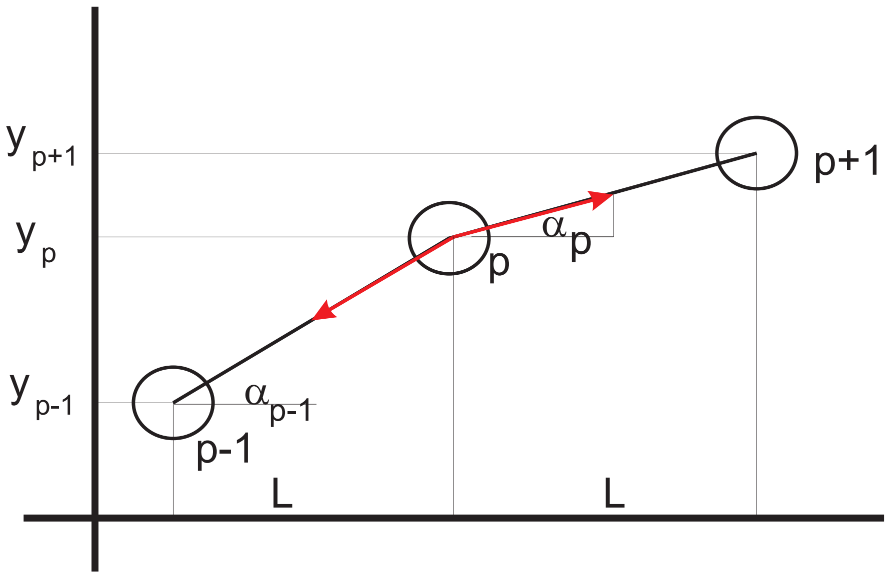
$$m\frac{d^2x_p}{dt^2} = -k\left(x_p - x_{p-1}\right) - k\left(x_p - x_{p+1}\right) = k\left(x_{p-1} + x_{p+1} - 2x_p\right)$$

po úpravě získáme:

$$\frac{d^2x_p}{dt^2} - \omega_0^2\left(x_{p-1} + x_{p+1} - 2x_p\right) = 0$$

Což je vlastně rovnice pro případ podélných kmitů.

Pokud budeme mít soustavu, kde mezi jednotlivými body p nejsou "gumičky", ale pevné spojení (např. řetěz). Ten chytneme někde za článek p, napneme a pustíme. Jaké síly zde budou figurovat? Podívejme se na obrázek:



$$|F_1| = |F_2| = F$$

Ve směru osy y:

$$F_y = f_{(y,p)} - F_{(y,p-1)}$$
$$F_y = F \cdot \sin \alpha_p - F \cdot \sin \alpha_{p-1}$$
$$\tan \alpha_{p-1} = \frac{y_p - y_{p-1}}{l} \text{ pro malé úhly nám tan přejde v sin}$$
$$\tan \alpha_{p-1} = \frac{y_p - y_{p-1}}{l} = \sin \alpha_{p-1}$$
$$\tan \alpha_p = \frac{y_{p+1} - y_p}{l} = \sin \alpha_p$$

Nyní již tedy máme vše, co potřebujeme k získání výslednice sil působení na bod p:

$$m\frac{d^2 y_p}{dt^2} = \frac{F}{l}\left(y_{p+1} - y_p - y_p + y_{p-1}\right)$$
$$\frac{d^2 y_p}{dt^2} = \frac{F}{ml}\left(y_{p+1} + y_{p-1} - 2y_p\right)$$

Řešením této diferenciální rovnice získáme:

$$y_{p,(t)} = C \sin\left(p\Theta + \Phi\right) \cdot \sin\left(\omega t + \varphi\right)$$

$C \sin\left(p\Theta + \Phi\right)$ můžeme chápat jako amplitudu, která je funkcí polohy.

Musíme ještě doplnit *okrajové podmínky*:

Máme-li řetěz o N článcích, tak jej musíme na koncích ukotvit. Takže bude platit, že výchylka nultého členu (který bude odpovídat místu uchycení) bude nula. Stejně tak i na druhé straně členu $N + 1$.

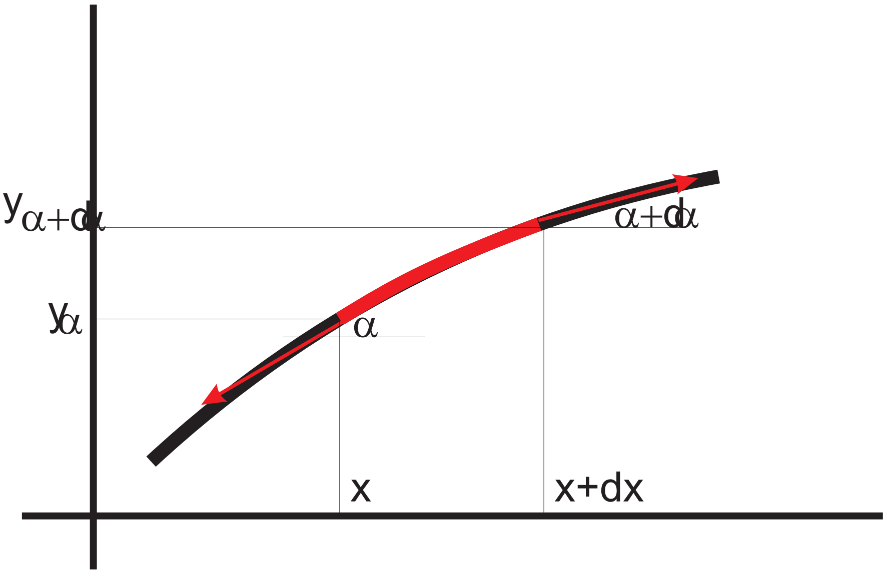
$y_{0;(t)} \equiv 0 \Rightarrow \Phi = 0$

$y_{N+1;(t)} \equiv 0 \Rightarrow \left(N + 1\right)\Theta = n\pi \Rightarrow \Theta = \frac{n\pi}{N+1}$

11 Kmity systému se spojitě rozloženou hmotou

11.1 Přechod od diskrétního do spojitého rozložení hmoty

Za příklad si vezmeme strudu o délkovém elementu dm



Budeme postupovat analogicky s ”Kmity soustav s mnoha stupni volnosti”, čili si určíme síly, které působí na dva konce délkového elementu dm.

$$F_y = F\sin(\alpha + d\alpha) - F\sin\alpha = F(\alpha + d\alpha - \alpha)$$

Nyní si definujeme lineární hustotu μ jako podíl hmotnosti ku délce: $\mu = \frac{m}{l}$

$$\mu \mathrm{d}x \frac{\mathrm{d}^2 y_{(t)}}{\mathrm{d}t^2} = F \mathrm{d}\alpha_{(t)}$$

$\mu \mathrm{d}x$ si definujeme jako element hmotnosti dm

$$\mathrm{d}m \frac{\mathrm{d}^2 y_{(t)}}{\mathrm{d}t^2} = F \mathrm{d}\alpha_{(t)}$$

ale s tímto tvarem (s dm) počítat nebudeme. Zaměřme se na jiný problém:

Jak se nyní zbavíme d$\alpha_{(t)}$, neboli jak celou rovnici převedeme na rovnici o jedné proměnné x?

$$\tan\alpha = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{\partial y}{\partial x}$$

$$\frac{1}{\cos^2\alpha}\mathrm{d}x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}x = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\mathrm{d}x$$

Dosadíme:

$$\mu\mathrm{d}x\frac{\mathrm{d}^2 y_{(t)}}{\mathrm{d}t^2} = F\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\mathrm{d}x$$

dx se nám vykrátí a zůstane:

$$\mu\frac{\mathrm{d}^2 y_{(t)}}{\mathrm{d}t^2} = F\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Po úpravě dostaneme *vlnovou rovnici*:

11.2 Vlnová rovnice

$$\frac{\mathrm{d}^2 y_{(t)}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{F}{\mu}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

A toto je *vlnová rovnice*. Můžeme říci, že když dostaneme jakoukoli neznámou v pozici y, bude se šířit prostorem a časem jako vlna!!!

Dále $\frac{F}{\mu} \equiv v^2 \left[\frac{m^2}{s^2}\right]$ si definujeme jako *fázovou rychlost vlny.*

Řešením tedy bude tvar:

$$y_{(x,t)} = f_{(x)}\sin(\omega t + \varphi)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -f_{(x)}\omega^2\sin(\omega t + \varphi)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mathrm{d}f_{(x)}}{\mathrm{d}x^2}\omega^2\sin(\omega t + \varphi)$$

$$-f_{(x)}\omega^2\sin(\omega t + \varphi) = v^2\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}\sin(\omega t + \varphi)$$

$\sin(\omega t + \varphi)$ se vykrátí a po snadné úpravě dostaneme:

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\omega^2}{v^2} f_{(x)} = 0$$

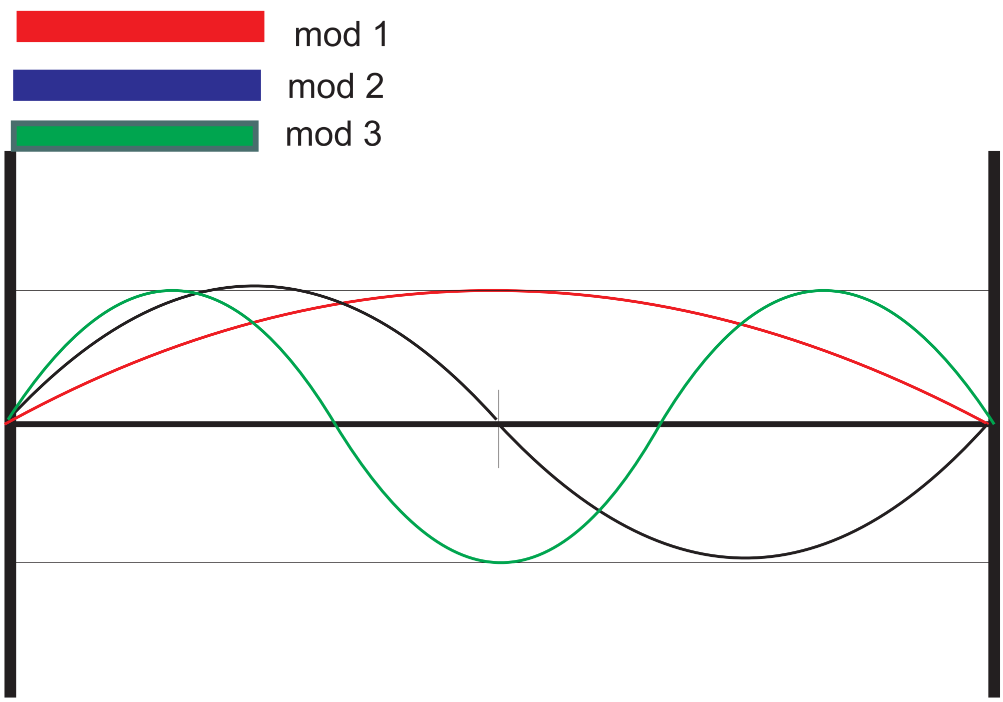
Tuto rovnici snadno vyřešíme:

$$f_{(x)} = A \sin\left(\frac{\omega}{v} x + \Phi\right)$$

K určení konstant opět využijeme stejné okrajové podmínky:
$f_{(0)} = 0 \Rightarrow \Phi = 0$
$f_{(x=L)} = 0 \Rightarrow \frac{\omega}{v} L = \pi n \Rightarrow \omega_n = \frac{\pi n}{L} v$
Toto vše tedy dosadíme do rovnice pro výchylku a dostaneme:

$$y_{n(x,t)} = A \sin\left(\frac{\omega_n}{v} x\right) \cdot \sin\left(\omega_n t + \varphi\right)$$

kde n značí pořadí kmitového módu.



$\omega_1 = \frac{\pi}{L} v$ $\omega_2 = \frac{2\pi}{L} v$ $\omega_3 = \frac{3\pi}{L} v$ $\omega_n = \frac{n\pi}{L} v$

12 Kmity ve 2 dim, membrány a desky

$$u_{(x,y,t)}$$

Výchylka $u_{(x,y,t)}$ je funkcí prostorových souřadnic x, y a časové souřadnice t.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

Část II
Vlnění

13 Definice vlny a vlnoplochy, vlnoplochy v prostoru

13.1 Vznik postupné vlny

$$u_{(x,t)} = u_0 \sin \omega \left(t - \tau\right)$$

kde $\tau = \frac{x}{v}$ a nazývá se časové zpoždění.

$$u_{(x,t)} = u_0 \sin \omega \left(t - \frac{x}{v}\right)$$

Vlny jsou tedy závislé na dvou parametrech a to na čase t, stejně jako kmity, ale i na vzdálenosti x.
Pokračujme tedy v úpravách a získáme:

$$u_{(x,t)} = u_0 \sin \left(2\pi \frac{t}{T} - \frac{2\pi x}{T \cdot v}\right)$$

Definujeme $\omega = \frac{2\pi}{T}$ a $\lambda = T \cdot v$. Následně definujeme vlnové číslo k a to vztahem: $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

Pro jednodimenzionální prostor tedy získáváme vztah:

$$u_{(x,t)} = u_0 \sin \left(\omega t - kx\right)$$

13.2 Šíření vlny v prostoru

Viz. obrázek 1

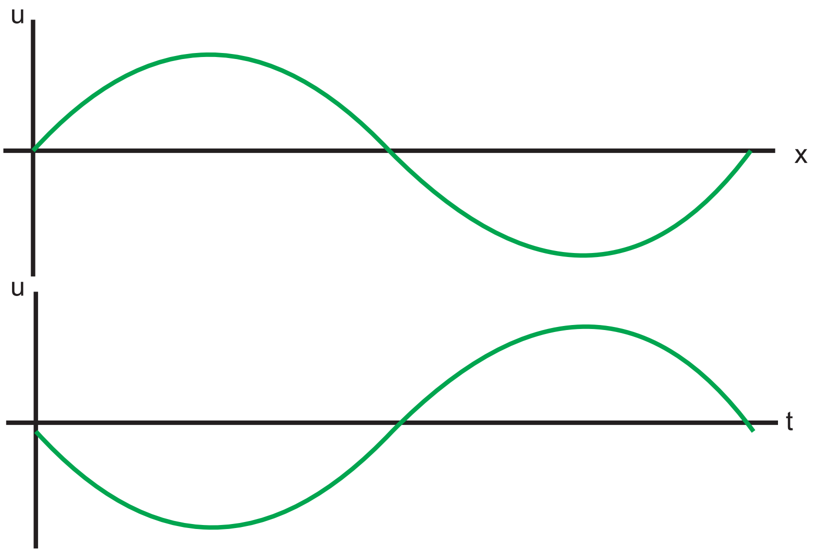
13.3 Vlnoplocha

Geometrické místo bodů stejné fáze (viz. obr. 2)

$$\omega t - kx = \text{konstantní}$$

$$x = \frac{1}{k} \left(\omega t - \text{konst.}\right)$$

$$x = v \cdot t$$



Obrázek 1: Šíření vlny po přímce v závislosti na vzdálenosti a na čase

Definujeme fázovou rychlost v jako:

$$v = \frac{\omega}{k}$$

13.4 Rovinná vlnoplocha v prostoru

$\vec{s}\ldots$ směr paprsku.
$|\vec{s}| = 1$
Více na obrázku 3

$$u_{(\vec{r},t)} = u_0 \sin \omega \left(t - \tau\right)$$

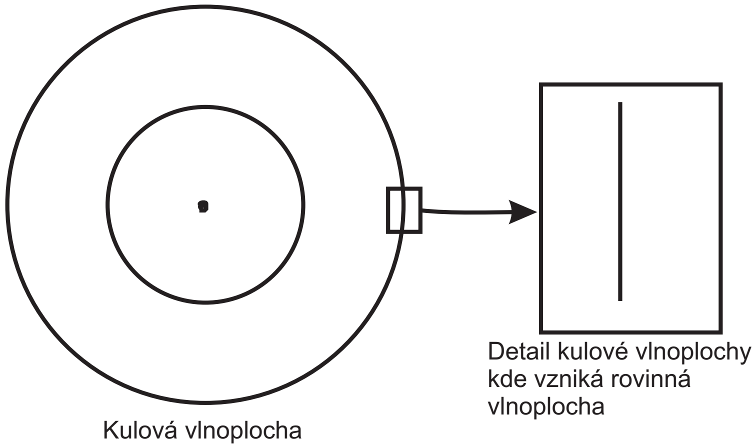
Z obrázku 3 plyne, že $\tau = \frac{\Delta}{v}$

$$u_{(\vec{r},t)} = u_0 \sin \omega \left(t - \frac{\Delta}{v}\right)$$

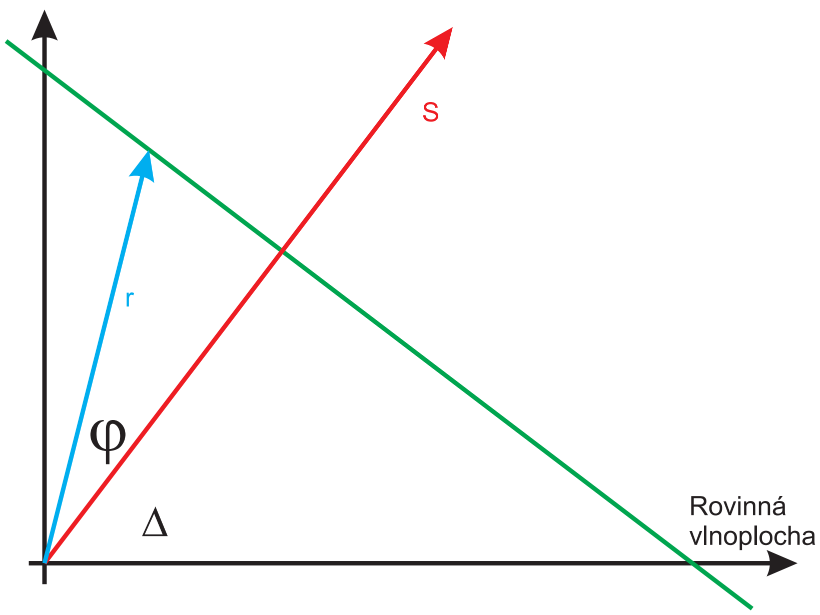
$$u_{(\vec{r},t)} = u_0 \sin \omega \left(t - \frac{\vec{r}\vec{s}}{v}\right)$$

A opět se odvolám na obrázek 3, když napíšu:

$$\vec{r}\vec{s} = |\vec{r}| \cdot |\vec{s}| \cos \varphi =$$



Obrázek 2: Grafické znázornění vlnoplochy kulové a rovinné



Obrázek 3: Rovinná vlnoplocha v prostoru

Pamatujte, že $|\vec{s}| = 1$

$$= \vec{r}\cos\varphi = \Delta$$

$$u_{(\vec{r},t)} = u_0 = \left(\omega t - \frac{2\pi\vec{r}\vec{s}}{T \cdot v}\right)$$

$$u_{(\vec{r},t)} = u_0 = \left(\omega t - \frac{2\pi\vec{s}}{\lambda}\vec{r}\right)$$

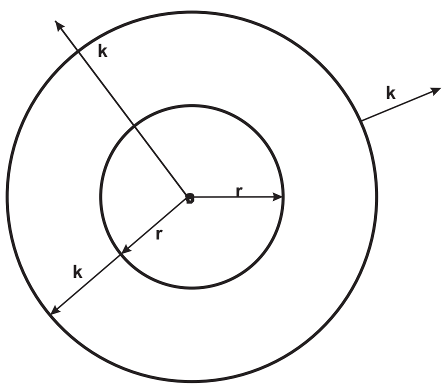
Definujeme vlnový vektor $\vec{k}$ jako vektor o velikosti $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ a ve směru paprsku.

Rovnice rovinné vlny:

$$u_{(\vec{r},t)} = u_0 \sin\left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}\right)$$

13.5 Kulová vlnoplocha v prostoru

S ohledem na kulovou symetrii (viz. obrázek 4) nemá smysl vektor $\vec{k}$ vůbec definovat.



Obrázek 4: Kulová vlnoplocha v prostoru

$\left|\vec{k}\right|$ má danou hodnotu

$\vec{k}||\vec{r}$

Můžeme tedy napsat rovnici pro kulovou vlnoplochu v prostoru:

$$u_{(r,t)} = \frac{u_0}{r} \sin\left(\omega t - k \cdot r\right)$$

Definujeme veličinu, kterou budeme nazývat intenzita I

$$\text{intenzita} = \frac{\text{tok}}{\text{plocha}}$$

Intenzita je tedy úměrná druhé mocnině amplitudy: $I \sim u_0^2$

14 Huygensův princip

Tento princip nám říká jen obecně co máme udělat, abychom věděli, jakým způsobem se bude šířit vlna v prostoru.

Již nic se z něj nedozvíme o tom, jak máme něco počítat.

14.1 Huygensův princip:

Představme si, že každý bod vlnoplochy je elementárním zdrojem elementární kulové vlnoplochy.

Vlnoplocha za čas Δt bude obálkou všech takto vzniklých elementrárních vlnoploch.

Předpokládá, že v každém okamžiku lze každý bod na čele šířící se vlny chápat jako nový zdroj vlnění (sekundárních vln). Nový tvar čela vlny v čase o malý okamžik pozdějším lze pak určit jako vnější obálku vln, šířících se z těchto zdrojů.

14.2 Chybka?

Huygensův princip není zcela správný, neboť podle něj by se například vlna procházející vzduchem či vodou ze všech bodů vracela zpět do zdroje, aniž by se odrazila od nějaké překážky. Upřesněný Huygensův-Fresnelův princip doplňuje původní představu o interferenci sekundárních vln a zavádí tzv. inklinační faktor K.

Opravený princip by tedy zněl: Každý bod vlnoplochy, do něhož postupné vlvnění v izotropním prostředí dospělo v určitém okamžiku, můžeme pokládat za zdroj elementárního vlnění, které se z něho šíří v elementárních vlnoplochách. Vlnoplocha v dalším časovém okamžíku je vnější vlnoplocha všech elementárních vlnoploch ve směru, ve kterém se vlvnění šíří.

Díky Huygensovu principu můžeme zkonstruovat vlnoplochu v určitém okamžiku, je-li známá její poloha a tvar v některém předcházejícím okamžiku. Lze také podle něj odvodit princip odrazu a lomu vlnění

14.3 Trochu o Huygensovi

Převzato z http://cs.wikipedia.org

Christian Huygens (14. dubna 1629, Haag – 8. června 1695, Haag) byl význačný holandský matematik, fyzik a astronom. Na jeho objevy přímo navazovala práce Isaaca Newtona.

Narodil se ve vážené haagské rodině. Už během svých studií na univerzitě publikoval práce, které lze považovat za základy počtu pravděpodobnosti.

V roce 1665 se v Londýně stal členem učené Královské společnosti (Royal Society). Na pozvání krále Ludvíka XIV. přišel v roce 1666 do Paříže, kde se stal zakládajícím členem Královské akademie věd (Academie Royale des Sciences), jejímž členem byl až do roku 1681. V Akademii se seznámil a spolupracoval s Giovanni Cassinim (znáte sondu Cassini?). V roce 1686 jako protestant uprchl před pronásledováním z Francie do Nizozemska. V roce 1689 navštívil Anglii, kde se seznámil s Isaacem Newtonem. Posléze se uchýlil do rodného Haagu, kde také zemřel.

Huygensovy objevy ovlivnily celou řadu fyzikálních oborů.

V roce 1657 uveřejnil sdělení o svém vynálezu kyvadlových hodin s netlumeným pohybem kyvadla, používaných dodnes. Sestrojil je roku 1655 a podrobně popsal ve spisu Horologium oscillatorium v roce 1673. Nezávisle na Angličanu Hookovi vynalezl i hodinový nepokoj. Zobecnil také zákony otáčivého pohybu (zavedení pojmu moment setrvačnosti), objevil zákon zachování momentu hybnosti (1656), zkoumal zákony rázu těles a odstředivé síly (1659).

Od roku 1652 se také věnoval optice, dalekohledům a mikroskopům. Zkonstruoval po něm pojmenovaný dvoučočkový okulár a postavil několik velkých dalekohledů s ohniskovou délkou až 75 metrů. V roce 1659 popsal skutečný tvar Saturnových prstenců (1659 v práci Systema Saturnium), objevil jeho měsíc Titan (25. března 1655), popsal emisni mlhovinu dnes nazývanou Velká mlhovina v Orionu (M-42) v souhvězdí Oriona a postupně našel i čtyři jasné hvězdy (tzv. Trapez čili Lichoběžník) v této mlhovině, které tuto mlhovinu svým světlem ozařují. Jako první pozoroval polární čepičky na Marsu a objevil velký tmavý útvar v rovníkové oblasti Marsu, dnes nazývaný Syrtis Major. V mikroskopii objevil metodu pozorování na temném pozadí.

Popsal vlnové vlastnosti světla (1678) a zavedl pojem éter. I když se éterová teorie ukázala později chybnou, ovlivnila na několik set let fyzikální uvažování. Huygensův princip je dodnes platný pro všechny druhy šíření vln.

Na konci života navázal v práci Cosmotheros (vydán 1698) na myšlenky Giordana Bruna o možnosti mimozemského života.

15 Vlnová rovnice podruhé

Asi si říkáte, že už jsme se o ní jednou bavili (ano, část 11.2). Podívejme se ale na ni ještě jednou, lépe a radostněji:

- V jedné dimenzi by vlnová rovnice vypadala následovně:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

- S počtem dimenzí se nám rovnice komplikuje:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

  přičemž $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ se zkráceně zapisuje jako La Placeův operátor $\nabla^2 = \triangle$

  Celý zápis tak můžeme zkrátit na:

$$\triangle u = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

16 Polarizace vlny

$$\vec{u}_{(\vec{r},t)} = \vec{u_0} \sin\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right)$$

Podélné vlnění je $\vec{u}||\vec{k}$
Příčné vlnění je, pokud $\vec{u}\perp\vec{k}$

16.1 Příklad

Vlna ve směru osy z (podélná vlna)

$$\vec{k} = (0, 0, k)$$

$$u_{(\vec{z},t)} = u_0 \sin\left(\omega t - k \cdot z\right)$$
$$\vec{u} = (0, 0, r)$$

Příčná vlna

$$\vec{u} = (u_x, u_y, 0)$$

$$u_x = U_{(x,0)} \sin\left(\omega t + \varphi_1\right)$$
$$u_y = U_{(y,0)} \sin\left(\omega t + \varphi_2\right)$$

Když vyřešíme parametrickou rovnici (výše), získáme několik možností tvarů:

- Úsečka – lineárně polarizované
- Kružnice – kruhově polarizované
- Elipsa – elipticky polarizované

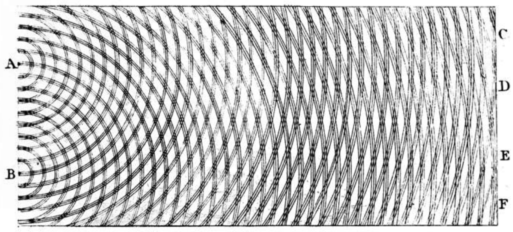
17 Interference vln

Interference se též nazývá sládání nebo superpozice.

Některé věci jsou shodné se skládáním kmitů (kap. 6). Ovšem některé jevy se ve kmitech vyskytovat nemůžou (vzhledem k tomu, že nezávisí na délce x, resp. nemají žádný prostorový parametr). Jde o dva jevy:

17.1 Interference na dvojštěrbině

Obrázek (třeba 5) vydá za tisíc slov.



Obrázek 5: Interference na dvojštěrbině

17.2 Dráhový posuv

Máme-li dva bodové zdroje z_1, z_2 (obrázek **??**), které kmitají ve fázi ve vzájemné vzdálenosti d, tak se vznění bude skládat.

Obrázek 6: Dráhový posuv

Fázi vlny spočítáme z $\omega t - kx$
$\Delta\varphi = k \cdot d = \frac{2\pi}{\lambda} d$ a taky $\Delta\varphi = 2k\pi$
$2k\pi = \frac{2\pi}{\lambda} d$
$d = k\lambda$

17.3 Interference v opačném směru

Co se bude dít, když budeme mít dvě vlny, které půjdou proti sobě? Když si napíšeme rovnice každé z vln, získáme:

$$u_1 = u_0 \sin(\omega t - kx)$$
$$u_2 = u_0 \sin(\omega t + kx)$$

Pro jednoduchost jsme si určili, že amplitudy budou stejné.
Výslednou vlnu získáme součtem vln:

$$u = u_1 + u_2$$

S použitím matematických goniometrických součtových vzorců získáme:

$$u_{(x,t)} = u_0 \cdot \cos kx \cdot \sin \omega t$$

Tato rovnice se nazývá rovnicí stojaté vlny, která se vyznačuje několika prvky: $u_0 \cdot \cos kx$ je amplituda, která je závislá na vzdálenosti x

$$u_0 \cdot \cos kx = u'_{0,(x)}$$

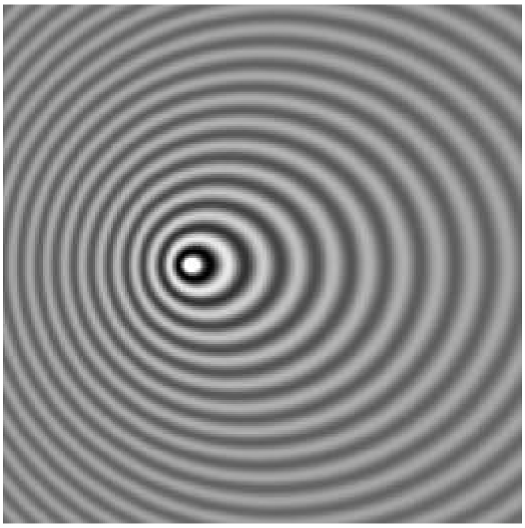
$u'_{0,(x)} \ldots$ min se nazývá uzel.
$u'_{0,(x)} \ldots$ max se nazývá kmitna.

18 Dopplerův jev

18.1 Historie, popis

Dopplerův jev popisuje změnu frekvence a vlnové délky přijímaného oproti vysílanému signálu, způsobenou nenulovou vzájemnou rychlostí vysílače a přijímače.

Jev byl poprvé popsán Christianem Dopplerem v roce 1842 v monografii *Über das farbige Licht der Doppelsterne und einige andere Gestirne des Himmels.*

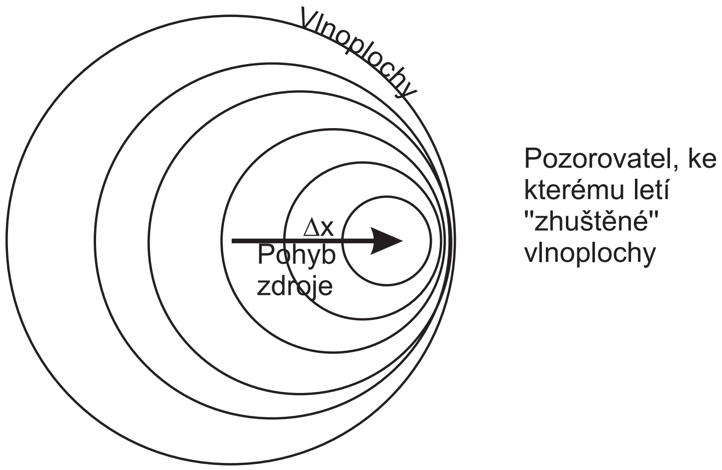


Obrázek 7: Zdroj vln se pohybuje doleva. Frekvence vlevo je vyšší než pravo.

Pro vlny (například zvukové), které se šíří v prostoru, je rychlost pozorovatele a zdroje pozorována relativisticky vzhledem k prostředí, ve kterém se zvuky šíří. Pokud rychlost šíření vlny není závislá na prostředí, ve kterém se šíří (například gravitace), resp. pokud se šíří vlny s podle speciální teorie relativity (světlo), poté se uvažuje pouze vzájemná rychlost pozorovatele a zdroje.

Jedním z nejběžnějších příkladů, jak lze Dopplerův jev pozorovat, je změna výšky tónů vydávaných sirénou na vozidle projíždějícím okolo pozorovatele (viz obrázek 9). Dopplerova jevu využívá řada měřicích přístrojů a zařízení, např. radary pro měření rychlosti vozidel nebo lékařské sonografy.

V astronomii se Dopplerův jev projevuje posuvem spektrálních čar vyzařovaných vesmírnými tělesy; pokud se tato tělesa vzdalují od Země, lze pozorovat takzvaný rudý posuv (viz. obrázek 10).



Obrázek 8: Při posunutí zdroje o Δx se mění střed vlnoploch. Pozorovatel tedy zaznamenává maxima vlny "častěji", než skutečně přicházejí, neboli zaznamenává vyšší frekvenci.

18.2 Přijde-li na řadu matematika

A jak by celý problém vypadal z pohledu fyzika-matematika? Podívejme se na obrázek 8. Nyní budu všechny veličiny spojené s pozorovatelem označovat indexem p a se zdrojem indexem 0.

$$\lambda_p = \frac{v-u}{f_0}$$

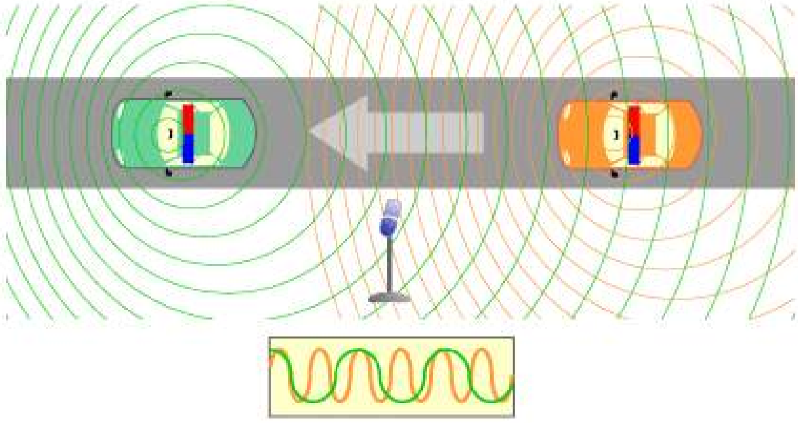
Hned v první rovnici se nám vyskytly hodnoty s dosud neuvedeným významem. Proto dodám, že:
v je rychlost šíření vlny
u je rychlost zdroje přičemž:

- $u > 0$ zdroj se blíží k pozorovateli
- $u < 0$ zdroj se od pozorovatele vzdaluje

$$f_p = \frac{1}{\lambda_p} v = \frac{v}{v-u} f_0$$

Podobnou transformaci můžeme provést i pro pohyb pozorovatele w, přičemž

- $w < 0$ pozorovatel se blíží ke zdroji



Obrázek 9: Dvě sirény na autech vydávají tón o stejné výšce. Zelené auto se vzdaluje od pozorovatele (mikrofon), který zvuk jeho sirény vnímá jako nižší; naopak oranžové auto se k němu přibližuje a zvuk jeho sirény je pro pozorovatele vyšší.

- $w > 0$ pozorovatel se od zdroje vzdaluje

  Pak tedy můžeme napsat:

$$f_p = \frac{v - w}{v} f_0$$

  Pokud oba vzorce spojíme v jeden, poté získáme:

$$f_p = f_0 \frac{v - w}{v - u}$$

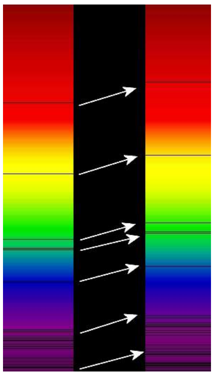
18.3 A co teprve, pozastavíme-li se nad relativitou

A co se bude dít, pokud se zdroj bude pohybovat rychleji než je rychlost šíření vlny v prostoru? Zde již zapojíme i teorii relativity, ale nebojte, odvozování necháme asi na jindy. Výsledkem bude vzoreček[4]:

$$f = f_0 \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}}$$

kde c je rychlost světla ve vakuu a v je vzájemná rychlost zdroje a pozorovatele. Zlomek $\frac{v}{c}$ se často nahrazuje $\frac{v}{c} = \beta$. Získáme tedy

[4]tento vzoreček platí pro přibližování se. Pokud by se zdroj s pozorovatelem vzájemně oddalovali, tak bychom museli vyměnit znaménka + a −



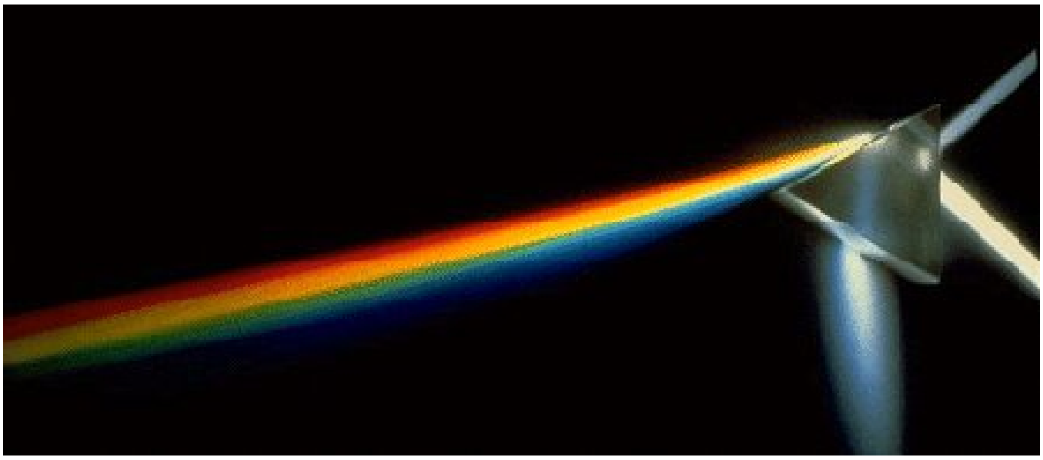
Obrázek 10: Rudý posuv spektrárních čas optického spektra kupy vzálených galaxií (pravý diagram) ve srovnání se Sluncem (levý diagram)

$$f = f_0 \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

19 Šíření neharmonických vln, disperze

19.1 Disperze

Pokud rychlost šíření vlny závisí na vlnové délce λ, event. frakvenci f je tento jev nazýván disperzí.



Obrázek 11: Disperze světelného paprsku na hranolu

19.2 Grupová rychlost

Definujme si grupovou rychlost v_g jako rychlost, kterou se šíří celé vlnové klubko (připomeňme si, že to je ta červená část v obrázku z kapitoly 6.2.3, resp. že na zmíněném obrázku je 5 vlnových klubek). Tato rychlost nikdy nepřesáhne rychlost světla. Vlnovým klubkem se přenáší veškerá energie, chcete-li informace. Můžeme říct, že i jeden foton je jistým vlnovým klubkem (má (i) vlnový charakter, vlnovou délku, frekvenci. . .)

19.3 Fázová rychlost

Vedle grupové rychlosti v_g definujeme i fázovou rychlost v, která udává, jakou rychlostí se šíří fáze vlny v rámci vlnového klubka. Fázová rychlost může být vyšší nežli rychlost světla, ale to nic neznamená, neboť pro předání informace je třeba přenést celé vlnové klubko.

19.4 $v_g + v$ aneb Vlny všech zemí, spojte se!

Spojení grupové a fázové rychlosti se dá přepsat do interference vln blízké frekvence. Pro jednoduchost si představme, že amplitudy u_1 a u_2 jsou shodné a $u_1 + u_2 = u_0$. Pro obrázek se podívejte do kapitoly 6.2.3.

$$u_{(x,t)} = u_0 \sin(\omega_1 t - k_1 x) + u_0 \sin(\omega_2 t - k_2 x)$$

Použijeme krásy součtových vzorců a získáme:

$$u_{(x,t)} = u_0 \cdot \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t - \frac{k_1 - k_2}{2} x\right) \cdot \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t - \frac{k_1 + k_2}{2} x\right)$$

$$u_{(x,t)} = u_0 \cdot \cos(\Delta\omega t - \Delta k x) \cdot \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t - \frac{k_1 + k_2}{2} x\right)$$

kde člen $\cos(\Delta\omega t - \Delta k x)$ definuje vnější obálku vlnového balíku. Přímo člen $\Delta\omega t - \Delta k x$ poté určuje grupovou rychlost v_g. A jak?

$$x = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} t - konst.$$

$$\text{grupová rychlost: } v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}$$

19.5 Nedisperzní prostředí

Jak takové prostředí poznáme? Na první pohled asi nikoli (voda to není). Ale budeme-li už počítat, dojdeme k závěru, že nedisperzní prostředí se bude chovat podle předvídatelného vztahu:

$$v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = v$$

Neboli že grupová rychlost bude shodná s fázovou rychlostí.

20 Dotřetice všeho dobrého, aneb vlnová rovnice

Už zase? Tentokrát si ukážeme jak se řeší… aspoň náznaky… ať to máme pohromadě.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Pohybujeme-li se v 3dimm prostředí, musíme použít:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

přičemž $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ se zkráceně zapisuje jako La Placeův operátor $\nabla^2 = \triangle$

Takže zkrácenně:

$$\triangle u = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

no a budeme-li minimalističtí, bude možno použít

$$\Box u = 0$$

Ale nic se nemá přehánět, takže my zůstaneme hezky u $\triangle u = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ a budeme se dívat, co se s tím dá vyvádět:

Možná řešení jsou 2:

1. $u = A\sin(\omega t - kx)$
2. $u = A\sin\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}\right)$

kde $k = \frac{2\pi}{\lambda}$… vlnové číslo, pamatujete? a
$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$

A nyní si ukážeme různé ekvivalentní vyjádření první rovncice:

- $u = A\sin(\omega t - kx)$
- $u = A\sin 2\pi\left(ft - \frac{x}{\lambda}\right)$
- $u = A\sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda}\right)$
- $u = A\sin\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{\lambda t}{T} - x\right)$
- $u = A\sin k\,(tv - x)$

- Nebo se dá taky udělat tento přechod:
- $u = A \sin 2\pi \left(ft - \frac{x}{\lambda} \right)$
- $u = A \sin \omega \left(t - \frac{x}{\lambda f} \right)$
- $u = A \sin \omega \left(t - \frac{x}{\tau} \right)$

Přičemž všechny rovnice zde uvedené jsou si vzájemně ekvivalentní(!)

20.1 Příklad:

Vlnění je popsáno rovnicí:

$$y = 3 \cdot 10^{-3}\,[m] \sin\left(0,25\pi t\,[s] - 50\pi x\,[m]\right)$$

Určete:

- Amplitudu: $A = 3 \cdot 10^{-3}$
- Frekvenci: $f = \frac{\omega}{2\pi} = 0,125 Hz$
- Periodu: $T = \frac{1}{f} = 8s$
- Vlnovou délku: $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{50\pi} = 0,04m$
- Rychlost šíření:
  - $v = \frac{\lambda}{T} = \frac{0,04}{8} = 0,005 ms^{-1}$
  - $v = \frac{\omega}{k} = \frac{0,25\pi}{50\pi} = 0,005 ms^{-1}$

20.2 Důkaz ekvivalece jednotlivých rovnic

Dokažte, že $u_{(x,t)} = u(\omega t - kx)$ je řešením vlnové rovnice.

Vlnová rovnice:

$$\frac{\partial^2 u_{(x,t)}}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u_{(x,t)}}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u' k(\omega t - kx)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u'' k^2(\omega t - kx)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u' \omega(\omega t - kx)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = u' \omega^2(\omega t - kx)$$

$$\frac{\omega^2}{v^2} = k^2$$

$$k^2 u''(\omega t - kx) - k^2 u''(\omega t - kx) = 0$$

$$0 = 0$$

21 Nelineární vlny, zvuk

21.1 Nelineární vlny

Nelinearita existuje u všech podélných vlnění, pokud je amplituda dostatečně velká.

Ehm, dobře, takže teď víme, kde *to* hledat, ale ještě je třeba definovat, co to *to* vlastně je. Některých věcí se zřejmě nezbavíme. Mezi jednu takovou patří i vlnová rovnice, takže neuškodí si ji zopakovat:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Nyní můžeme napsat tyto dvě rovnice a k nim přiřadit pojmy:

1. $v = f_{(\lambda)}$ ... disperze
2. $v = f_{(u)}$ ... nelinearita. Obrázek vydá za tisíc slov a nejhezčí obrázek je vzoreček. Doufám, že nebudu muset napsat tisíc slov, abych obsáhl to, co nám řekl tento vzoreček... Je-li rychlost vlny závislá na výchylce, jedná se o nelinearitu. Fajn, tak to bylo jen 11 slov.

21.2 Zvuk

21.2.1 Obecně o zvuku

Co to je? Zvuk je každé podélné (v plynech a kapalinách, v pevných látkách i příčné) mechanické vlnění v látkovém prostředí, které je schopno vyvolat v lidském uchu sluchový vjem. Frekvence tohoto vlnění leží v rozsahu přibližně 20 Hz až 20 kHz (taky se udává $16Hz$ až $16kHz$ nebo $16Hz$ až $20kHz$... vyberte si); za jeho hranicemi člověk zvuk sluchem nevnímá. V širším smyslu lze za zvuk označovat i vlnění s frekvencemi mimo tento rozsah.

Zvuk s frekvencí nižší než 20 Hz ($16Hz$)(který slyší např. sloni) nazýváme infrazvuk. Zvuk s frekvencí vyšší než 20 kHz ($16kHz$)(např. delfínovití vnímájí zvuk až do frekvencí okolo 150 kHz) nazýváme ultrazvuk.

Zvuky můžeme rozdělit na hudební (tóny) a nehudební (hluky). Tóny vznikají při pravidelném, v čase periodicky probíhajícím pohybem kmitání. Při jejich poslechu vzniká v uchu vjem zvuku určité výšky, proto se tónů využívá v hudbě. Zdrojem hudebních zvuků mohou být například lidské hlasivky, různé hudební nástroje. Jako hluky označujeme nepravidelné vlnění, vznikající jako složité nepravidelné kmitání těles, nebo krátké nepravidelné rozruchy (srážka dvou těles, výstřel, přeskočení elektrické jiskry apod.). I hluky jsou využívány v hudbě, neboť k nim patří i zvuky mnoha hudebních nástrojů, především bicích.

Každý zvuk, hudební i nehudební, se vyznačuje svojí fyzikální intenzitou, s kterou je rovnocenná veličina nazývaná hladina intenzity zvuku měřená v dB, a fyziologickou hladinou své hlasitosti. Mimo to se hudební zvuky vyznačují ještě frekvencí, která určuje jejich výšku. Třetí základní vlastností zvuku je průběh kmitání, ovlivňující jeho zabarvení. Trvání zvuku v čase určuje jeho délku.

Přičemž rychlosti ve vzduchu, kapalině a pevné látce jsou rozděleny přibližně takto:

$$v_{plyn} < v_{kap.} < v_{p.l.}$$

21.2.2 Zvuk ve vzduchu

Fázovou rychlost zvuku ve vzduchu určíme ze vztahu:

$$v = \sqrt{\frac{\aleph \cdot p}{\rho}}$$

kde
p je statický tlak
ρ je hustota vzduchu
$\aleph$ je poissonova konstanta.

Definujeme intenzitu zvuku I(více v části **??**), která je úměrná druhé mocnině výchylky, resp. druhé mocnině amplitudy. Matematicky:
$I \equiv u_0^2$
a také truhé mocnině tlaku.
$I =\equiv p_0^2$

Když uvážíte, že intenzita musí být stále stejná, tak jistě nebudete protestovat proti tvrzení:
$p \equiv u_0$
neboli že tlak, že úměrný výchylce.

Experiment Udělejme si malý experiment. Budeme mít dva mikrofony vzájemně vzdálené $x = 1,5m$ připojené na vyhodnocovací zařízení, které bude měřit sílu signálu v závislosti na čase (klasický záznam zvuku). Ze zdroje poté vyšleme ostrý zvuk (náraz kovu na kov) a budeme sledovat signál z obou mikrofonů.

Co nám vyšlo? Čas, kdy dorazila vlna k prvnímu mikrofonu, označíme t_1 a u druhého mikrofonu logicky a předvídatelně t_2. Jejich vzájemný rozdíl bude Δt.

$t_1 = 1,29259s$
$t_2 = 1,29681s$
$\Delta t = 4,2ms$
vzdálenost mikrofonů byla[5] $x = 1,5m$.

$$v = \frac{x}{\Delta t} = \frac{1,5}{4,2} \cdot 10^3 = 360^{6} ms^{-1}$$

A vida — změřili jsme rychlost zvuku ve vzduchu.

Následně nás zajímalo, jakou rychlostí se šíří zvuk (resp. mechanické vlnění) v mědi. Vlnění máme dvojího typu. Příčné a podélné. My nebyli troškaři a změřili jsme oboje:

- Pro příčné vlnění:
  $\Delta t_{Cu-pr} = 0,74s$

$$v_{Cu-pr} = \frac{x}{\Delta t} = \frac{1,5}{0,74} \cdot 10^3 = 2400 ms^{-1}$$

- Pro podélné vlnění:
  $\Delta t_{Cu-pr} = 0,0,38s$

$$v_{Cu-pr} = \frac{x}{\Delta t} = \frac{1,5}{0,38} \cdot 10^3 = 4000 ms^{-1}$$

Pokud by Vás snad zajímalo, jak to vypadá s oficiálními (tabulovými) hodnotami, tak považne v rámci chyby, jaké bylo naše měření úspěšné (tabulka 1).

Prostředí	rychlost
Vzduch	$v = 340ms^{-1}$
Měď – příčné	$v = 2320ms^{-1}$
Měď – podélné	$3800ms^{-1}$

Tabulka 1: Rychlosti zvuku v různých prostředích

21.3 Hudební zvuky – tóny

Jde o mechanické vlnění ve slyšitelných frekvencích (více v části 21.2.1).

Co určuje[7], jak tón slyšíme? Jsou to tři věci:

[5] Už jsem to sice jednou říkal, ale abychom to měli všechno pohromadě
[6] Zaokrouhleno v rámci chyby
[7] Z fyzikálního hlediska vzhledem k vlnění

1. Výška tónu:
   Základní frekvence. V hudební teorii je jedním ze základních prvků stupnice oktáva. Co to znamená fyzikálně? Oktáva je zdvojnásobení (základní) frekvence. A co tvoří stupnici? Celkem 7tónů, jejichž vzájemné frekvence jsou v poměrech malých celých čísel.

2. Barva tónu:
   Zde se projevují Alikvotní tóny. Alikvotní tón, nebo též vyšší harmonický tón, částkový tón je tón, který zní společně s tónem základním. Většinou se u každého tónu (zvuku) vyskytuje množství alikvotních tónů. Intenzita jednotlivých alikvotních tónů je to, co určuje charakteristickou barvu zvuku. Právě díky alikvótním tónům jsme schopni např. poslechem rozpoznat, o jaký se to jedná hudební nástroj. Například nástroje s ostřejším zvukem (trubka, pozoun) mají silnější liché alikvotní tóny (první, třetí etc), sudé alikvotní tóny dávají zvuku spíš teplo a měkkost. Pokaždé, když zní nějaký tón, je to proto, že rovnoměrně vibruje hmota nástroje (ozvučná deska, hlasivky atd). Nástroj (s výjimkou elektronického tónového generátoru generujícím čistý "sinus") ale nikdy nevibruje pouze na základní frekvenci, tedy na frekvenci tónu, který slyšíme. Vždy je rozezníván ještě v celočíselných násobcích základní frekvence. Tyto násobky jsou frekvenční hodnoty alikvotních tónů. První alikvótní tón je tedy dvojnásobné frekvence než základní tón, druhý trojnásobné atd. Alikvotní tóny vytváří řadu, ve které jsou intervaly mezi jednotlivými tóny stále menší a menší. To je důsledek faktu, že lidské ucho vnímá zvuk v podstatě logaritmicky. Každá další oktáva má dvojnásobnou frekvenci. Frekvence oktáv tedy rostou exponenciálně (v mocninách), kdežto frekvence alikvotních tónů rostou pouze lineárně (v násobcích). Specifická barva tónu každého jednotlivého nástroje je pak dána právě různě intenzivním zastoupením jednotlivých alikvotních tónů v jeho zvuku.

22 Světlo jako elektromagnetické záření

$$\Delta\vec{E} = \mu\varepsilon\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \ldots \text{intenzita elektrického pole}$$

$$\Delta\vec{H} = \mu\varepsilon\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} \ldots \text{intenzita magnetického pole}$$

$$\Delta u = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \ldots \text{vlnová rovnice}$$

$$v = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon\mu}}$$