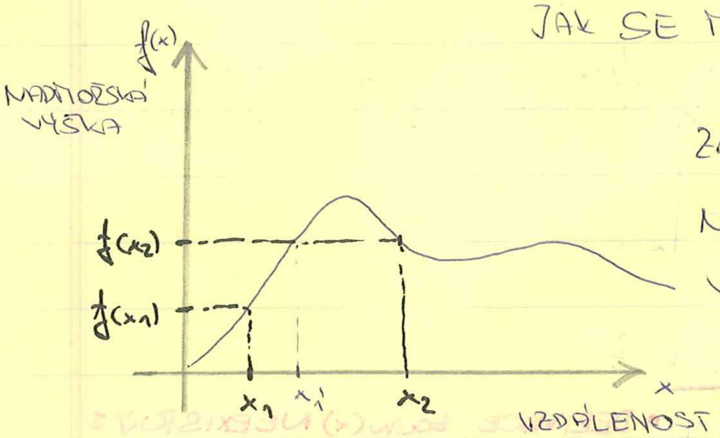
(1.) DERIVACE A INTEGRÁLY FUNKCE JEDNÉ REÁLNÉ PROMĚNNÉ

FUNKCE JEDNÉ REÁLNÉ PROMĚNNÉ – JE TO TAKOVÉ PRAVIDLO, KTERÉ KAŽDÉMU x Z MNOŽINY REÁLNÝCH ČÍSEL PŘIŘADÍ NĚJAKOU FUNKČNÍ HODNOTU, KTERÁ TAKÉ PATŘÍ DO REÁLNÝCH ČÍSEL.

$$\mathbb{R} \ni x \longrightarrow f(x) \in \mathbb{R}$$

CO JE TO DERIVACE: JE TO VĚC, KTERÁ SOUVISÍ S TÍM, JAK SE MĚNÍ FUNKCE $f(x)$ V SOULADU S TÍM JAK SE MĚNÍ x.



$$\boxed{\lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}}$$

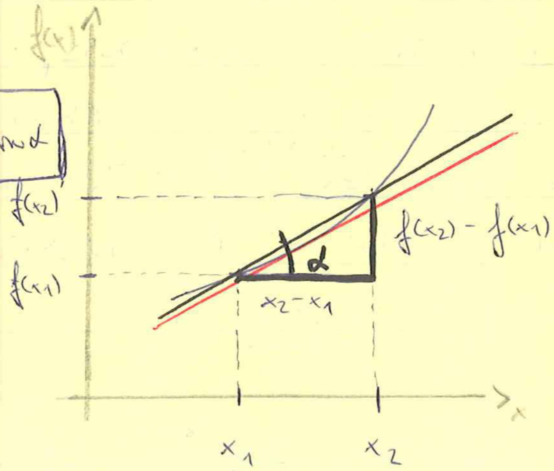
ZAJÍMÁ NÁS, JAK SE ZMĚNÍ VÝŠKA NA NĚJAKÝ PŘEDEM DANÝ INTERVAL VZDÁLENOSTI.

PRO PŘÍPAD VOLBY x_1 A x_2, TAK NENÍ DOBRÉ PROTOŽE NEVÍME CO NÁS ČEKÁ.

LEPŠÍ JE ZVOLIT x_2 VELMI BLÍZKO x_1, PŘIDÁME AKORÁT LIMITU.

$$\boxed{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \tan \alpha}$$

PRO PŘÍPAD BEZ LIMITY



$\tan \alpha$ – JE TO SMĚRNICE SEČNY KE GRAFU FUNKCE PROCHÁZEJÍCÍ BODY x_1 A x_2.

PRO PŘÍPAD S LIMITOU: $\lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \tan \alpha$

SMĚRNICE TEČNY, KE GRAFU FUNKCE PROCHÁZEJÍCÍ BODEM x_1. JE TO KVŮLI TOMU, ŽE TAM MÁME TU LIMITU.

DEFINICE: NECHŤ JE NĚJAKÁ FUNKCE $f(x)$ DEFINOVANÁ V BODĚ x_0 A NĚJAKÉM JEHO OKOLÍ. ŘEKNEME, ŽE $f(x)$ MÁ V BODĚ x_0 DERIVACI, JESTLIŽE EXISTUJE LIMITA.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

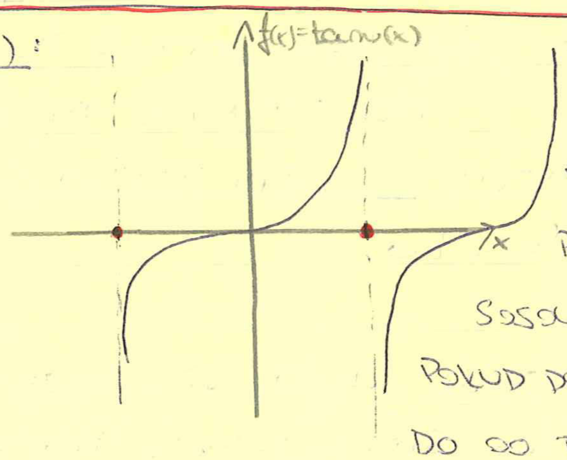
POZN.: OKOLÍ BODU x_0: TO JAKÝKOLIV INTERVAL, KTERÝ OBSAHUJE $(x_0-\delta;\ x_0+\varepsilon);\ \varepsilon;\delta>0,\ \varepsilon;\delta\in\mathbb{R}$

MOŽNOSTI ZÁPISU $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h};\ \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0};$

$$f'(x_0);\ \frac{df(x_0)}{dx};\ \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}$$

KDY DERIVACE NEEXISTUJE?

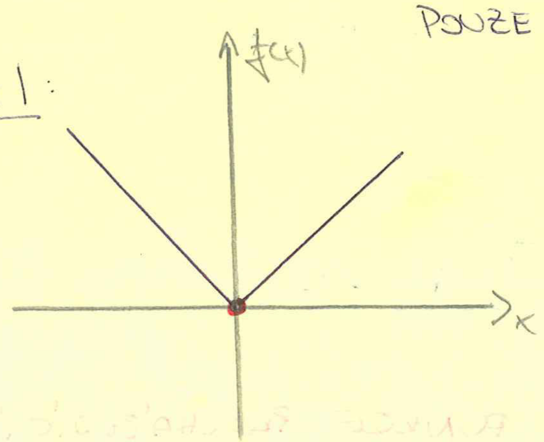
$\tan(x)$:



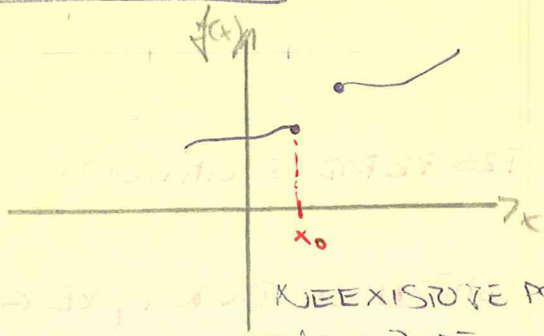
• DERIVACE $\tan(x)$ NEEXISTUJE V ASYMPTOTÁCH.

V ASYMPTOTÁCH JE TO SPORNÉ, PROTOŽE TEČNA SE STÁVÁ ROVNOBĚŽNÁ S OSOU x A UTÍKÁ DO NEKONEČNA. POKUD DOVOLÍME ABY TA LIMITA UTEKLA DO ∞ TAK JE TO DISKUTABILNÍ. POKUD PŘIPUSTÍME POUZE REÁLNÁ ČÍSLA TAK ANO NEEXISTUJE.

$|x|$:



NESPOJITÉ FUNKCE



NEEXISTUJE POUZE V TOMTO BODĚ.

② JAK SE DERIVACE POČÍTAJÍ

1.) Z DEFINICE $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

2.) POČÍTAČ

3.) PRAVIDLA

DERIVACE ELEMENTÁRNÍCH FUNKCÍ

$f(x)$	$f'(x)$
x^{α}, $\alpha \in R$	$\alpha \cdot x^{\alpha-1}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
a^x	$a^x \cdot \ln a$
e^x	$e^x \cdot (\log 1) = e^x \cdot 1$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\cot g\, x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg}(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arccotg}(x)$	$-\frac{1}{1+x^2}$

PŘÍKLAD: ODVOĎTE Z DEFINICE VÝRAZ: $(\sin x)' = (\cos x)$

$$(\sin(x_0))' = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x_0+h) - \sin(x_0)}{h} =$$

POUŽIJI GONIOMETRICKÉ VZORCE.
$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha-\beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha+\beta}{2}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2 \cdot \sin\left(\frac{x_0+h-x_0}{2}\right) \cdot \cos \frac{x_0+h+x_0}{2}}{h} =$$

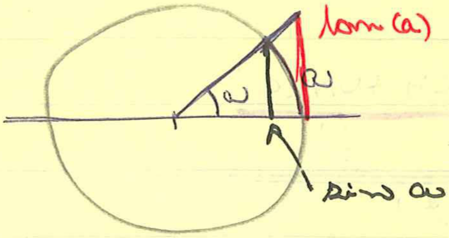
$$= \lim_{h \to 0} \frac{2 \cdot \sin \frac{h}{2} \cdot \cos \frac{2x_0+h}{2}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}\cdot\cos\frac{2\cdot x_0+h}{2}}{\frac{h}{2}} = \underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}}_{1} \cdot \underbrace{\lim_{h\to 0}\cos\left(\frac{2x_0+h}{2}\right)}_{\cos x_0} = \cos(x_0)$$

ODVOZENÍ PRVNÍHO ČLENU, ŽE JE 1

DŮKAZ $\lim_{a\to 0}\frac{\sin a}{a} = 1$ VYCHÁZÍM Z GEOMETRICKÉ PŘEDSTAVY.

NAKRESLÍME JEDNOTKOVOU KRUŽNICI



$\sin a \le a \le \tan a$

$\frac{\sin a}{a} \le 1$

SPOJÍME DOHROMADY

$a \le \frac{\sin(a)}{\cos(a)} \Rightarrow \cos a \le \frac{\sin(a)}{a}$

$\cos a \le \frac{\sin a}{a} \le 1$

a POŠLEME K NULE (BUDEME ZMENŠOVAT ÚHEL)

$\cos a \Rightarrow 1 \le \frac{\sin a}{a} \le 1$ POTOM sin(a) NEZBYDE NIC JINÉHO NEŽ ABY BYL 1.

DERIVACE SLOŽITĚJŠÍCH FUNKCÍ ŘEŠÍME TAKTO

	$f(x)$	$f(x)'$
DERIVACE FCÍ EXISTUJÍ	$f(x)+g(x)$	$f'(x) \pm g(x)$
	$f(x)\cdot g(x)$	$f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g(x)'$
$g(x)\neq 0$ v NĚJAKÉM OKOLÍ x	$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$
	$f(g(x))$	$g'(x)\cdot f'(g(x))$
	$[(f(x))^2]'$	$2\cdot f(x)\cdot f'(x)$

(3)

Př) $(f(x)\cdot g(x))' = f'(x_0)\cdot g(x_0) + f(x_0)\cdot g'(x_0)$

TOTO MÁME DOKÁZAT, POJEDEME TEDY ZNOVU PODLE DEFINICE

PŘIDÁM 2 ČLENY, KTERÉ SE DAJÍ IHNED ODEČÍST

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)\cdot g(x_0+h) - f(x_0)\cdot g(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)\cdot g(x_0+h) + f(x_0+h)\cdot g(x_0) - f(x_0+h)\cdot g(x_0) - f(x_0)\cdot g(x_0)}{h} =$$

ROZTRHÁM NA DVA ZLOMKY

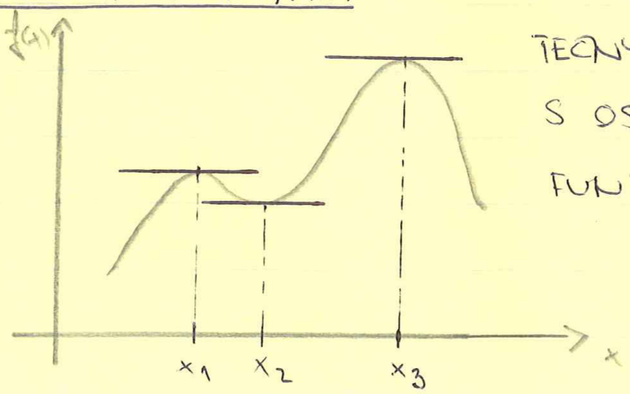
$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)\cdot g(x_0+h) - f(x_0+h)\cdot g(x_0)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)\cdot g(x_0) - f(x_0)\cdot g(x_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} f(x_0+h)\cdot\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} + \lim_{h\to 0} g(x_0)\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} =$$

$$= \underbrace{\lim_{h\to 0} f(x_0+h)}_{f(x_0)}\cdot\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}}_{g'(x_0)} + \underbrace{\lim_{h\to 0} g(x_0)}_{g(x_0)}\cdot\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}_{f'(x_0)} =$$

$$= f(x_0)\cdot g'(x_0) + f'(x_0)\cdot g(x_0)$$

POSLEDNÍ POZNÁMKA



TEČNY V EXTRÉMECH JSOU VODOROVNÉ S OSOU x, SMĚRNICE TEČNY (DERIVACE) FUNKCE JE NULOVÁ

JESTLIŽE FUNKCE $f(x)$ MÁ V NĚJAKÉM BODĚ x_0 EXTRÉM A MÁ V TOMTO EXTRÉMU DEFINOVANOU DERIVACI POTOM Z TOHO PLYNE $\Rightarrow f'(x_0)=0$

TATO IMPLIKACE FUNGUJE POUZE V 1 SMĚRU.

PROTIPŘÍKLAD

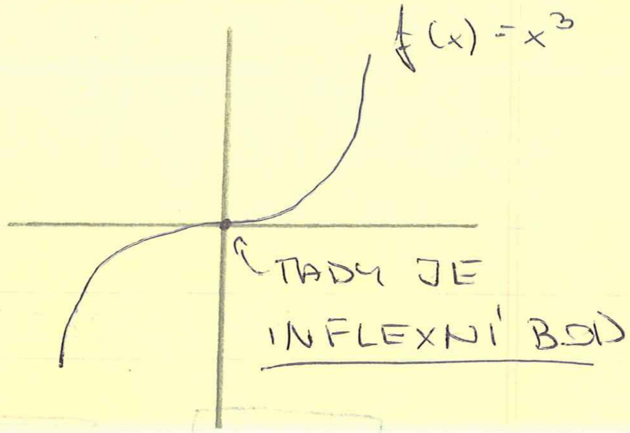
$f(x) = x^3$

SPOČÍTÁME DERIVACI $f'(x) = 3x^2$

TÉTO FUNKCE V $f'(0) = 0$!

BODĚ 0

V TOMTO BODĚ NENASTÁVÁ EXTRÉM



4.

INTEGRÁLY FUNKCE JEDNÉ REÁLNÉ PROMĚNNÉ

INTEGRACE OPAK DERIVOVÁNÍ

DEFINICE: MĚJME FUNKCE $f(x)$ a $F(x)$ DEFINOVANÉ NA INTERVALU OTEVŘENÝ INT → $(a;b)$. ŘEKNEME, ŽE FUNKCE $F(x)$ JE PRIMITIVNÍ FUNKCÍ K $f(x)$ JESTLIŽE PRO VŠECHNA $(\forall) x \in (a;b)$ PLATÍ:

$$F(x)' = f(x)$$

NEJJEDNODUŠŠÍ INTEGRAČNÍ POSTUPY

1.) ČTENÍ TABULKY PRO DERIVOVÁNÍ ZPRAVA DO LEVA

Př: $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$

2.) $\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$

$$\int c \cdot f(x) dx = c \cdot \int f(x) dx$$

PRIMITIVNÍ FUNKCÍ K DANÉ FUNKCI $f(x)$, POKUD EXISTUJÍ, JE JICH NEKONEČNĚ MNOHO A NAVZÁJEM SE LIŠÍ O KONSTANTU

$$\int f(x) dx = F(x) + c$$

NEURČITÝ INTEGRÁL (NEURČITOST V KONSTANTĚ c)

KE KAŽDÉ SPOJITÉ FUNKCI EXISTUJE PRIMITIVNÍ FUNKCE.

SPECIÁLNÍ INTEGRAČNÍ POSTUPY

3.) SUBSTITUČNÍ METODA I (SM I)

4.) METODA PER PARTES (PP)

5.) SUBSTITUČNÍ METODA II (SM II)

SUBSTITUČNÍ METODA I

- JE URČENA PRO SPECIÁLNÍ TYPY INTEGROVANÝCH FUNKCÍ A TO:

$$\boxed{f(x) = \varphi'(x) \cdot g(\varphi(x))}$$

POSTUP: PŘEDPOKLÁDEJME, ŽE ZNÁME PRIMITIVNÍ FUNKCI:

$\underbrace{G(\varphi(x))}_{t=\varphi(x)} = \underbrace{G(t)}_{\text{PRIMITIVNÍ FUNKCE}}$ K FUNKCI $g(\varphi(x)) = g(t)$.

$t = \varphi(x)$ ← VNITŘNÍ SLOŽKA

POČÍTEJME: $[G(\varphi(x))]' = \underbrace{G'(\varphi(x))}_{g(\varphi(x))} \cdot \varphi'(x) = g(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = f(x)$

DERIVACE SLOŽENÉ FCE

NYNÍ TO VŠE POSKLÁDÁME DOHROMADY

$$\underbrace{\int f(x)\,dx}_{\text{MĚLI JSME ZADÁNO}} = \underbrace{\int g(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\,dx}_{\text{TVAR INTEGROVANÉ FUNKCE}} = G(\varphi(x)) = G(t) = \underbrace{\int g(t)\,dt}_{\text{TOHLE POČÍTÁME}}$$

$$\boxed{\text{DŮLEŽITÉ: } \int f(x)\,dx = F(x) \Rightarrow \int f(\alpha x)\,dx = \frac{F(\alpha x)}{\alpha} \quad \alpha \in \mathbb{R}}$$

5.

POKUD MÁME INTEGROVAT FUNKCI V TOMTO TVARU:

$$R(\sin x;\ \cos x)$$

A SOUČASNĚ PLATÍ:

1.) $R(\sin x;\ (-\cos x)) = -R(\sin x;\ \cos x)$ TZN. FUNKCE JE LICHÁ VZHLEDEM KE KOSINU $\boxed{t=\sin x}$, KOSINUS SE VYSKYTUJE V LICHÉ MOCNINĚ.

2.) $R((-\sin x);\ \cos x) = -R(\sin x;\ \cos x)$ TZN. FUNKCE JE LICHÁ VZHLEDEM K SINU $\boxed{t=\cos x}$

METODA PER PARTES

PŘEDPOKLÁDEJME, ŽE MÁME POČÍTAT INTEGRÁL Z FUNKCE:

$\int u v' dx = \int u(x)\cdot v'(x)\,dx$ A NEVÍME JAK DÁL.

PŘEDPOKLÁDÁME, ŽE MÁME FUNKCI:

$$(u(x)\cdot v(x))' = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x) \quad /\text{CELÉ PROINTEGRUJI} \int$$

$$u(x)\cdot v(x) = \int u'(x)\,v(x)\,dx + \int u(x)\cdot v'(x)\,dx$$

PŘEVEDU NA DRUHOU STRANU

$$\underbrace{\int u(x)\,v'(x)\,dx}_{\text{MÁME SPOČÍTAT OBTÍŽNĚ}} = u(x)\,v(x) - \underbrace{\int u'(x)\,v(x)\,dx}_{\text{UMÍME O NĚCO LÉPE}}$$

TYPY FUNKCÍ PRO METODU PER PARTES

1) POLYNOMY
2) EXPONENCIELY
3) GONIOMETRICKÉ FUNKCE
4) LOGARITMY
5) TANGENTY

V SOUČINU TYPU $u(x)\cdot v'(x)$

ZA FUNKCI v' BEREME TU, CO SE NÁM BUDE LÉPE INTEGROVAT, ZA u RADĚJI POLYNOM.

SUBSTITUČNÍ METODA II

- HODÍ SE NA VŠECHNO (ODMOCNINY POLYNOMY, GONIOMETRICKÉ FUNKCE)...

MÁME ZADANOU FUNKCI $\int f(x)\,dx$

VĚTŠINOU NÁM TU SUBSTITUCI ZADAJÍ. V TÉTO METODĚ x NAHRADÍME NOVOU FUNKCÍ $\varphi(t)$ (ZÁVISLÉ NA t), POTOM $dx = \varphi'(t)\,dt$. PO SUBSTITUCI PŘEVEDEME NA INTEGRÁL $\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$.

$x = \varphi(t)$
$dx = \varphi(t)'\,dt$

POZOR NEPLÉST S SM I, TA JE URČENA PRO FUNKCE:

$$\int f(x)\,dx = \int \underbrace{\varphi'(x)\cdot g(\varphi(x))}_{\text{TVAR FUNKCE } f(x)}\,dx$$

SUBSTITUCE $t = \varphi(x)$

SM II JE URČENA PRO FUNKCE:

$$\int f(x)\,dx \qquad \text{SUBSTITUCE } x = \varphi(t)$$

Př) $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx =$ (a ↑ REÁLNÉ ČÍSLO)

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \left|\begin{array}{l} x = a\sin t = \varphi(t) \\ dx = a\cdot\cos t\,dt \\ t = \arcsin\frac{x}{a} \end{array}\right| = \int\sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}\cdot a\cdot\cos t\,dt =$$

$$= \int\sqrt{a^2(\underbrace{1-\sin^2 t}_{\cos^2 t})}\cdot a\cdot\cos t\,dt = \int a^2\cdot\cos^2 t\,dt = \frac{a^2}{2}\int(\cos 2t + 1)\,dt =$$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
$\cos 2x = \cos^2 x - (1-\cos^2 x)$
$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$
$\frac{1}{2}(1+\cos 2x) = \cos^2 x$

$$= \frac{a^2}{2}\left[\int\cos 2t\,dt + \int 1\,dt\right] = \frac{a^2}{2}\left[\frac{\sin 2t}{2} + t\right] + c =$$

$$= a^2\left[\frac{\cancel{2}\sin t\cdot\cos t}{\cancel{4}\,2} + \frac{1}{2}t\right] + c = a^2\left(\frac{\sin t\cdot\sqrt{1-\sin^2 t}}{2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}t\right) + c = \frac{1}{2}a^2\left(\left(\frac{x}{a}\right)\cdot\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2} + \arcsin\frac{x}{a}\right) + c$$

6.

UNIVERZÁLNÍ SUBSTITUCE $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$

- INTEGRACE GONIOMETRICKÝCH FCÍ SMI

1) $R(\cos x; \sin x) \longrightarrow \sin x = t$ (LICHÁ VZHLEDEM KE KOSINU)
$\searrow \cos x = t$ (LICHÁ VZHLEDEM K SINU)

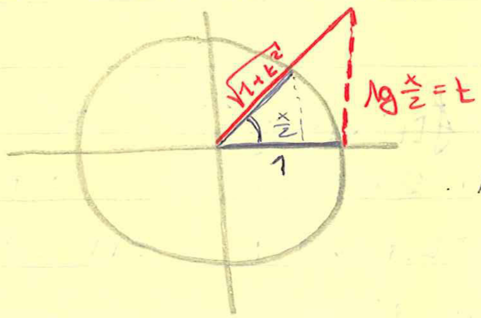
- SMI NÁM NABÍZÍ UNIVERZÁLNÍ SUBSTITUCI $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$

DŮLEŽITÉ INFORMACE: $\frac{x}{2} = \operatorname{arctg}(t)$

$x = 2\cdot \operatorname{arctg}(t)$

$dx = 2\cdot \frac{1}{1+t^2}\,dt$

JAK JE TO ALE PRO $\sin x = ?$ A $\cos x = ?$ PODÍVEJME SI JEDNOTKOVOU KRUŽNICI:



Z TOHOTO TROJÚHELNÍKU POMOCÍ PYTHAGOROVY VĚTY POTOM DOSTÁVÁME:

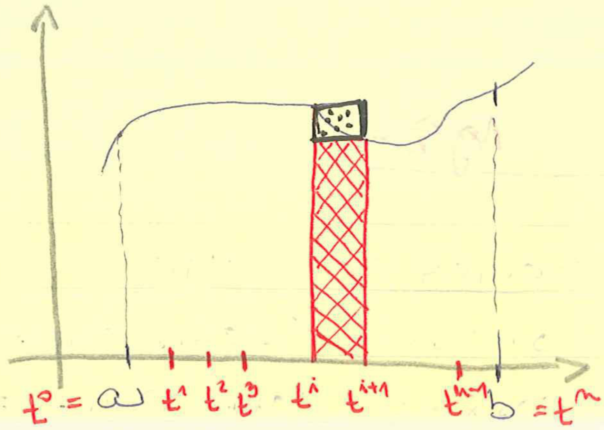
$\sin\frac{x}{2} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$; $\cos\frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$

PRO $\sin x = 2\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2} = 2\cdot\frac{t}{1+t^2}$

PRO $\cos x = -\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

URČITÝ INTEGRÁL

- PŘEDSTAVME SI SPOJITOU FUNKCI, HEZKOU OMEZENOU, DEFINOVANOU NA UZAVŘENÉM INTERVALU $\langle a;b\rangle$ A CHCEME SPOČÍTAT PLOCHU OHRANIČENOU ÚSEČKAMI ROVNOBĚŽNÝMI S OSOU y, OSOU x A GRAFEM FUNKCE.



1.) DĚLENÍ INTERVALU – ROZDĚLENÍ NA JEDNOTLIVÉ DĚLÍCÍ INTERVALY (NEMUSÍ BÝT STEJNĚ VELKÉ)

$a = t^0 < t^1 < \ldots < t^i < t^{i+1} < \ldots < t^n = b$

ČERVENÉ ŠRAFOVÁNÍ ODPOVÍDÁ MINIMÁLNÍ HODNOTĚ FUNKCE NA INTERVALU.

ČERNÉ TEČKOVÁNÍ ODPOVÍDÁ MAXIMÁLNÍ HODNOTĚ FUNKCE NA INTERVALU.

NYNÍ BUDE MÍT DOLNÍ SOUČTY PŘÍSLUŠNÉ FUNKCI f A DĚLENÍ D, A HORNÍ SOUČTY PŘÍSLUŠNÉ FUNKCE f A DĚLENÍ D.

DOLNÍ SOUČTY: $L(f;D) = \sum_{i=0}^{n-1} \min f_{[t^i;t^{i+1}]} \cdot (t^{i+1} - t^i)$

KAŽDÝ ČLEN TÉTO SUMY ODPOVÍDÁ OBSAHU TOHO JEDNOHO ČERVENÉHO OBDÉLNÍKU A S TĚMI OBDÉLNÍČKY NAVŠTĚVUJETE JEDNOTLIVÉ INTERVALY.

HORNÍ SOUČTY: $U(f;D) = \sum_{i=0}^{n-1} \max f_{[t^i;t^{i+1}]} (t^{i+1} - t^i)$

$L(f;D) \leq P \leq U(f;D)$

(PLOCHA P

ZJEMNÍME DĚLENÍ, TAK AŽ DÉLKA NEJMENŠÍHO INTERVALU POBĚŽÍ K NULE (LIMITNĚ SE BUDE BLÍŽIT NULE) [LIMITA HORNÍCH A DOLNÍCH INTERVALŮ]

$L(f;D) \longrightarrow P \longleftarrow U(f;D)$

(PLOCHA P

$P = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = [F_x]_a^b$

7.

ZÁKLADY VEKTOROVÉ ALGEBRY V $\mathbb{R}^2$ A $\mathbb{R}^3$

VEKTORY – POLOHOVÉ, POSUNUTÍ

(VE VŠECH VZTAŽNÝCH SOUSTAVÁCH STEJNÁ VELIKOST)

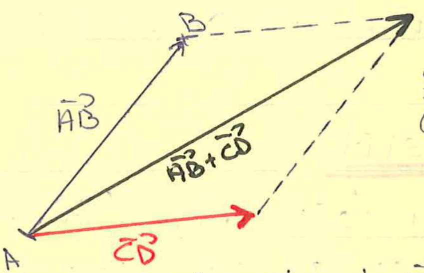
FYZIKÁLNÍ VELIČINY: SKALÁRNÍ (JEN VELIKOST) – HMOTNOST, TLAK, HUSTOTA...

VEKTOROVÉ (VELIKOST & SMĚR) – SÍLA, RYCHLOST, ZRYCHLENÍ...

TENZOROVÉ (NEJEN SMĚR, ALE I DRÁHA) – TENZOR SETRVAČNOSTI

VEKTORY – OPAKOVÁNÍ ZE SŠ

- VEKTORY BYLY NEJDŘÍVE ZAVEDENY PODLE ORIENTOVANÝCH ÚSEČEK (ORIENTOVANÁ ÚSEČKA JE ZADANÁ DVĚMA BODY).



SOUČET ORIENTOVANÝCH ÚSEČEK (VEKTOROVÝ ROVNOBĚŽNÍK).

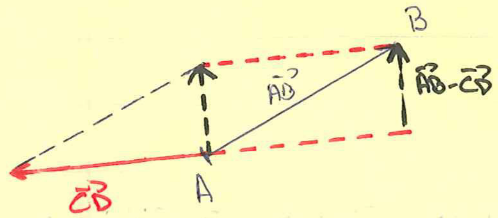
$\vec{AB}$ – BOD A JE BOD VÝCHOZÍ, A B JE BOD KONCOVÝ.

$k\cdot\vec{AB}$ – VYNÁSOBÍME k DÉLKU ÚSEČKY $|\vec{AB}|$ V ABSOLUTNÍ HODNOTĚ $k \in R$; $-k$ OTOČÍM ORIENTACI ÚSEČKY.

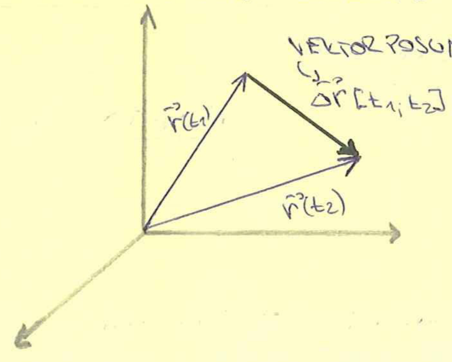
ROZDÍL ORIENTOVANÝCH ÚSEČEK $\vec{AB}-\vec{CD}$

MOHU SI TO NAPSAT JAKO $\vec{AB}-\vec{CD}=\vec{AB}+(-1)\vec{CD}$

PŘEVRÁTÍ SE ORIENTACE



MECHANIKA – ROZDÍL POLOHOVÝCH VEKTORŮ



$\Delta\vec{r}[t_1;t_2]=\vec{r}(t_2)-\vec{r}(t_1)$

VOLNÝ VEKTOR (TZN. VEKTOR)

- JE TO MNOŽINA VŠECH ORIENTOVANÝ ÚSEČEK, KTERÉ MAJÍ STEJNOU VELIKOST, STEJNÝ SMĚR A STEJNOU ORIENTACI.

$\vec{u}$ JE KONKRÉTNÍ REPREZENTANT TÉTO MNOŽINY ORIENTOVANÝCH ÚSEČEK

$|\vec{u}|$ – DÉLKA VEKTORU, JE TO DÉLKA ORIENTOVANÉ ÚSEČKY, KTERÁ VEKTOR REPREZENTUJE.

STEJNÁ ~~OR~~ ORIENTACE A STEJNÝ SMĚR (ORIENTACE NAHORU, DOLŮ)

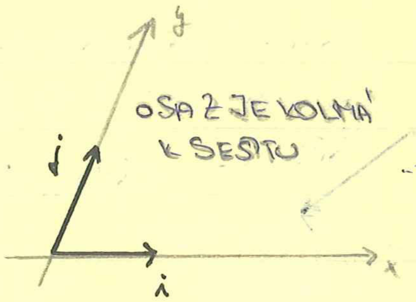
STEJNÝ SMĚR (PŘÍMKA VE KTERÉ VEKTOR LEŽÍ)

SČÍTÁNÍ VEKTORŮ A NÁSOBENÍ ČÍSLEM

- STEJNÉ JAKO S ORIENTOVANÝMI ÚSEČKAMI (GEOMETRICKY)
+ K TOMU SI POTŘEBUJEME ZAVÉST SOUSTAVU SOUŘADNIC V 3D

SOUSTAVA SOUŘADNIC V PROSTORU

- TROJICE PŘÍMEK, KTERÉ NELEŽÍ V JEDNÉ ROVINĚ A KTERÉ SE PROTÍNAJÍ V JEDNOM BODĚ, NA JEDNOTLIVÉ OSY VYNESEME MĚŘÍTKO ($\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}$)



- TAKOVÁTO SOUSTAVA SE MOC NEVYSKYTUJE

OBVYKLE SE VE FYZICE SETKÁVÁME SE SOUSTAVAMI:

- ORTONORMÁLNÍ – SPEC. PŘÍPAD ORTOGONÁLNÍ, PŘÍMKY JSOU NA SEBE KOLMÉ A VEKTORY $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ MAJÍ STEJNOU VELIKOST
- ORTOGONÁLNÍ – PŘÍMKY JSOU NA SEBE KOLMÉ

PŘÍKLAD ORTONORMÁLNÍ SOUSTAVY SOUŘADNIC – KARTÉZSKÁ

SOUSTAVA SOUŘADNIC

- MÁME VEKTORY $\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}$ A DVA BODY $A=[x_A; y_A; z_A]$; $B=[x_B; y_B; z_B]$.
- NYNÍ MÁME VEKTOR $\vec{u}$ ORIENTOVANÝ ÚSEČKOU $\vec{AB}$:

$$\vec{u}=\vec{AB}=u_x\cdot\vec{i}+u_y\cdot\vec{j}+u_z\cdot\vec{k}=(u_x; u_y; u_z)$$

PLATÍ: $u_x = x_B - x_A$

$u_y = y_B - y_A$ FORMÁLNĚ $\vec{u} = \vec{AB} = B - A$

$u_z = z_B - z_A$

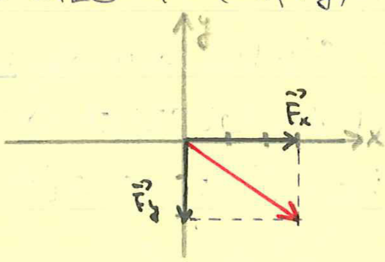
TA FORMALITA

HODNOTY $u_x; u_y; u_z$ JSOU SLOŽKY VEKTORU $\vec{u}$, V SOUSTAVĚ SOUŘADNIC $\langle \vec{i}; \vec{j}; \vec{k} \rangle$, JSOU TO ZA VŠECH OKOLNOSTÍ REÁLNÁ ČÍSLA (+; −; NULA).

$\underbrace{u_x\cdot\vec{i};\ u_z\cdot\vec{k};\ u_y\cdot\vec{j}}_{\text{JSOU TO VEKTORY}}$ – POZOR NEZAMĚŇOVAT, JSOU TO PRŮMĚTY VEKTORU $\vec{u}$ DO SOUŘADNICOVÝCH OS $x; y; z$

PROPOJENÍ S FYZIKOU – PŘÍKLAD V ROVINĚ

MÁME SÍLU $\vec{F} = (F_x; F_y) = (3N; -2N)$



PRŮMĚTY DO SOUŘADNICOVÝCH OS:

$\vec{F_x} = F_x\cdot\vec{i} = (F_x; 0)$

$\vec{F_y} = F_y\cdot\vec{j} = (0; F_y)$

$\vec{F} = F_x\cdot\vec{i} + F_y\cdot\vec{j}$

DERIVOVÁNÍ VEKTORŮ, NÁSOBENÍ REÁLNÝM ČÍSLEM ATD...

ZAVEDEME SI VEKTORY $\vec{u} = (u_x; u_y; u_z) = u_x\cdot\vec{i} + u_y\cdot\vec{j} + u_z\cdot\vec{k}$

(OBA DVA VYJÁDŘENY V TÉŽE SOUSTAVĚ SOUŘADNIC) $\vec{v} = (v_x; v_y; v_z) = v_x\cdot\vec{i} + v_y\cdot\vec{j} + v_z\cdot\vec{k}$

TEĎ CHCEME NÁSOBIT VEKTOR ČÍSLEM $\underset{\text{ČÍSLO}}{k}\cdot\vec{u} = k(u_x\cdot\vec{i}; u_y\cdot\vec{j}; u_z\cdot\underset{\text{VEKTOR}}{\vec{k}}) = k u_x\vec{i} + k u_y\vec{j} + k u_z\vec{k} =$

$= (k u_x; k u_y; k u_z)$

$\vec{u} + \vec{v} = (u_x + v_x; u_y + v_y; u_z + v_z)$

DERIVACE $\vec{u}(t) = (u_x(t); u_y(t); u_z(t))$ $\quad \frac{d\vec{u}(t)}{dt} = \left(\frac{du_x(t)}{dt}; \frac{du_y(t)}{dt}; \frac{du_z(t)}{dt}\right)$

ZJEDNODUŠENÍ $\frac{d\vec{u}(t)}{dt} = \dot{\vec{u}}(t) = (\dot{u}_x(t); \dot{u}_y(t); \dot{u}_z(t))$

PLATÍ V KAŽDÉ SOUSTAVĚ SOUŘADNIC

ORTONORMÁLNÍ SOUSTAVA

$\vec{u} = (u_x; u_y; u_z)$

VELIKOST VEKTORU $|\vec{u}| = \sqrt{(u_x)^2 + (u_y)^2 + (u_z)^2}$

LINEÁRNÍ ZÁVISLOST VEKTORŮ

- ŘEKNEME, ŽE $\vec{u}$ JE LINEÁRNÍ KOMBINACÍ VEKTORŮ $\vec{v}_1; \vec{v}_2; \dots \vec{v}_k$ JESTLIŽE EXISTUJÍ REÁLNÁ ČÍSLA $\alpha_1 \dots \alpha_k$ TAK, ŽE PLATÍ:

$$\vec{u} = \alpha_1 \cdot \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \alpha_3 \vec{v}_3 + \dots \alpha_k \cdot \vec{v}_k = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \cdot \vec{v}_i$$

VEKTORY $\vec{v}_1 \dots \vec{v}_k$ JSOU LINEÁRNĚ ZÁVISLÉ, JESTLIŽE JEDEN Z NICH JE LINEÁRNÍ KOMBINACÍ OSTATNÍCH.

EINSTEINOVA SUMAČNÍ SYMBOLIKA - DVA STEJNÉ INDEXY ZA SUMOU ⇒

$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \cdot \vec{v}_i = \alpha_i \vec{v}_i$ ⇒ VYKAŠLEME SE NA SUMU.

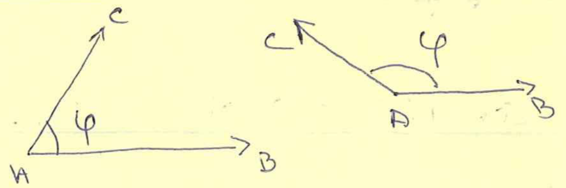
ÚHEL DVOU VEKTORŮ - DEFINUJEME POUZE PRO NENULOVÉ VEKTORY

MÁME VEKTOR $\vec{u} = \vec{AB}$ (ORIENTOVANÁ ÚSEČKA AB)

A VEKTOR $\vec{v} = \vec{AC}$ (VŽDY LZE ZAŘÍDIT STEJNÝ POČÁTEK A)

$\sphericalangle(\vec{u}; \vec{v})$ ... ÚHEL, KTERÝ SVÍRAJÍ PŘÍMKY URČENÉ ORIENTOVANÝMI ÚSEČKAMI AB, AC. ÚHEL $\varphi \in [0; 180°]$

ÚHEL CAB



SKALÁRNÍ SOUČIN VEKTORŮ $\vec{u}; \vec{v}$

DEFINICE:
1) POKUD JE ALESPOŇ 1 Z 2 VEKTORŮ NULOVÝ POTOM $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
2) POKUD JSOU NENULOVÉ, POTOM PLATÍ $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\varphi$

ÚHEL, KTERÝ SVÍRAJÍ

SKALÁRNÍ SOUČIN JE ČÍSLO A MŮŽE BÝT NULA

9.

PLATÍ PRO SKALÁRNÍ SOUČIN

POKUD MÁME: $\underbrace{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3}$ (V ORTONORMÁLNÍ BÁZI)

JSOU K SOBĚ KOLMÉ A MAJÍ JEDNOTKOVOU VELIKOST

PLATÍ 1) $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$ ← ROZPADNE SE NÁM NA 9 ROVNIC.

δ_{ij} – KRONEKEROVO DELTA

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \qquad 1 \leq i, j \leq 3$$

TABULKA 1

NÁSOBÍME DVA ORTONORMÁLNÍ VEKTORY

$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = 1$	$\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 = 0$	$\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1 = 0$
$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0$	$\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = 1$	$\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_2 = 0$
$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 = 0$	$\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = 0$	$\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 = 1$

2) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (Z DEFINICE)

3) $(k \cdot \vec{u}) \cdot \vec{v} = k \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (k \cdot \vec{v})$ (Z DEFINICE)

NÁSOBENÍ VEKTORU A REÁLNÉHO ČÍSLA — SKALÁRNÍ ČÍSLO — SKALÁRNÍ NÁSOBENÍ VEKTORŮ

Z GEOMETRIE

4) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

5) $(\vec{v} + \vec{u}) \cdot \vec{w} = \vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

6) $(\vec{u} \cdot \vec{u}) \geq 0$ ROVNOST NASTANE, PRÁVĚ TEHDY KDYŽ $\vec{u} = 0$

Př. $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$

$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S}$

V ORTONORMÁLNÍ SOUSTAVĚ SOUŘADNIC JDE POČÍTAT SKALÁRNÍ SOUČIN VEKTORŮ VELICE SNADNO:

NENULOVÝ VEKTOR $\vec{u}$ → $\vec{u} = (u_x; u_y; u_z) = (u_1; u_2; u_3) = u_1 \cdot \vec{e}_1 + u_2 \cdot \vec{e}_2 + u_3 \vec{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} u_i \cdot \vec{e}_i$

$\vec{v} = (v_x; v_y; v_z) = (v_1; v_2; v_3) = v_1 \vec{e}_1 + v_2 \cdot \vec{e}_2 + v_3 \cdot \vec{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} v_i \vec{e}_i$

NYNÍ POČÍTEJME SKALÁRNÍ SOUČIN:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = (u_1\cdot\vec{e}_1 + u_2\cdot\vec{e}_2 + u_3\cdot\vec{e}_3)\cdot(v_1\cdot\vec{e}_1 + v_2\cdot\vec{e}_2 + v_3\cdot\vec{e}_3) =$$

$$= u_1\cdot v_1\cdot\vec{e}_1\cdot\vec{e}_1 + u_1 v_2\cdot\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2 + u_1\cdot v_3\cdot\vec{e}_1\cdot\vec{e}_3 + u_2\cdot v_1\,\vec{e}_2\cdot\vec{e}_1 +$$

$$+ u_2\cdot v_2\cdot\vec{e}_2\cdot\vec{e}_2 + u_2\cdot v_3\cdot\vec{e}_2\cdot\vec{e}_3 + u_3 v_1\cdot\vec{e}_3\cdot\vec{e}_1 + u_3\cdot v_2\cdot\vec{e}_3\cdot\vec{e}_2 +$$

$$+ u_3\cdot v_3\cdot\vec{e}_3\cdot\vec{e}_3 = u_1\cdot v_1 + u_2\cdot v_2 + u_3\cdot v_3 = \sum_{i=1}^{3} u_i\cdot v_i = u_i\cdot v_i$$

PODLE TABULKY 1 ⇒ TOHLE PLATÍ POUZE V ORTONORMÁLNÍ BÁZI

DVA ZPŮSOBY ~~P~~ V ORTONORMÁLNÍ BÁZI

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cdot\cos\varphi = u_1\cdot v_1 + u_2\cdot v_2 + u_3 v_3$$

VEKTOROVÝ SOUČIN

- OPĚT BUDEME MÍT VEKTORY $\vec{u}$ A $\vec{v}$ A SOUČIN SI OZNAČÍME TAKTO:

$$\vec{u}\times\vec{v}$$

DEFINICE SE OPĚT ROZPADNE NA 2 PŘÍPADY:

1) POKUD JE ALESPOŇ JEDEN Z VEKTORŮ $\vec{u};\vec{v}$ NULOVÝ PAK $\vec{u}\times\vec{v} = 0$
2) OBA DVA VEKTORY NENULOVÉ:

VELIKOST: $|\vec{u}\times\vec{v}| = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\sin\varphi$

SMĚR: KOLMÝ K OBĚMA VEKTORŮM $\vec{u};\vec{v}$

ORIENTACE: POMOCÍ PRAVIDLA PRAVÉ RUKY

PLATÍ:
1) $\vec{u}\times\vec{v} = -\vec{v}\times\vec{u}$
2) $\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\times\vec{v} + \vec{u}\times\vec{w}$
3) $k\cdot(\vec{u}\times\vec{v}) = (k\cdot\vec{u})\times\vec{v} = \vec{u}\times(k\cdot\vec{v})$
4) $(\vec{u}+\vec{v})\times\vec{w} = \vec{u}\times\vec{w} + \vec{v}\times\vec{w}$
5) ~~ORTONO~~ BÁZOVÉ VEKTORY V ORTONORMÁLNÍ BÁZI: $\vec{e}_1;\vec{e}_2;\vec{e}_3$

$\vec{e}_1\times\vec{e}_1 = 0$	$\vec{e}_2\times\vec{e}_1 = -\vec{e}_3$	$\vec{e}_3\times\vec{e}_1 = \vec{e}_2$
$\vec{e}_1\times\vec{e}_2 = \vec{e}_3$	$\vec{e}_2\times\vec{e}_2 = 0$	$\vec{e}_3\times\vec{e}_2 = -\vec{e}_1$
$\vec{e}_1\times\vec{e}_3 = -\vec{e}_2$	$\vec{e}_2\times\vec{e}_3 = \vec{e}_1$	$\vec{e}_3\times\vec{e}_3 = 0$

LEPŠÍ ZAPSAT POMOCÍ LEVI-CIVITOVA PERMUTAČNÍHO SYMBOLU

(19.)

FYZIKÁLNÍ PŘÍPADY VEKTOROVÉHO SOUČINU

MOMENT SÍLY : $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

MOMENT HYBNOSTI : $L = \vec{r} \times \vec{p}$

MAG. SÍLA : $F = Q(\vec{v} \times \vec{B})$

ORTONORMÁLNÍ BÁZE

- OPĚT MĚJME 2 VEKTORY

$$\vec{u} = (u_1; u_2; u_3) = u_1 \cdot \vec{e}_1 + u_2 \cdot \vec{e}_2 + u_3 \cdot \vec{e}_3$$
$$\vec{v} = (v_1; v_2; v_3) = v_1 \cdot \vec{e}_1 + v_2 \cdot \vec{e}_2 + v_3 \cdot \vec{e}_3$$

POČÍTEJME $\vec{u} \times \vec{v} = (u_1 \cdot \vec{e}_1 + u_2 \cdot \vec{e}_2 + u_3 \cdot \vec{e}_3) \times (v_1 \cdot \vec{e}_1 + v_2 \cdot \vec{e}_2 + v_3 \cdot \vec{e}_3) = \underbrace{(u_1 \cdot v_1)}_{\text{NÁSOBENÍ ČÍSEL}} \underbrace{\cdot}_{\text{NÁSOBENÍ ČÍSLA A VEKT.}} \underbrace{(\vec{e}_1 \times \vec{e}_1)}_{\text{NÁSOBENÍ VEKTORU}} + (u_1 \cdot v_1) \cdot (\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) +$

$$+ (u_1 \cdot v_3) \cdot (\vec{e}_1 \times \vec{e}_3) + (u_2 \cdot v_1) \cdot (\vec{e}_2 \times \vec{e}_1) + (u_2 \cdot v_2) \cdot (\vec{e}_2 \times \vec{e}_2) +$$
$$+ (u_2 \cdot v_3) \cdot (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3) + (u_3 \cdot v_1) \cdot (\vec{e}_3 \times \vec{e}_1) + (u_3 \cdot v_2) \cdot (\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_2) +$$
$$+ (u_3 \cdot v_3) \cdot (\vec{e}_3 \times \vec{e}_3) = \underbrace{(u_2 \cdot v_3 - u_3 \cdot v_2)}_{\text{1 SLOŽKA}} \cdot \vec{e}_1 +$$
$$+ \underbrace{(u_3 \cdot v_1 - u_1 \cdot v_3)}_{\text{2 SLOŽKA}} \cdot \vec{e}_2 + \underbrace{(u_1 \cdot v_2 - u_2 \cdot v_1)}_{\text{3 SLOŽKA}} \vec{e}_3$$

$\vec{u} \times \vec{v}$

$$\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)\ u_1\ u_2$$
$$\vec{v} = (v_1; v_2; v_3)\ v_1\ v_2$$

$\boxed{\text{ODPROSTŘEDKA !!!}}$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_2 \cdot v_3 - u_3 \cdot v_2;\ u_3 \cdot v_1 - u_1 \cdot v_3;\ u_1 \cdot v_2 - u_2 v_1)$$

PŘÍKLAD: MĚJME V ORTONORMÁLNÍ BÁZI 2 VEKTORY:

$\vec{u} = (2; -1; 3)$ URČETE ÚHEL, KTERÝ SVÍRAJÍ POMOCÍ SKALÁRNÍHO

$\vec{v} = (4; -2; 1)$ SOUČINU A POMOCÍ VEKTOROVÉHO SOUČINU.

SKALÁRNÍ

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\varphi$
$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3$ $\Big\}$ $\cos\varphi = \dfrac{u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} =$

$$= \frac{8 + 2 + 3}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{21}} = \frac{13}{\sqrt{21} \cdot \sqrt{14}} = \frac{13}{7 \cdot \sqrt{6}}$$

$|\vec{u}| = \sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (3)^2} = \sqrt{14}$ $\qquad \varphi = 40°41'$

$|\vec{v}| = \sqrt{(4)^2 + (-2)^2 + (1)^2} = \sqrt{21}$

b) VEKTOROVÝ $\quad \vec{u} \times \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin\varphi \Rightarrow \sin\varphi = \dfrac{|\vec{u} \times \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} =$

$$= \frac{5 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{21}} \Rightarrow \frac{5 \cdot \sqrt{3}}{7 \cdot \sqrt{6}} \qquad \varphi = 40°41'$$

$(\vec{u} \times \vec{v}) = [-1 - (-2) \cdot 3\ ;\ 3 \cdot 4 - 1 \cdot 2\ ;\ 2 \cdot (-2) - 4(-1)] =$
$= (5\ ;\ 10\ ;\ 0)$

$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{(5)^2 + (10)^2 + 0^2} = \sqrt{125} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{25} = 5 \cdot \sqrt{5}$

ALGEBRAICKÉ ZAVEDENÍ

- OBECNÁ DEFINICE VEKTOROVÉHO PROSTORU, ŘEKNEME, ŽE JESTLIŽE PRO $\forall$ VEKTORY $\vec{a}; \vec{b}$ Z MNOŽINY $\underline{V}$ A VŠECHNA REÁLNÁ ČÍSLA $k; l$ PLATÍ:

(i) $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$ KOMUTATIVNÍ ZÁKON
(ii) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ ASOCIATIVNÍ ZÁKON
(iii) $\exists$ (EXISTUJE) PRVEK NULOVÝ VEKTOR $\vec{v}$, ŽE PLATÍ $\vec{a} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{\omega} = \vec{a}$
(iv) KE KAŽDÉMU $\vec{A}$ EXISTUJE OPAČNÝ PRVEK $(-\vec{A})$ TAK, ŽE $\vec{A} + (-\vec{A}) = (-\vec{A}) + \vec{A} = 0$
(v) $k \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = k \cdot \vec{a} + k \cdot \vec{b}$
(vi) $(k + l) \cdot \vec{a} = k \cdot \vec{a} + l \cdot \vec{a}$
(vii) $(k \cdot l) \cdot \vec{a} = k \cdot (l \cdot \vec{a})$
(viii) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$

S OPERACÍ + ~~NEBO~~ SPLŇUJE TYTO ČTYŘI VLASTNOSTI, TAK SE TOMU ŘÍKÁ KOMUTATIVNÍ GRUPA.

POTOM ŘÍKÁME, ŽE $\underline{V}$ SPOLU S OPERACÍ + a $\cdot$ TVOŘÍ VEKTOROVÝ PROSTOR NAD MNOŽINOU REÁLNÝCH ČÍSEL.

11.

PŘÍKLADY VEKTOROVÉHO PROSTORU

1) „VEKTORY ZE STŘEDNÍ ŠKOLY"

V JE MNOŽINA USPOŘÁDANÝCH TROJIC REÁLNÝCH ČÍSEL $= \{(x;y;z) \mid x;y;z \in \mathbb{R}\}$

TEĎ MUSÍME NADEFINOVAT OPERACI SČÍTÁNÍ VEKTORŮ, TU NADEFINUJEME TAKTO:

def "+" $\vec{u} \in V; \vec{v} \in V \quad \vec{u} = (u_x; u_y; u_z); \vec{v} = (v_x; v_y; v_z)$

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_x + v_x; u_y + v_y; u_z + v_z)$$

def "·" ČÍSLO REÁLNÉ A VEKTORU $\quad k \cdot \vec{u} = (k \cdot u_x; k \cdot u_y; k \cdot u_z)$

ÚKOL 1: NYNÍ OVĚŘTE, ŽE SE JEDNÁ O VEKTOROVÝ PROSTOR.

UDĚLALI BYCHOM TO TAK, ŽE BYCHOM VZALI JEDEN AXIOM A OVĚŘOVALI, AŽ BYCHOM VYZKOUŠELI VŠECHNY AXIOMY

(i) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

LEVÁ STRANA $\quad \vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x; a_y + b_y; a_z + b_z)$

↑ def "+" $\qquad$ LEVÁ STRANA = PRAVÁ STRANA

PRAVÁ STRANA $\quad \vec{b} + \vec{a} = (b_x + a_x; b_y + a_y; b_z + a_z)$

(ii); (iii) ...

ÚKOL 2: NYNÍ ZADÁME MNOŽINU V OBSAHUJÍCÍ 1 VEKTOR $\vec{v}$

$V = \{\vec{v}\}$

"+": $\vec{v} + \vec{v} = \vec{v}$ $\qquad$ $\boxed{\text{NULOVÝ VEKTOROVÝ PROSTOR}}$

"·": $k \cdot \vec{v} = \vec{v}$ $\qquad$ (DEGENEROVANÝ PROSTOR)

OPĚT BUDEME OVĚŘOVAT JEDNOTLIVÉ AXIOMY

(i) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

LEVÁ STRANA $\quad \vec{v} + \vec{v} = \vec{v}$

PRAVÁ STRANA $\quad \vec{v} + \vec{v} = \vec{v}$

VÝSLEDKY NA LEVÉ A PRAVÉ STRANĚ VYCHÁZEJÍ Z DEFINICE.

3) VEKTOROVÁ ALGEBRA V $\mathbb{R}^3$. PŘECHODY MEZI BÁZEMI

- VEKTORY MAJÍ 3 SLOŽKY PROTOŽE $\mathbb{R}^3$.
- VEKTORY BUDOU VYJÁDŘENY V BÁZI:

$$\boxed{\langle \vec{f}_1 ; \vec{f}_2 ; \vec{f}_3 \rangle = B}$$ (BÁZE VEKTOROVÉHO PROSTORU)

(OBECNÁ BÁZE)

- KAŽDÝ VEKTOR VEKTOROVÉHO PROSTORU JE VYJÁDŘEN:

$$\vec{u} = u_1 \vec{f}_1 + u_2 \vec{f}_2 + u_3 \vec{f}_3 = \sum_{i=1}^{3} u_i f_i = u_i f_i$$

NYNÍ BUDEME MÍT JINOU BÁZI VEKTOROVÉHO PROSTORU

$$\boxed{\langle \vec{f}'_1 ; \vec{f}'_2 ; \vec{f}'_3 \rangle = B'}$$

$$\vec{u} = u'_1 \vec{f}'_1 + u'_2 \cdot \vec{f}'_2 + u'_3 \vec{f}'_3$$

ZAJÍMÁ NÁS, JAKÝ JE VZTAH MEZI u_i A u'_i?
HODÍ SE TO, KDYŽ MÁME DVĚ VZTAŽNÉ SOUSTAVY, KTERÉ SE MOHOU VŮČI SOBĚ POHYBOVAT. HODÍ SE TO PŘI PŘEPOČÍTÁVÁNÍ TRAJEKTORIE Z JEDNÉ SOUSTAVY DO DRUHÉ.

MŮŽEME VYJÁDŘIT VEKTORY ČÁRKOVANÉ BÁZE POMOCÍ VEKTORŮ NEČÁRKOVANÉ.

$$\vec{f}'_1 = t_{11} \vec{f}_1 + t_{12} \cdot \vec{f}_2 + t_{13} \vec{f}_3$$
$$\vec{f}'_2 = t_{21} \vec{f}_1 + t_{22} \cdot \vec{f}_2 + t_{23} \vec{f}_3$$
$$\vec{f}'_3 = t_{31} \vec{f}_1 + t_{32} \cdot \vec{f}_2 + t_{33} \cdot \vec{f}_3$$

$$\vec{f}_1 = \bar{t}_{11} \vec{f}'_1 + \bar{t}_{12} \cdot \vec{f}'_2 + \bar{t}_{13} \cdot \vec{f}'_3$$
$$\vec{f}_2 = \bar{t}_{21} \vec{f}'_1 + \bar{t}_{22} \cdot \vec{f}'_2 + \bar{t}_{23} \cdot \vec{f}'_3$$
$$\vec{f}_3 = \bar{t}_{31} \vec{f}'_1 + \bar{t}_{32} \cdot \vec{f}'_2 + \bar{t}_{33} \cdot \vec{f}'_3$$

$$\vec{f}'_i = \sum_{j=1}^{n} t_{ij} \cdot \vec{f}_j \qquad 1 \leq i \leq 3$$
$$i \leq j \leq 3$$

(12.)

MATICE PŘECHODU OD BÁZE B K BÁZI B'.

$$T = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix} = (\tau_{ij}) \qquad 1 \leq i, j \leq 3$$

ZKRÁCENÝ ZÁPIS (KDYŽ JSME LÍNÍ A ŠETŘÍME RUČIČKU)

OBECNĚ O MATICÍCH

(OBDÉLNÍKOVÉ SCHÉMA)

MATICE TYPU m/n – OBDÉLNÍKOVÁ MATICE S m-ŘÁDKY A n-SLOUPCI S REÁLNÝMI ČÍSLY.

OBECNÁ MATICE m/n

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}) \qquad 1 \leq i \leq m;\ 1 \leq j \leq n$$

j – SLOUPCOVÝ INDEX

i – ŘÁDKOVÝ INDEX

SPECIÁLNÍ MATICE

ČTVERCOVÁ MATICE ŘÁDU n $\qquad m = n$

JEDNOTKOVÁ MATICE ŘÁDU n $\qquad E_n = (e_{ij}) \quad e_{ij} = \delta_{ij}$

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

TRANSPONOVANÁ MATICE K $A = (a_{ij})$ ... $A' = (a_{ji})$

SČÍTÁNÍ DVOU MATIC (MATICE STEJNÉHO TYPU):

$$A = (a_{ij}) \quad B = (b_{ij}) \quad C = A + B = (c_{ij}) \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

NÁSOBENÍ MATICE REÁLNÝM ČÍSLEM k:

$$A = (a_{ij}) \quad C = k \cdot A = (c_{ij}) \quad c_{ij} = k \cdot a_{ij}$$

NÁSOBENÍ MATIC

MUSÍ BÝT STEJNÉ ABY ŠLO NÁSOBIT

$A = (a_{ij})$ TYPU m/n $\qquad B = (b_{jk})$ n/p

$C = A \cdot B = (c_{ik})$ m/p

$$\boxed{c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk}}$$

$$c_{1,2} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \cdot b_{j2} = a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} + a_{13} \cdot b_{32} + \dots a_{1n} \cdot b_{n2}$$

VLASTNOSTI MATIC

1) $A \cdot (B+C) = AB + AC$
2) $k \cdot (B+C) = k \cdot B + k \cdot C$
3) $A \cdot (B \cdot C) = A \cdot B \cdot C$
4) $A \cdot E_n = E_n \cdot A$
5) $AB \neq B \cdot A$

MATICE VE SCHODOVITÉM TVARU

- KAŽDOU MATICI TYPU m/n LZE UPRAVIT ELEMENTÁRNÍMI ŘÁDKOVÝMI ÚPRAVAMI PŘEVÉST DO TZV. SCHODOVITÉHO TVARU.

ELEMENTÁRNÍ ŘÁDKOVÉ ÚPRAVY
- VYNÁSOBENÍ ŘÁDKU NENULOVÝM ČÍSLEM
- SEČTENÍ DVOU ŘÁDKŮ
- VÝMĚNA POŘADÍ ŘÁDKŮ

SCHODOVITÝ TVAR MATICE → JE KAŽDÝ NENULOVÝ ŘÁDEK ZAČÍNÁ VĚTŠÍM POČTEM NUL, NEŽ PŘEDCHOZÍ.

HODNOST MATICE → POČET NENULOVÝCH ŘÁDKŮ VE SCHODOVITÉM TVARU (MŮŽEME SLOVO „ŘÁDEK" UPRAVIT NA SLOUPEC !

INVERZNÍ MATICE (K ČTVERCOVÉ) MATICI A, JE TAKOVÁ MATICE X (POKUD EXISTUJE), ŽE

$X \cdot A = A \cdot X = E_n$ OZNAČENÍ $X = A^{-1}$!

JEDNOTKOVÁ MATICE

(13)

JAK INVERZNÍ MATICI NAJÍT?

PŘ.) ZADANÁ MATICE | JEDNOTKOVÁ MATICE

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdots \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & +1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

INVERZNÍ MATICI NEPŮJDE NAJÍT, KDYŽ HODNOST ZADANÉ MATICE BUDE MENŠÍ NEŽ n.

REGULÁRNÍ MATICE JE TAKOVÁ ČTVERCOVÁ MATICE, KE KTERÉ EXISTUJE MATICE INVERZNÍ. POKUD K NÍ NEEXISTUJE INVERZNÍ MATICE, PAK SE NAZÝVÁ SINGULÁRNÍ.

DETERMINANT MATICE

- ČTVERCOVÉ MATICE

$$|A| = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{P \in p} \operatorname{sgn} P \, a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot a_{3j_3} \cdots a_{n-1\,j_{n-1}} a_{nj_n}$$

PERMUTACE

p ... MNOŽINA VŠECH PERMUTACÍ ČÍSEL $(1; 2; \ldots n)$

P ... KONKRÉTNÍ PERMUTACE SLOUPCOVÝCH INDEXŮ $(j_1; j_2; j_3 \ldots j_n)$

ČÍSLA SE NEOPAKUJÍ

$\boxed{\text{PERMUTACE JE USPOŘÁDANÁ } n\text{-TICE}}$

$\operatorname{sgn} P$ - ZNAMÉNKO PERMUTACE $= (-1)^s$ ... s ... POČET INVERZÍ (POČET INVERZÍ ZNAMENÁ POČET SITUACÍ, KDY V PERMUTACI VĚTŠÍ PRVEK PŘEDCHÁZÍ MENŠÍMU.

PŘ.) PERMUTACE

$(1; 6; 5; 2; 4; 3)$ $\quad S = 8$ (+)

PŘ DETERMINANT

1.) $n=2$ $A_2=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ $n=3$ $A_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

$$\det A_2 = a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}$$

$$\det A_3 = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} - a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} - a_{12}\, a_{21} a_{33} + a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32} - a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31}$$

SARUSOVO PRAVIDLO – FÍGL (POUZE PRO ŘÁDU 3)

$$\det A = \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} +$$

$$+ a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

TVRZENÍ: MATICE A ŘÁDU n JE REGULÁRNÍ PRÁVĚ TEHDY, KDYŽ HODNOST MATICE A JE ROVNA n. $h(A)=n$, $\det A \neq 0$

MATICE PŘECHODU – ZNOVU

ŘEKNĚME, ŽE MÁME BÁZOVÉ VEKTORY VYJÁDŘENÉ TAKTO:

$\vec{B} = \langle \vec{f}_1; \vec{f}_2; \dots \vec{f}_n \rangle$

$\vec{B}' = \langle \vec{f}'_1; \vec{f}'_2; \dots \vec{f}'_n \rangle$

$\vec{f}'_i = \sum_{j=1}^{n} t_{ij}\, \vec{f}_j$

$\vec{f}_i = \sum_{j=1}^{n} s_{ij}\cdot \vec{f}'_j$ VYJADŘUJME JAKO LINEÁRNÍ KOMBINACI ČÁRKOVANÝCH ABY VZNIKLO $\vec{f}_i$.

MATICE PŘECHODU: $T=(t_{ij})$, $S=(s_{ij})$ } JSOU REGULÁRNÍ (MAJÍ INVERZNÍ MATICI) A ZÁROVEŇ JSOU SI NAVZÁJEM INVERZNÍ.

(14.)

TYTO ZÁPISY LZE ZAPSAT MATICOVĚ:

$$\begin{pmatrix} \vec{f}_1' \\ \vec{f}_2' \\ \vdots \\ \vec{f}_m' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \dots & \tau_{1m} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \dots & \tau_{2m} \\ \vdots & & & \\ \tau_{m1} & \tau_{m2} & \dots & \tau_{mm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{f}_1 \\ \vec{f}_2 \\ \vdots \\ \vec{f}_m \end{pmatrix}$$

JAKÝ JE VZTAH MEZI $\underline{T}$ A $\underline{S}$?

MATICEMI PŘECHODU

ZKUSÍME NA TO JÍT TAKTO: $\vec{f}_i' = \sum_{j=1}^{m} \tau_{ij} \cdot \vec{f}_j = \sum_{j=1}^{m} \tau_{ij} \left(\sum_{l=1}^{m} \sigma_{jl} \cdot \vec{f}_l' \right) =$

$= \sum_{l=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{m} \tau_{ij} \cdot \sigma_{jl} \right) \cdot \vec{f}_l'$ ... l-TÁ SLOŽKA VEKTORU $\vec{f}_l'$ V ČÁRKOVANÉ BÁZI $= \begin{cases} 1 & i = l \\ 0 & i \neq l \end{cases}$

POMŮCKA

$\vec{f}_1' = 1 \cdot \vec{f}_1' + 0 \cdot \vec{f}_2' \dots + 0 \cdot \vec{f}_m'$

$\vec{f}_2' = 0 \cdot \vec{f}_1' + 1 \cdot \vec{f}_2' \dots + 0 \cdot \vec{f}_m'$

$\vdots$

$\vec{f}_m' = 0 \cdot \vec{f}_1' + 0 \cdot \vec{f}_2' \dots 1 \cdot \vec{f}_m'$

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{m} \tau_{ij} \cdot \sigma_{jl}}_{\text{NÁSOBENÍ MATIC}} = \begin{cases} 1 & i = l \\ 0 & i \neq l \end{cases} = \underline{\delta_{il}}$$

KRONEKEROVO DELTA

$T \cdot S = E_m \leftarrow$ JEDNOTKOVÁ MATICE

VŮČI SOBĚ INVERZNÍ (PŘ. JSOU REGULÁRNÍ)

VEKTOR $\underline{u}$ VYJÁDŘEN VE DVOU BÁZÍCH, ČÁRKOVANÉ A NEČÁRKOVANÉ:

$\vec{u} = \sum_{i=1}^{m} u_i \cdot \vec{f}_i$

$\vec{u} = \sum_{j=1}^{m} u_j' \cdot \vec{f}_j'$

OPĚT BUDEME ZJIŠŤOVAT, JAKÝ JE MEZI NIMI VZTAH A ZNOVU DO NICH DOSADÍM:

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{m} u_i \cdot \vec{f}_i = \sum_{i=1}^{m} u_i \cdot \left(\sum_{k=1}^{m} \sigma_{ij} \cdot \vec{f}_j' \right) = \sum_{k=1}^{m} \left(\underbrace{\sum_{i=1}^{m} u_i \cdot \sigma_{ij}}_{\vec{u}_j'} \right) \cdot \vec{f}_j'$$

PŘEHODÍME SUMY

$\vec{u}_j' = \sum_{i=1}^{m} u_i \cdot \sigma_{ij}$ MATICOVÝ ZÁPIS

$(u_1'; u_2' \dots u_m') = (u_1; u_2; \dots u_m) \cdot S$

$(u_1; u_2; \dots u_m) = (u_1'; u_2'; \dots u_m') \cdot T$

14 a)

SPECIÁLNĚ PRO ORTONORMÁLNÍ BÁZE

$\beta = \langle \vec{e}_1; \dots; \vec{e}_n \rangle$

$\beta' = \langle \vec{e}\,'_1; \dots; \vec{e}\,'_n \rangle$

SKALÁRNĚ VYNÁSOBÍM $\vec{e}_j$

$$\vec{e}\,'_i = \sum_{j=1}^{n} T_{ij} \cdot \vec{e}_j = T_{i1} \cdot \vec{e}_1 + T_{i2} \cdot \vec{e}_2 + \dots + T_{in} \cdot \vec{e}_n \qquad 1 \leq i \leq n$$

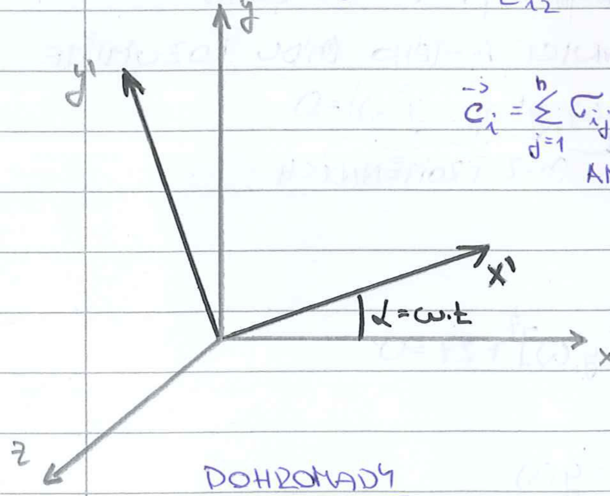
$$\vec{e}\,'_i \cdot \vec{e}_j = T_{i1} \cdot \underbrace{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_j}_{\delta_{1j}} + T_{i2} \cdot \underbrace{\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_j}_{\delta_{2j}} + \dots + T_{in} \cdot \underbrace{\vec{e}_n \cdot \vec{e}_j}_{\delta_{nj}} = T_{ij}$$

$$\boxed{\vec{e}\,'_i \cdot \vec{e}_j = T_{ij}}$$

Př) $i = 1;\ j = 2$

$\vec{e}\,'_1 = T_{11} \cdot \vec{e}_1 + T_{12} \cdot \vec{e}_2 + \dots + T_{1n} \vec{e}_n \quad / \cdot e_2$

$$\vec{e}\,'_1 \cdot \vec{e}_2 = T_{11} \underbrace{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2}_{0} + \underbrace{T_{12} \cdot \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2}_{T_{12}} + \dots + T_{1n} \underbrace{\vec{e}_n \cdot \vec{e}_2}_{0} = T_{12}$$



$$\vec{e}_i = \sum_{j=1}^{n} S_{ij} \cdot \vec{e}\,'_j = S_{i1} \cdot \vec{e}\,'_1 + S_{i2} \cdot \vec{e}\,'_2 + \dots + S_{in} \cdot \vec{e}\,'_n$$

ANALOGICKY: $\vec{e}_i \cdot \vec{e}\,'_j = \vec{e}\,'_j \cdot \vec{e}_i = S_{ji}$

DOHROMADY

$$\vec{e}\,'_i \cdot \vec{e}_j = \underbrace{|\vec{e}\,'_i|}_{1} \cdot \underbrace{|\vec{e}_j|}_{1} \cdot \cos \angle(\vec{e}\,'_i; \vec{e}_j) = \cos \angle (\vec{e}\,'_i; \vec{e}_j) = T_{ij} = S_{ji}$$

$$\boxed{T = S^T}$$

OBECNÉ BÁZE: $T = S^{-1}$

ORTONORMÁLNÍ BÁZE: $T = S^T$

4) OBYČEJNÉ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

- SEPARACE PROMĚNNÝCH, LINEÁRNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE 1. ŘÁDU

- DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE VE FYZICE – PŘÍKLADY:

1) MECHANIKA: $r(t) = (r_x(t); r_y(t); r_z(t))$ ... $\vec{r}(t) = ?$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \Rightarrow \vec{r}(t) = \int \vec{v}(t)\, dt + \text{APLIKACE POČÁTEČNÍCH PODMÍNEK}$$

2) ROZPAD JADER: $\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t)$ .... $N(t) = ?$

3) MECHANIKA: $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$

$$\vec{F}(t; x; y; z; \dot{x}; \dot{y}; \dot{z}; \alpha; \dots) = m \cdot \ddot{\vec{r}}(t)$$

$$F_x(t; x; y; z; \dot{x}; \dot{y}; \dot{z}; \alpha; \dots) = m \cdot \ddot{x}(t)$$

$$F_y(\dots \text{ -- '' -- } \dots) = m \cdot \ddot{y}(t)$$

$$F_z(\dots \text{ -- '' -- } \dots) = m \cdot \ddot{z}(t)$$

$$x(t); y(t); z(t) = ?$$

NEBEREME SKUPINU BRAMBORY.

DEFINICE: $A \subseteq \mathbb{R}^{m+2}$ (m+2 ROZMĚRNÁ MNOŽINA), A JE OTEVŘENÁ (OBYČEJNOU) DIFERENCIÁLNÍ ROVNICI M-TÉHO ŘÁDU ROZUMÍME ZOBRAZENÍ $F: A \to \mathbb{R}$, $F(\underbrace{x; y(x); y'(x); \dots y^{(n)}(x)}_{m+2 \text{ PROMĚNNÝCH}}) = 0$

FUNKCE VÍCE PROMĚNNÝCH

Př. $F(x; y(x); y'(x); y''(x)) = 0$

$$x^7 + \ln^{25}(y''(x)) + \sin y'(x) - 24 y(x) [y'(x)]^7 + 27 = 0$$

$$y'(x) = 26 \sin y(x) \cdot y(x) - x^7$$

ŘEŠENÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE: $y(x)$

SPECIÁLNÍ TYPY DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC 1. ŘÁDU

$$y'(x) = f(x) \cdot g(y)$$

VĚTA: $M = [a; b] \times [c; d]$, $f(x)$ JE SPOJITÁ NA $[a; b]$ A SOUČASNĚ $g(y) \neq 0$ PRO $\forall y [c; d]$

OBDÉLNÍK

PAK KAŽDÝM BODEM $[x_0; y_0]$ Z M PROCHÁZÍ PRÁVĚ JEDNO ŘEŠENÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

$y'(x) = f(x) \cdot g(y)$ A PLATÍ $\int_{x_0}^{x} f(t)\, dt = \int_{y_0}^{y} \frac{dt}{g(t)}$

14b

HANTÝRKA: $y'(x) = f(x)\cdot g(y) \quad / g(y) \neq 0$

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\cdot g(y)$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx$$

PŘÍKLAD! NALEZNĚTE ŘEŠENÍ ROVNICE $y' = \sqrt{y}$ TAK, ŽE $\underbrace{y(0)=0}_{\text{POČÁTEČNÍ PODMÍNKA}}$

ŘEŠENÍ: $\frac{dy}{dx} = \sqrt{y} \quad / y \neq 0$

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = dx$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int dx$$

$$\frac{\sqrt{y}}{\frac{1}{2}} = x + C$$

$$\frac{\sqrt{y}}{\frac{1}{2}} + A = x + B$$

$B - A = C$

KONSTANTY NA OBOU STRANÁCH NENÍ POTŘEBA PSÁT

$$\underline{y = \left(\frac{x+C}{2}\right)^2}$$

JE $y=0$ TAKÉ ŘEŠENÍ?

$\left.\begin{array}{l} L: y' = 0 \\ P: \sqrt{y} = \sqrt{0} = 0 \end{array}\right\} L = P$

ANO, LZE JEJ ZÍSKAT V TOMTO PŘÍPADĚ ZÍSKAT VHODNOU VOLBOU KONSTANTOU $\underline{C}$?

<u>NE</u>

ŘEŠENÍ ZADANÉ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE - TZV. OBECNÉ ŘEŠENÍ

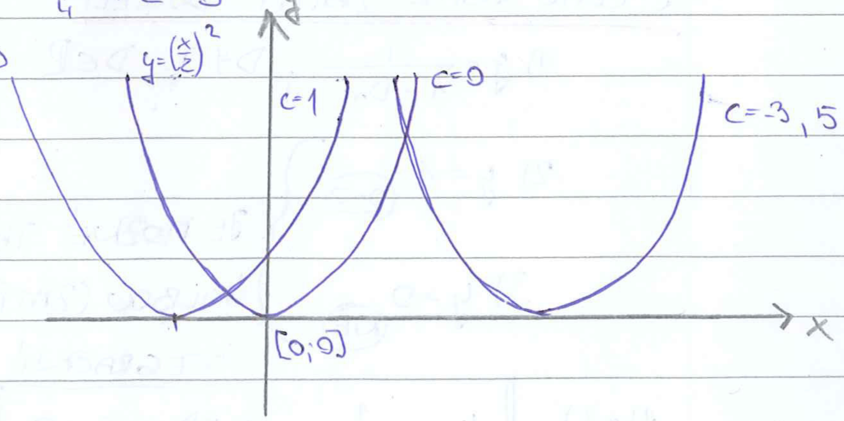
$y = \left(\frac{x+C}{2}\right)^2$ (ZAHRNUJE V SOBĚ INTEGR. KONSTANTY)

$y = 0$

TZV. PARTIKULÁRNÍ ŘEŠENÍ:

$y(0) = 0 = \left(\frac{0+C}{2}\right)^2 = \frac{C^2}{4} \Rightarrow C = 0$

$y = \left(\frac{x}{2}\right)^2 \;;\; y = 0$



PŘÍKLAD: URČETE OBECNÉ ŘEŠENÍ (TJ. S INTEGRAČNÍMI KONSTANTAMI)

$x y' + y = y^2 \quad / y(y-1) \neq 0$, TJ $y \neq 0 \wedge y \neq 1$

$$x\cdot\frac{dy}{dx} = y(y-1)$$

$$\int \frac{dy}{y(y-1)} = \int \frac{dx}{x} \qquad \frac{-1}{y} + \frac{1}{y-1} = \frac{1}{y(y-1)}$$

$$\int\left(\frac{-1}{y} + \frac{1}{y-1}\right)dy = \ln x$$

$$-\ln|y| + \ln|y-1| = \ln|x| + c \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\ln\left|\frac{y-1}{y}\right| = \ln|x| + \ln A \qquad c = \ln A \quad A > 0$$

$$\ln\left|\frac{y-1}{y}\right| = \ln(A \cdot |x|)$$

$$\frac{1}{y(y-1)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y-1}$$

$$\left|\frac{y-1}{y}\right| = A \cdot |x|$$

$$Ay - A + By = 1$$

$$A + B = 0$$

$$A = -1$$

$$B = 1$$

$$\frac{y-1}{y} = \pm A|x|$$

$$\frac{y-1}{y} = D \cdot x \qquad D = \pm A \quad D \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$y - 1 = y \cdot D \cdot x$$

$$y - y \cdot D \cdot x = 1$$

$$y(1 - Dx) = 1 \qquad y = \frac{1}{1-Dx} \quad D \neq 0 \quad D \in \mathbb{R}$$

OVĚŘÍME, ZDA PROZATÍM VYLOUČENÉ PŘÍPADY TAKÉ NEJSOU ŘEŠENÍM ROVNICE.

1) $\underline{y=0}$ $\quad \left.\begin{array}{l} L: x \cdot 0 + 0 = 0 \\ P: 0^2 = 0 \end{array}\right\} \underline{L=P}$ ANO

1) $\underline{y=1}$ $\quad \left.\begin{array}{l} L: x \cdot 0 + 1 = 1 \\ P: 1^2 = 1 \end{array}\right\} \underline{L=P}$ ANO

K ČEMU JSME ZATÍM DOSPĚLI:

1) $y = \dfrac{1}{1-Dx}$; $D \neq 0$; $D \in \mathbb{R}$

2) $y = 1$ $D=0$

3) $y = 0$ NE

} JE MOŽNÉ TATO ŘEŠENÍ ZÍSKAT NĚJAKOU VOLBOU (ZATÍM TŘEBA I NEDOVOLENOU) INTEGRAČNÍ KONSTANTY?

1)+2) $$\boxed{\begin{array}{l} y = \dfrac{1}{1-Ex} \quad \underbrace{E = D \; ; \; E = 0}_{E \in \mathbb{R}} \\ y = 1 \end{array}}$$

- HOMOGENNÍ ROVNICE

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Př $y' = \sin\frac{y}{x} + \frac{y}{x} - \ln\left(\frac{y}{x}\right)^2$

"KUCHAŘKA": SUBSTITUCE: $u(x) = \frac{y(x)}{x} \Rightarrow y(x) = x \cdot u(x)$

$$y'(x) = u(x) + x\,u'(x)$$

14 c)

$u(x) + x \cdot u'(x) = f(u)$ ... ROVNICE SE SEPAR. PROMĚNNÝCH

$$x \cdot \frac{du}{dx} = f(u(x)) - u(x)$$

$$\frac{du}{f(u(x)) - u} = \frac{dx}{x}$$

- LINEÁRNÍ ROVNICE

$y' + a(x)y = b(x)$ $\quad a(x); b(x)$ ... FCE JEDNÉ REÁLNÉ PROMĚNNÉ

$y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$

$b(x) \begin{cases} = 0 & \text{... HOMOGENNÍ ROVNICE (HR) - ŘEŠÍ SE METODOU SEPARACE PROMĚNNÝCH} \\ \neq 0 & \text{... NEHOMOGENNÍ ROVNICE (NR) ?} \end{cases}$

VĚTA: (DŮKAZ ROZEPSÁNÍM)

$y_1(x)$ - ŘEŠENÍ (NR); $y_2(x)$ - ŘEŠENÍ (NR), $\Rightarrow y_1(x) - y_2(x)$ JE ŘEŠENÍ (HR).

DŮSLEDEK:

$y_N(x) = y_H(x) + y_P(x)$

OBECNÉ ŘEŠENÍ (NR) PARTIKULÁRNÍ ŘEŠENÍ (NR) [JEDNO KONKRÉTNÍ]

OBECNÉ ŘEŠENÍ (HR)

JAK URČIT $y_P(x)$?

1.) ZPŮSOB - METODA VARIACE KONSTANT

2.) ZPŮSOB - NĚKDY SE DÁ UHÁDNOUT

3.) ZPŮSOB - JINÉ METODY

METODA VARIACE KONSTANT

$y' + ay = b$

1) ZAŘÍDÍME "ZHOMOGENIZOVANOU" ROVNICI: $y' + ay = 0$, ŘEŠÍME METODOU SEPARACE PROMĚNNÝCH, DOSTANEME VÝSLEDEK VE TVARU $y_H(x) = C \cdot f(x)$ ... C KONST.

$y' + ay = 0$

$\frac{dy}{dx} = -ay \quad / \frac{1}{y} \quad (y \neq 0)$

$\int \frac{dy}{y} = \int -a \cdot dx$ POZOR $a(x)$ JE TAKÉ FCE x

$\ln|y| = -\int a\,dx + \ln|c|\ ;\ c > 0$

$$\frac{|y|}{C} = e^{-\int a\,dx}$$

$$y = \pm C \cdot e^{-\int a\,dx} \qquad D = \pm C$$

$$\underbrace{y = D \cdot e^{-\int a\,dx} \qquad y = 0}$$

$$y = A \cdot e^{-\int a\,dx} \qquad A \in \mathbb{R}$$

2.) POLOŽÍME $y_p(x) = E(x) \cdot f(x)$; $E(x) = ?$, ZDERIVUJEME, DOSADÍME DO PŮVODNÍ ROVNICE $y' + ay = b$

DOSTANEME ROVNICI PRO $E'(x)$ → ZINTEGRUJEME

3) $y_N(x) = y_H(x) + y_p(x)$

$y_H = C \cdot f(x)$ ... JE ŘEŠENÍ (HR)

$$y_H' + y_H = 0$$

$$C \cdot f'(x) + a \cdot (f(x)) = 0$$

$$C \cdot \underbrace{[f'(x) + a \cdot f(x)]}_{0} = 0$$

$$y_p(x) = E(x) \cdot f(x)$$

$$y_p'(x) = E'(x) \cdot f(x) + E(x) \cdot f'(x)$$

DOSADÍM DO: $y_p'(x) + a(x) - y_p(x) = b(x)$

$$E'(x) \cdot f(x) + E(x) \cdot f'(x) + a(x)\,E(x) \cdot f(x) = b(x)$$

$$E'(x) \cdot f(x) + E(x) \underbrace{[f'(x) + a(x) f(x)]}_{0} = b(x)$$

$C \cdot f(x) =$ ... ŘEŠENÍ HR

15

MINULE JSME ŘEŠILI ŘEŠENÍ DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC, KDE JSME MĚLI ZADANOU NĚJAKOU TAKOVOUTO ROVNICI $y'(x) + a(x) \cdot y(x) = f(x)$

1) TU JSME ŘEŠILI TAK, ŽE JSME ~~[illegible]~~ NALEZLI ŘEŠENÍ HOMOGENÍ ROVNICE $y_H(x) = ?$ (ŘEŠENÍ POMOCÍ SEPARACE PROMĚNNÝCH.

2) POTOM MUSÍME NALÉZT PARTIKULÁRNÍ ŘEŠENÍ NEHOMOGENÍ ROVNICE, (KTERÉ JDE OBČAS UHÁDNOUT), PAK SE TO DÁ ŘEŠIT POMOCÍ METODY VARIACE KONSTANT

$$y_p(x) = ?$$

3) NAKONEC CELKOVÉ ŘEŠENÍ JE DÁNO TAKTO:

$$y_N(x) = y_H + y_P$$

ŘEŠTE DIFERENCIÁLNÍ ROVNICI

$$y' + 2y = 4x$$

1) HOMOGENÍ ROVNICE

$$y' + 2y = 0$$
$$y' = -2y$$
$$\frac{dy}{dx} = -2y \qquad y \neq 0$$
$$\frac{dy}{y} = -2\,dx \qquad \text{KONST.} \in \mathbb{R}$$
$$-\frac{1}{2}\int \frac{dy}{y} = \int dx \qquad -\frac{1}{2}\ln y = x + \text{konst}$$
$$\ln y = -2x + \text{konst}$$
$$y = \pm k \cdot e^{-2x}$$
$$A = \pm k$$

OVĚŘIT $y = 0$ JESTLI TO JE NEBO NENÍ ŘEŠENÍ, DOSADÍM DO PRVNÍ ROVNICE $y' + 2y = 0$

LEVÁ STRANA $0 + 2 \cdot 0 = 0$

PRAVÁ STRANA $0 = 0$, L=P, ANO $y = 0$ JE TAKÉ ŘEŠENÍ

ŘEŠENÍ $y_H = A \cdot e^{-2x}$, $A \in \mathbb{R}$

2) PARTIKULÁRNÍ ŘEŠENÍ - HLEDÁME V TOMTO TVARU, - METODA VARIACE KONSTANT $y_p(x) = C(x)\, e^{-2x}$

(VARIACE KONSTANT PROTO, ŽE TĚMTO ~~K~~ KONSTANTĚ DOVOLÍME STÁT SE FUNKCÍ

$$y_P'(x) = G'(x)\cdot e^{-2x} + G(x)\cdot(-2\cdot e^{-2x})$$

$$y_P' + 2y_P = 4x$$

$$G'(x)\cdot e^{-2x} + \cancel{G(x)(-2e^{-2x}) + 2G(x)\cdot e^{-2x}} = 4x$$

MUSÍ SE ODEČÍST, JINAK JSME NĚKDE UDĚLALI CHYBU

$$G'(x)e^{-2x} = 4x$$

$$G'(x) = 4x\cdot e^{2x}$$

PER PARTES

$$\frac{dG(x)}{dx} = 4x\cdot e^{2x}$$

$$G(x) = \int 4x e^{2x} dx = \left| \begin{matrix} u = 4x & u' = 4 \\ v' = e^{2x} & v = \frac{e^{2x}}{2} \end{matrix} \right| =$$

$$= 4x\cdot\frac{e^{2x}}{2} - 2\cdot\underbrace{\int e^{2x}}_{\frac{e^{2x}}{2}} = 2xe^{2x} - e^{2x} + D$$

KONST. PO INTEGRACI

3) SLOŽENÍ DOHROMADY

$$y_N(x) = y_H(x) + y_P(x) = A\cdot e^{-2x} + G(x)\cdot e^{-2x} =$$

$$= A\cdot e^{-2x} + (2xe^{2x} - e^{2x} + D)e^{-2x} = A\cdot e^{-2x} + 2x - 1 + De^{-2x} =$$

$$y_N(x) = F\cdot e^{-2x} + 2x - 1$$

$A + D = F$

VYBRANÉ SPECIÁLNÍ TYPY DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC 1. ŘÁDU

1.) BERNOULLIOVA ROVNICE
2.) LAGRANGEOVA ROVNICE
3.) CLAIRAUTOVA ROVNICE
4.) EXAKTNÍ ROVNICE

VSUVKA – DIFERENCIÁLNÍ OPERÁTORY

(grad, div, rot)

PARCIÁLNÍ DERIVACE – TÝKÁ SE FUNKCE VÍCE PROMĚNNÝCH

$f(x; y; z)$

PARCIÁLNÍ = ČÁSTEČNÝ

(16)

DERIVUJEME PODLE KONKRÉTNÍ VYBRANÉ PROMĚNNÉ.

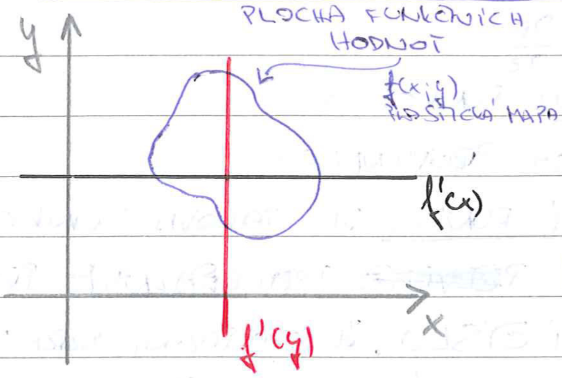
$$\frac{\partial f}{\partial x} = f'_x = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h;y;z) - f(x;y;z)}{h}$$

NA y A z KOUKÁME JAKO NA KONSTANTY

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f'_y = \lim_{h \to 0} \frac{f(x;y+h;z) - f(x;y;z)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = f'_z = \lim_{h \to 0} \frac{f(x;y;z+h) - f(x;y;z)}{h}$$

FUNKCE DVOU PROMĚNNÝCH



MŮŽU SI TO PŘEDSTAVIT TAK, ŽE DEFINIČNÍ OBOR JE NĚJAKÁ PODMNOŽINA OBYČEJNÉ ROVINY

KDYŽ BUDU CHTÍT POČÍTAT PARCIÁLNÍ DERIVACI FUNKCE x, ŘÍZNU ROVINU $f'(x)$ – JE TO SMĚRNICE TEČNY K TÉTO KŘIVCE V ZADANÉM BODĚ x. TO STEJNÉ PRO y

Př: $f(x;y;z) = x^2y^4z^5 - \sin(xy) + 24z^2 - 6x\ln(xy)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^4z^5 - y\cos(xy) - 6\ln(xy) - \frac{6\cancel{xy}}{\cancel{xy}} =$$

$$= 2xy^4z^5 - y\cos(xy) - 6\ln(xy) - 6$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3x^2z^5 - x\cos(xy) - \frac{6x}{xy} = 4y^3x^2 \cdot z^5 - x\cos(xy) - \frac{6}{y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 5x^2 \cdot y^4 \cdot z^4 + 48z$$

OPERÁTOR – JE TO PRAVIDLO, KTERÉ JEDNÉ FUNKCI PŘIŘADÍ NĚJAKÝ JINÝ VÝSTUP, TŘEBA JINOU FUNKCI.

$$\text{VSTUP} \longrightarrow \boxed{\text{OPERÁTOR}} \longrightarrow \text{VÝSTUP}$$

GRADIENT – grad f

– SOUVISÍ S NEJVĚTŠÍM SPÁDEM FCE

$$\text{grad } f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y}; \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

NABLA (VEKTOROVÝ OPERÁTOR)

$$f(x;y;z) \rightarrow \boxed{\text{grad}} \rightarrow \left(\frac{\partial f(x;y;z)}{\partial x}; \frac{\partial f(x;y;z)}{\partial y}; \frac{\partial f(x;y;z)}{\partial z}\right)$$

FUNKCE 3 REÁLNÝCH PROMĚNNÝCH — VEKTOROVÁ FUNKCE 3 REÁLNÝCH PROMĚNNÝCH.

DIVERGENCE – div $F = \nabla \cdot \vec{F}$

$$\vec{F} = (F_x; F_y; F_z) \rightarrow \boxed{\text{div}} \rightarrow \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}$$

VEKTOROVÁ FUNKCE 3 REÁLNÝCH PROMĚNNÝCH — SKALÁRNÍ FUNKCE 3 REÁLNÝCH PROMĚNNÝCH

$F_x = F_x(x;y;z)$

$F_y = F_y(x;y;z)$

$F_z = F_z(x;y;z)$

SKALÁRNÍ FUNKCE JE TAKOVÁ FUNKCE, ŽE SE ~~PŘEVRÁTÍ~~ TŘEM REÁLNÝM PROMĚNNÝM PŘIŘADÍ ČÍSLO. JE TO ZOBRAZENÍ, KTERÉ USPOŘ. TROJICI PŘIŘADÍ ČÍSLO

$(x;y;z) \rightarrow f(x;y;z) \in \mathbb{R}$

JE TO REÁLNÉ ČÍSLO

VEKTOROVÁ FUNKCE:

$(x;y;z) \rightarrow \vec{F}(x;y;z) = (F_x(x;y;z); F_y(x;y;z); F_z(x;y;z))$

TŘEM REÁLNÝM PROMĚNNÝM PŘIŘADÍM VEKTOROVOU FUNKCE

DO KAŽDÉHO BODU PROSTORU $(x;y;z)$ SE PŘIŘADÍ VEKTOR

$$\text{div}\vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (F_x; F_y; F_z) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}$$

FORMÁLNÍ SKAL. SOUČIN

ROTACE – rot $\vec{F} = \nabla \times \vec{F}$

FORMÁLNÍ VEKTOROVÝ SOUČIN

$$\vec{F} = (F_x; F_y; F_z) \rightarrow \boxed{\text{rot.}} \rightarrow \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}; \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}; \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)$$

VEKTOROVÁ FUNKCE 3 REÁLNÝCH PROMĚNNÝCH — VEKTOROVÁ FUNKCE 3 REÁLNÝCH PROMĚNNÝCH.

$F_x = F_x(x;y;z)$

$F_y = F_y(x;y;z)$

$F_z = F_z(x;y;z)$

FORMÁLNÍ VEKTOROVÝ SOUČIN

$$\text{rot}\vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z}\right) \times (F_x; F_y; F_z)$$

GRADIENT - SOUVISÍ SE SPÁDEM FUNKCE, JE TO SMĚR, VE KTERÉM FUNKCE NEJRYCHLEJI PADÁ

DIVERGENCE - SOUVISÍ S TOKEM VEKTOROVÉHO POLE NĚJAKOU PLOCHOU

ROTACE - SOUVISÍ S CIRKULACÍ VEKTOROVÉHO POLE PO UZAVŘENÉ KŘIVCE

DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE 2. ŘÁDU
LINEÁRNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE S KONSTANTNÍMI KOEFICIENTY.

$y''(x) + a \cdot y'(x) + b\, y(x) = f(x)$ $\quad y(x) = ?$ TOHLE CHCEME ZJISTIT

a, b - REÁLNÉ KONSTANTY $\quad f(x) =$ ... FUNKCE — $= 0$ HOMOGENNÍ ROV.

$\neq 0$ NEHOMOGENNÍ ROV.

VĚTA: CAUCHYOVA POČÁTEČNÍ ÚLOHA

- ŘÍKÁ NÁM NĚCO O POČTU ŘEŠENÍ DIFERENCIÁLNÍ ROV.

MÁME TEDY TAKOVOU DIF. ROVNICI $y'' + a y'(x) + b y(x) = f(x)$

$f(x)$ ... JE NA NĚJAKÉM INTERVALU SPOJITÁ, PAK EXISTUJE PRÁVĚ JEDNO ŘEŠENÍ DANÉ ROVNICE, TAK, ŽE $\underbrace{y(x_0) = A \; ; \; y'(x_0) = B}_{\text{POČÁTEČNÍ PODMÍNKY}}$

ŘEŠENÍ HOMOGENNÍ ROVNICE

$$\boxed{y'' + a y' + b y = 0}$$

VĚTA: $e^{\lambda x}$ JE ŘEŠENÍM DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE $y'' + a y' + b y = 0$

(PRÁVĚ TEHDY) $\Leftrightarrow$ KDYŽ λ JE ŘEŠENÍM TZV. CHARAKTERISTICKÉ ROVNICE:

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \quad \text{(CHR)}$$

PŘEDPOKLÁDEJME, ŽE $e^{\lambda x}$ JE ŘEŠENÍ

DŮKAZ: $y = e^{\lambda x}$ ... JE ŘEŠENÍ $y' = \lambda \cdot e^{\lambda x}$ $y'' = \lambda^2 \cdot e^{\lambda x}$

NYNÍ DOSADÍM ZPÁTKY DO HOMOGENNÍ ROVNICE

$$\underbrace{\lambda^2 \cancel{e^{\lambda x}}}_{y''} + \underbrace{a \cdot \lambda \cdot \cancel{e^{\lambda x}}}_{a \cdot y'} + b \cdot \cancel{e^{\lambda x}} = 0 \quad / \frac{1}{e^{\lambda x}}$$

ÚVAHY O EXPONENCIÁLE $e^{\lambda x} \neq 0$ NIKDY SE NEBUDE ROVNAT NULE PROTO TOHLE SE ROVNÁ NULE.

$$\lambda^2 + \lambda a + b = 0$$

$$\underbrace{\lambda^2 + \lambda a + b}_{0}$$

CHARAKTERISTICKÁ ROVNICE $\lambda^2 + \lambda a + b = 0$

- KVADRATICKÁ ROVNICE, MOHOU NASTAT 3 RŮZNÉ SITUACE

1) MÁ 2 RŮZNÉ REÁLNÉ KOŘENY $\lambda_1; \lambda_2$ $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$e^{\lambda_1 x}$ JE ŘEŠENÍ A STEJNĚ TAK I $e^{\lambda_2 x}$, MŮŽEME TO PAK ZAPSAT JAKO $\underbrace{y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}}$

TAKTO MŮŽEME ZAPSAT VŠECHNA ŘEŠENÍ

2) MÁ 2 KOMPLEXNĚ SDRUŽENÉ KOŘENY $\lambda_1; \lambda_2$ ($\lambda_1 = a + b \cdot i$; $\lambda_2 = a - b \cdot i$)

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} = c_1 e^{(a+b \cdot i)} + c_2 e^{(a-b \cdot i)} = e^{ax}(c_1 e^{ibx} + c_2 e^{-ibx}) =$$

MŮŽEME PROPOJIT S FYZIKOU, POMOCÍ EULEROVY IDENTITY A PŘEPSAT DO TOHOTO TVARU $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$

$$= e^{ax}\left(c_1 \cdot (\cos bx + i \sin bx) + c_2(\underbrace{\cos(-bx)}_{\text{SUDÁ}} + \underbrace{i \sin(-bx)}_{\text{LICHÁ}})\right) =$$

$$= e^{ax}(c_1 \cos bx + c_1 \cdot i \cdot \sin bx + c_2 \cos bx - i c_2 \cdot \sin(bx)) =$$

$$= e^{ax}((\underbrace{c_1 + c_2}_{A}) \cos bx + i(\underbrace{c_1 - c_2}_{B}) \sin bx) = e^{ax} \cdot (A \cos bx + i B \cdot \sin bx)$$

$\underline{A; B \in \mathbb{R}}$

3) CHARAKTERISTICKÁ ROVNICE MÁ DVOJNÁSOBNÝ REÁLNÝ KOŘEN

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

ŘEŠENÍ JSOU POTOM VE TVARU: $e^{\lambda x}$; $e^{\lambda x}$;

$$y = c_1 e^{\lambda x} + c_2 e^{\lambda x} = (\underbrace{c_1 + c_2}_{A}) e^{\lambda x} = A e^{\lambda x}$$

MÁME JEN JEDNU INTEGRAČNÍ KONSTANTU, I KDYŽ CHCEME DVĚ.

(18.)

DEFINICE – ŘEKNEME, ŽE $y_1(x)$, $y_2(x)$ TVOŘÍ TZV. FUNDAMENTÁLNÍ SYSTÉM ŘEŠENÍ NA INTERVALU I JESTLIŽE PLATÍ:

1) $y_1(x)$; $y_2(x)$ JE ŘEŠENÍM DANÉ ROVNICE:

$$y'' + ay' + by = 0$$

2) PRO (VŠECHNA) $\forall$ x Z INTERVALU I PLATÍ:

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

WRONSKIÁN (WRONSKÉHO DETERMINANT – RŮZNÝ OD NULY)

VĚTA: POKUD $y_1(x)$; $y_2(x)$ TVOŘÍ FUNDAMENTÁLNÍ SYSTÉM ŘEŠENÍ ROVNICE $y'' + ay' + by = 0$, PAK KAŽDÉ ŘEŠENÍ TÉTO ROVNICE JE VE TVARU:

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

- TATO VĚTA NÁM ŘÍKÁ, ŽE STAČÍ NAJÍT FUNDAMENTÁLNÍ SYSTÉM ŘEŠENÍ, JSOU TO DVĚ FUNKCE, PAK VŠECHNA ŘEŠENÍ JSOU V TOMTO TVARU: $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$

DŮKAZ:

1) NEJPRVE MUSÍME DOKÁZAT, ŽE $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ JE ŘEŠENÍM ROVNICE $y'' + ay' + by = 0$ PRACH OBYČEJNÉ DOSAZENÍ

2) DOKAŽME, ŽE KAŽDÉ ŘEŠENÍ ROVNICE: $y'' + ay' + by = 0$ JE VE TVARU $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$

PŘEDPOKLÁDEJME, ŽE MÁME ZADANÝ POČÁTEČNÍ PODMÍNKY:

$$y(x_0) = A \quad ; \quad y'(x_0) = B$$

DOSADÍME

$$y(x_0) = C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = A$$
$$y'(x_0) = C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) = B$$

MÁ SE TO ROVNAT PODLE POČÁTEČNÍCH PODM.

MUSÍME TEDY NAJÍT JEDNOZNAČNÉ VYJÁDŘENÍ KONSTANT C_1 A C_2 => ŘEŠÍM SOUSTAVU LINEÁRNÍCH ROVNIC PRO DVĚ NEZNÁMÉ C_1; C_2

ROZŠÍŘENÁ MATICE SOUSTAVY

ALGEBRA

$$\underbrace{\begin{matrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{matrix}}\left|\begin{matrix} A \\ B \end{matrix}\right) \Rightarrow$$ SOUSTAVA MÁ PRÁVĚ 1 ŘEŠENÍ $c_1; c_2$

DETERMINANT MATICE SOUSTAVY $\neq 0$
(WRONSKIAN)

1) CHARAKTERISTICKÁ ROVNICE MÁ DVA RŮZNÉ REÁLNÉ KOŘENY $\lambda_1 \neq \lambda_2$

PLATÍ: $y_1 = e^{\lambda_1 x}$; $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ TVOŘÍ FUNDAMENTÁLNÍ SYSTÉM ŘEŠENÍ

OVĚŘENÍ $$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \cdot e^{\lambda_1 x} - \lambda_1 e^{\lambda_1 x} \cdot e^{\lambda_2 x} = \underbrace{(\lambda_2 - \lambda_1)}_{\neq 0} \underbrace{e^{\lambda_2 x}}_{\neq 0} \underbrace{e^{\lambda_1 x}}_{\neq 0} \neq 0$$

KAŽDÉ ŘEŠENÍ DIF. ROVNICE JE VE TVARU $y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$

2) CHARAKTERISTICKÁ ROVNICE MÁ 2 KOMPLEXNĚ SDRUŽENÉ KOŘENY

$\lambda_1 = a + ib$; $\lambda_2 = a - ib$

PLATÍ $y_1 = e^{\lambda_1 x}$; $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ TVOŘÍ FUNDAMENTÁLNÍ SYSTÉM ŘEŠENÍ

OVĚŘENÍ $$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{(a+ib)x} & e^{(a-ib)x} \\ (a+ib)e^{(a+ib)x} & (a-ib)e^{(a-ib)x} \end{vmatrix} =$$

$$= (a-ib)e^{2ax} - (a+ib)e^{2ax} = \underbrace{e^{2ax}}_{\neq 0} \underbrace{(\cancel{a} - ib - \cancel{a} - ib)}_{\neq 0} \neq 0$$

KAŽDÉ ŘEŠENÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE JE VE TVARU

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

$$y(x) = e^{ax}(A \cos bx + C \sin bx)$$

3) CHARAKTERISTICKÁ ROVNICE MÁ DVOJNÁSOBNÝ REÁLNÝ KOŘEN

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

OPĚT PLATÍ, ŽE FUNDAMENTÁLNÍ SYSTÉM ŘEŠENÍ TVOŘÍ

$y_1 = e^{\lambda x}$ $y_2 = e^{\lambda x} \cdot x$

(19)

~~OVĚŘENÍ~~ $y_1 = e^{\lambda x}$ ... JE ZJEVNĚ ŘEŠENÍ

1 KROK $y_2 = x \cdot e^{\lambda x}$ ... JE TAKÉ ŘEŠENÍ?

$$\frac{\partial y_2}{\partial x} = y_2' = e^{\lambda x} + \lambda x \cdot e^{\lambda x}$$

$$y_2'' = \lambda \cdot e^{\lambda x} + \lambda e^{\lambda x} + x \cdot \lambda^2 e^{\lambda x} = \underline{x \cdot \lambda^2 e^{\lambda x} + 2\lambda e^{\lambda x}}$$ NYNÍ DOSADÍME SEM:

$$y'' + ay' + by = 0$$

$$x \cdot \lambda^2 e^{\lambda x} + 2 \cdot \lambda \cdot e^{\lambda x} + a(e^{\lambda x} + x \cdot \lambda e^{\lambda x}) + b \cdot e^{\lambda x} \cdot x = 0$$

$$x \cdot e^{\lambda x}\underbrace{(\lambda^2 + a\lambda + b)}_{\overset{?}{=}0} + 2 \cdot \lambda \cdot e^{\lambda x} + a \cdot e^{\lambda x} = e^{\lambda x}(\lambda \cdot 2 + a)$$

POTŘEBUJEME DOKÁZAT, ŽE TOHLE JE ROVNO NULE

$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$

λ – DVOJNÁSOBNÝ KOŘEN, PAK ~~DETERMINANT~~ DISKRIMINANT ROVEN NULE

$D = a^2 - 4b = 0$

$$\lambda = \frac{-a \pm \sqrt{D}}{2} = \frac{-a \pm \overset{0}{D}}{2} = -\frac{a}{2}$$

2 KROK – MUSÍME OVĚŘIT (WRONSKIÁN)

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} e^{\lambda x} & x e^{\lambda x} \\ \lambda e^{\lambda x} & (e^{\lambda x} + x \cdot \lambda \cdot e^{\lambda x}) \end{vmatrix} = e^{2\lambda x} + x \cdot e^{2\lambda x} \cdot \lambda - \lambda \cdot x \cdot e^{2\lambda x} = \underline{e^{2\lambda x}} \neq 0$$

KAŽDÉ ŘEŠENÍ JE TEDY VE TVARU:

$$y(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 e^{\lambda x} \cdot x$$

(20.)

MINULÉ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE II ŘÁDU

CHARAKTERISTICKÁ ROVNICE MÁ TENTO TVAR: ZÁKLADNÍ $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$

TATO ROVNICE MÁ 3 MOŽNÁ ŘEŠENÍ:

1) $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ... DVA RŮZNÉ REÁLNÉ KOŘENY, MLUVILI JSME O FUNDAMENTÁLNÍM SYSTÉMU ŘEŠENÍ. OBECNÉ ŘEŠENÍ JE PAK VE TVARU:

$$y = c_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

2) $\lambda_1 = a + ib \quad b \neq 0$

$\lambda_2 = a - ib$ MÁME PAK DVA RŮZNÉ KOMPLEXNĚ SDRUŽENÉ KOŘENY. OBECNÉ ŘEŠENÍ LZE PAK ZAPSAT TAKTO:

$$y = c_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

MÁME TAM ALE KOMPLEXNÍ ČÍSLA, MŮŽEME TO POMOCÍ ÚPRAV A EULEROVY IDENTITY PŘEPSAT JAKO:

$$y = e^{ax}(A \cdot \cos bx + B \cdot \sin bx)$$

3) JEDEN DVOJNÁSOBNÝ KOŘEN $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

OPĚT VEDE K FUNDAMENTÁLNÍMU SYSTÉMU ŘEŠENÍ, OBECNÉ ŘEŠENÍ JE PAK VE TVARU: $y = x \cdot c_1 e^{\lambda x} + c_2 e^{\lambda x}$

PŘÍKLADY:

a) $y'' + y = 0$
b) $y'' - 2y' + y = 0$
c) $y'' = 0$

a) $\lambda^2 + 1 = 0$

$\lambda = \pm i = \pm\sqrt{i^2}$ $\quad \lambda = a + ib$, $a = 0$, $b = 1$

$y = c_1 \cdot e^{ix} + c_2 e^{-ix}$

$y = e^{0x}(A \cdot \cos(x) + B \cdot \sin(x))$

b) $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$

$D = 0 \quad \lambda_{1,2} = \frac{2 \pm 0}{2} = 1$

$\lambda_1 = \lambda_2 \quad y = x \cdot c_1 \cdot e^x + c_2 e^x$

c) $\lambda^2 = 0$

$\lambda_1 = \lambda_2$

$y = c_1 \cdot x + c_2$

NEHOMOGENNÍ ROVNICE

- JSOU TO LINEÁRNÍ OBYČEJNÉ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE DRUHÉHO ~~DRUHU~~ ŘÁDU, S NENULOVOU PRAVOU STRANOU

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

$f(x)$ – NENULOVÁ FUNKCE

$a; b \in \mathbb{R}$ – KONSTANTY

DÍKY LINEARITĚ PLATÍ TATO VĚTA:

$y_1(x)$ ... JE ŘEŠENÍM $y'' + ay' + by = f_1(x)$

$y_2(x)$ ... JE ŘEŠENÍM $y'' + ay' + by = f_2(x)$

POTOM Z TOHO PLYNE ZÁVĚR:

$c_1; c_2$ = KONST $c_1 \cdot y_1(x) + c_2 y_2(x)$ JE ŘEŠENÍM TAKY TÉTO ROVNICE

$$y'' + ay' + by = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$$

DŮKAZ: ROZEPSÁNÍM

Z TOHOTO PLYNE DŮSLEDEK:

HOMOGENNÍ

$$y_N(x) = y_H(x) + y_P(x)$$

PARTIKULÁRNÍ

JAKÉKOLIV ŘEŠENÍ NEHOMOGENNÍ ROVNICE JE DÁNO SOUČTEM Z HOMOGENIZOVANÉ ROVNICE A PARTIKULÁRNÍHO ŘEŠENÍ NEHOMOGENNÍ ROVNICE.

JAK ZJISTIT PARTIKULÁRNÍ ŘEŠENÍ:

1) UHÁDNETE
2) METODA VARIACE KONSTANT
3) "SPECIÁLNÍ TYP PRAVÉ STRANY"

METODA VARIACE KONSTANT

BUDEME MÍT TŘEBA TAKOVOUTO ROVNICI:

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

POKUD BUDEME ŘEŠIT Z HOMOGEN. ROVNICI $y_1(x); y_2(x)$ ... TVOŘÍ FUNDAMENTÁLNÍ SYSTÉM ŘEŠENÍ Z HOMOGENIZOVANÉ ROVNICE:

$$y_H = c_1 \cdot y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

21

PARTIKULÁRNÍ ŘEŠENÍ PAK HLEDÁME VE TVARU:

$y_p = C_1(x)\, y_1(x) + C_2(x)\, y_2(x)$ Z KONSTANTY SE STANE FUNKCE

PRO NEZNÁMÉ FUNKCE $C_1(x)$; $C_2(x)$ PLATÍ TATO SOUSTAVA

$$C_1'(x)\, y_1(x) + C_2'(x)\, y_2(x) = 0$$
$$C_1'(x)\, y_1'(x) + C_2'(x)\, y_2'(x) = f(x)$$

NEJDŘÍVE MUSÍME NALÉZT FUNDAMENTÁLNÍ SYSTÉM ŘEŠENÍ ZHOMOGENIZOVANÉ ROVNICE, PAK POMOCÍ KONSTANT SESTAVÍME HOMOGENNÍ ŘEŠENÍ, PAK KONSTANTÁM DOVOLÍME ABY SE STALY FUNKCEMI, PAK SESTAVÍME TUHLE SOUSTAVU, VYŘEŠÍME, INTEGRUJEME A NAKONEC

$$y_N(x) = y_H(x) + y_p(x)$$

SPECIÁLNÍ TYP PRAVÉ STRANY

a) $f(x) = e^{\alpha x}(d_m x^m + d_{m-1} x^{m-1} + \dots + d_1 x + d_0)$

POKUD MÁ PRAVÁ STRANA TAKOVÝTO TVAR, PAK HLEDÁME PARTIKULÁRNÍ ŘEŠENÍ V TOMTO TVARU:

$$y_p(x) = x^r e^{\alpha x}(c_m x^m + c_{m-1} x^{m-1} + \dots + c_1 \cdot x + c_0)$$

S TÍM, ŽE r MŮŽE NABÝVAT 3 RŮZNÝCH HODNOT

r:
- 0 … α NENÍ KOŘEN CHARAKTERISTICKÉ ROVNICE
- 1 … α JE JEDNODUCHÝ KOŘEN ——"——
- 2 … α JE DVOJNÁSOBNÝ KOŘEN ——"——

b) $f(x) = e^{\alpha x}\left(P_m(x) \cdot \cos\beta \cdot x + Q_n(x) \cdot \sin\beta x\right)$

POLYNOM STUPNĚ n

ABY POLYNOMY STUPNĚ m A n, ALE JINÉ

PŘ. PRAVÁ STRANA $f(x) = e^{2x}((2x^2-3)\cos 2x)$

$\alpha + i\beta$

2

r^2

PARTIKULÁRNÍ ŘEŠENÍ PAK HLEDÁME V TOMTO TVARU:

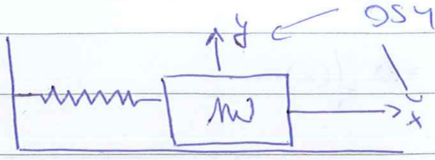
$$y_p(x) = x^r \cdot e^{\alpha x}(Q_s(x) \cdot \cos\beta x + T_s(x) \cdot \sin\beta \cdot x)$$

OPĚT POLYNOM STUPNĚ s, ALE RŮZNÉ

$S = \max\{m; n\}$ – JE TO MAXIMUM Z HODNOT m A n

r:
- 0 … $\alpha + i\beta$ NENÍ KOŘEN CHARAKTERISTICKÉ ROVNICE
- 1 … $\alpha + i\beta$ JE KOŘENEM (JEDNODUCHÝM) CHARAKT. ROVNICE
- 2 … $\alpha + i\beta$ JE DVOJNÁSOBNÝ KOŘEN ——"——

Př | MÁME ČÁSTICI O HMOTNOSTI m, NA VODOROVNÉ PODLOŽCE, PŘIPNUTÁ K PRUŽINCE, KTERÁ JE PŘIPNUTÁ KE ZDI (IDEÁLNÍ PRUŽINA). POHYB PO PODLOŽCE BEZ TŘENÍ. POHYB POUZE VODOROVNĚ PO PODLOŽCE



$x(t_0) = x_0$ ZÁKLADNÍ POLOHA

$v(t=0) = v_0$ V NENAPJATÁ PRUŽINA

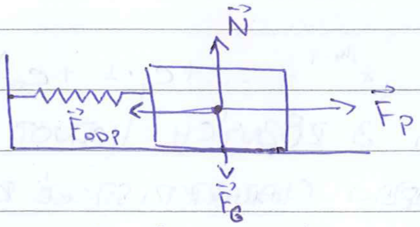
a) $x(t) = ?$; $v(t) = ?$, ZA PŘEDPOKLADU, ŽE ODPOR PROSTŘEDÍ JE ZANEDBATELNÝ.

b) $x(t) = ?$; $v(t) = ?$, SÍLA ODPORU PROSTŘEDÍ JE PŘÍMO ÚMĚRNÁ OKAMŽITÉ RYCHLOSTI.

c) $x(t) = ?$; $v(t) = ?$ SÍLA ODPORU PROSTŘEDÍ JE PŘÍMO ÚMĚRNÁ OKAMŽITÉ RYCHLOSTI A SOUČASNĚ PŮSOBÍ PERIODICKÁ VNĚJŠÍ SÍLA $F(x) = F_0 \cos \Omega t$

ZAČNEME PŘÍPADEM b), PROTOŽE a) JE SPEC. PŘÍPAD A STAČÍ PAK DÁT ODPOROVOU SÍLU ROVNU NULE.

b)



2. NEWTONŮV ZÁKON

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$$\vec{F}_G + \vec{N} + \vec{F}_{odp} + \vec{F}_p = m \cdot \vec{a} = m \cdot \ddot{\vec{r}}$$

$\vec{F}_G = (0; -F_G) = (0; -mg)$

$\vec{N} = (0; N)$

$\vec{F}_p = (-kx; 0)$

$\vec{F}_{odp} = (-b\dot{x}; 0)$

$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{x}; 0)$

$x: \quad -kx - b\dot{x} = m\ddot{x}$

$y: \quad -mg + N = 0$

$$\boxed{m\ddot{x} + b\dot{x} + k \cdot x = 0}$$

$b = 2 \cdot \delta \cdot m$ UMĚLÝ KROK

$$m\ddot{x} + 2\delta m \cdot \dot{x} + kx = 0$$

$$\boxed{\ddot{x} + 2\delta \cdot \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0}$$

OZNAČÍME JAKO ω_0^2, COŽ JE VLASTNÍ FREKVENCE KMITÁNÍ.

22.

$$\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

NYNÍ CHARAKTERISTICKÁ ROVNICE:

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2\delta \pm \sqrt{4\delta^2 - 4\omega_0^2}}{2} = \frac{-2\delta \pm 2\sqrt{\delta^2-\omega_0^2}}{2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 \mp \omega_0^2}$$

MOHOU NASTAT TYTO PŘÍPADY

- $\delta > \omega_0$ VELKÉ TLUMENÍ … DVA RŮZNÉ REÁLNÉ KOŘENY CHARAKTERISTICKÉ ROVNICE. ŘEŠENÍ PAK VYPADÁ TAKTO:

$$\boxed{x(t) = C_1 \cdot e^{(-\delta - \sqrt{\delta^2-\omega_0^2})t} + C_2 e^{(-\delta + \sqrt{\delta^2-\omega_0^2})t}}$$

$t \to \infty$, KMITÁNÍ RYCHLE POBĚŽÍ K NULE (EXPONENCIÁLE) O TOM JAK RYCHLE ROZHODUJE δ

- $\delta = \omega_0$ KRITICKÉ TLUMENÍ … JEDEN DVOJNÁSOBNÝ REÁLNÝ KOŘEN CHARAKTERISTICKÉ ROVNICE

$$\boxed{x(t) = C_1 e^{-\delta t} + C_2 \cdot t \cdot e^{-\delta t} = e^{-\delta t}(C_1 + t \cdot C_2)}$$

PRO $t \to \infty$ TO KMITÁNÍ KLESÁ K NULE, LINEÁRNÍ ZÁVISLOST ROZSTE POMALEJI NEŽ EXPONENCIÁLA KLESÁ UTLUMÍ SE RYCHLEJI NEŽ V 1. PŘÍPADĚ.

- $\omega_0 > \delta$ λ_1, λ_2 … DVA RŮZNÉ KOMPLEXNĚ ZDRUŽENÉ KOŘENY

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \underbrace{\sqrt{-(\omega_0^2-\delta^2)}}_{\mathbb{R}} = -\delta \pm i\underbrace{\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}}_{\omega} = -\delta \pm i\omega$$

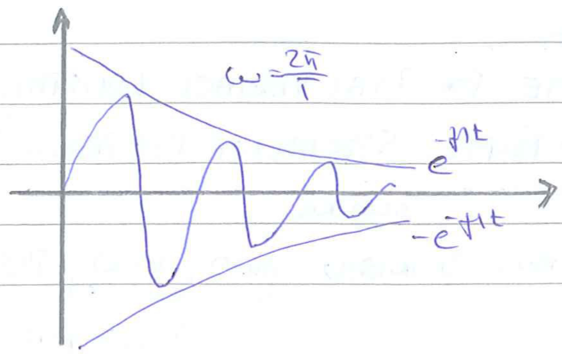
DOSTANEME PAK:

$$\boxed{x(t) = e^{-\delta t}(A \cos\omega t + B \cdot \sin\omega t)}$$

ω … FREKVENCE TLUMENÉHO KMITAVÉHO POHYBU.

INT. KONSTANTY ZJISTÍM Z INTEG. PODM.

KDYŽ $\delta = 0$ … $x(t) = A \cdot \cos\omega_0 t + B \sin\omega_0 t$, ω_0 … FREKVENCE VLASTNÍHO NETLUM. KMITÁNÍ



URČOVÁNÍ KONSTANT A; B:

BUDEME JE URČOVAT Z POČÁTEČNÍCH PODMÍNEK $x(t=0)=x_0$ A $v(t=0)=v_0$. HNED DOSADÍME ZA x

$$x(t=0)=x(0)=e^{-\mu\cdot 0}(A\cdot\cos\omega\cdot 0+B\cdot\sin\omega\cdot 0)=$$
$$=1\cdot A\cdot\cos 0=\underline{\underline{A=x_0}}$$

NYNÍ ZDERIVUJEME $\underline{x}$ ABYCHOM ZÍSKALI $\underline{v}$

$$v(t)=\dot{x}(t)=-\mu\cdot e^{-\mu t}(A\cdot\cos(\omega t)+B\cdot\sin(\omega t))+e^{-\mu t}\cdot$$
$$\cdot(-A\omega\sin\omega t+B\omega\cdot\cos\omega t)$$

$$v(t=0)=v(0)=-\mu e^{-\mu\cdot 0}(A\cdot\cos(\omega\cdot 0)+B\sin(\omega\cdot 0))+$$
$$+e^{-\mu\cdot 0}(-A\cdot\omega\sin(\omega\cdot 0)+B\omega\cdot\cos(\omega\cdot 0))=$$
$$=-\mu A+B\omega=v_0$$

NYNÍ DOSADÍM ZA A $\quad B\omega=v_0+\mu x_0$

$$B=\frac{v_0+\mu x_0}{\omega}$$

ZÁVĚR: $\underline{x(t)=e^{-\mu t}\left(x_0\cdot\cos\omega t+\frac{v_0+\mu x_0}{\omega}\cdot\sin\omega t\right)}$

c) MÁME NEHOMOGENÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICI

MÁME VNUCUJÍCÍ SÍLU S HARMONICKOU FREKVENCÍ

$$\underline{\ddot{x}+2\mu\dot{x}+\omega^2x=F_0\cdot\cos\Omega t}$$

VYŘEŠÍME NEJDŘÍVE HOMOGENNÍ ROVNICI:

$$x_H(t)=e^{-\mu t}(A\cos\omega t+B\sin\omega t)\qquad \omega=\sqrt{\omega_0^2-\mu^2}$$

NEMŮŽU POUŽÍT HODNOTY PRO A; B TY PLATÍ POUZE PRO PŘÍPAD HOMOGENNÍ ROVNICE, TAK PROTO TADY – OBECNĚ.

MUSÍME ZJISTIT PARTIKULÁRNÍ ŘEŠENÍ A TEPRVE POTOM BUDEME URČOVAT KONSTANTY.

$x_{P(t)}=?\qquad f(t)=F_0\cdot\cos\Omega t$

$\alpha=0\ ;\ \beta=\Omega\qquad$ NEBUDEME POUŽÍVAT VARIACI KONSTANT, PROTOŽE MÁME SPECIÁLNÍ TYP PRAVÉ STRANY.

$\alpha=0$ ← EXPONENCIÁLA $\qquad\beta=\Omega$ ← KOEFICIENT SINU A COSINU

PRO COSINUS: $P_m(x)=F_0$
PRO SINUS: $Q_n(x)=0$

STUPEŇ POLYNOMU $\underbrace{m=0\ ;\ n=0}$, POTOM $\underline{S=0}$

↑ MAXIMUM Z NICH

(23)

$$x_p(t) = (\underbrace{Q_S}_{\text{KONSTANTY } E} \cdot \cos \Omega_1 t + \underbrace{T_S}_{\text{KONSTANTY } H} \cdot \sin \Omega_1 t)$$

E; H JSOU KONSTANTY ZATÍM NEZNÁMÉ

$$x_p(t) = E \cdot \cos \Omega_1 t + H \cdot \sin \Omega_1 t$$

ZDERIVUJI

$$\dot{x}_p(t) = -E \cdot \Omega_1 \sin \Omega_1 t + H \cdot \Omega_1 \cdot \cos \Omega_1 t$$

OPĚT ZDERIVUJI

$$\ddot{x}_p(t) = -E \cdot \Omega_1^2 \cdot \cos \Omega_1 t - H \cdot \Omega_1^2 \cdot \sin \Omega_1 t$$

TYTO 3 ROVNICE DOSADÍM DO ROVNICE $\ddot{x} + 2 f_1 \dot{x} + \omega^2 x = F_0 \cdot \cos \Omega_1 t$

$$-E \cdot \Omega_1^2 \cos \Omega_1 t - H \cdot \Omega_1^2 \sin \Omega_1 t + 2 f_1 \cdot (-E \Omega_1 \cos \Omega_1 t + H \cdot \Omega_1 \sin \Omega_1 t) +$$
$$+ \omega^2 \cdot E \cos \Omega_1 t + H \sin \Omega_1 t = F_0 \cdot \cos \Omega_1 t$$

ŘEŠENÍ JE ∞ MNOHO, ROVNICE MUSÍ PLATIT VE VŠECH PŘÍPADECH.
MŮŽEME SI ZVOLIT OKAMŽIKY:

1) VOLBA t TAK ABY $\sin \Omega_1 t = 0$ A $\cos \Omega_1 t = 1$
2) ——— " ——— $\sin \Omega_1 t = 1$ A $\cos \Omega_1 t = 0$

1) $-E \Omega_1^2 + 2 f_1 \cdot H \cdot \Omega_1 + \omega^2 \cdot E = F_0$
2) $-H \Omega_1^2 - 2 f_1 E \Omega_1 + H \cdot \omega_0 = 0$

MÁM SOUSTAVU PRO DVĚ NEZNÁMÉ, TU VYŘEŠÍM A DOSTANU

$$E = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{\omega_0^2 - \Omega_1^2}{(\omega_0^2 - \Omega_1^2) + (2 f_1 \Omega_1)^2}$$

$$H = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{2 f_1 \cdot \Omega_1}{(\omega_0^2 - \Omega_1^2) + (2 f_1 \Omega_1)^2}$$

VÝSLEDNÉ ŘEŠENÍ JE DÁNO $x(t) = x_H(t) + x_p(t)$:

$$x(t) = -e^{-f_1 t} \cdot (A \cos \omega t + B \cdot \sin \omega t) + \frac{F}{m} \cdot \frac{\omega_0^2 - \Omega_1^2}{(\omega_0^2 - \Omega_1^2) + (2 f_1 \Omega_1)^2} \cdot$$
$$\cdot \cos \Omega_1 t + \frac{F_0}{m} \cdot \frac{2 f_1 \Omega_1}{(\omega_0^2 - \Omega_1^2) + (2 f_1 \Omega_1)^2} \cdot \sin \Omega_1 t$$

TEPRVE TEĎ BYCHOM URČOVALI KONSTANTY $A; B$ Z POČÁTEČNÍCH PODMÍNEK $x(t=0)=x_0$ A $v(t=0)=v_0$. AKORÁT BY TO BYLO HODNĚ PRACNÉ. ČÍM VĚTŠÍ BUDE t TÍM TEN PRVNÍ ČLEN S A a B BUDE ZANEDBATELNĚJŠÍ.

LINEÁRNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE n-TÉHO ŘÁDU S KONSTANTNÍMI KOEFICIENTY

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + a_{n-2} y^{(n-2)} + \dots + a_1 y + a_0 = f(x)$$

PLATÍ $a_{n-1}; a_{n-2}; \dots; a_1; a_0$ – REÁLNÉ KONSTANTY

VŠECHNO CO VÍME O ROVNICÍCH PRVNÍHO ŘÁDU JEDNODUŠE ZOBECNÍME. PRVNÍ KROK, ŘEŠILI JSME ZHOMOGENIZOVANOU ROVNICI A HLEDALI JSME ŘEŠENÍ HOMOGENNÍ ROVNICE, TO JSME ZJIŠŤOVALI PŘES CHARAKTER. ROVNICI.

1) HOMOGENNÍ ROVNICE

TA MÁ n-ŘEŠENÍ

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$$ LIN. ROVNICE n-TÉHO STUPNĚ

URČÍME KOŘENY $\lambda_1 \dots \lambda_n$ → TOMU BY ODPOVÍDAL FUNDAMENTÁLNÍ SYSTÉM ŘEŠENÍ

VYŠŠÍ STUPNĚ SE ŘEŠÍ OBTÍŽNĚ, TEĎ ŘEKNĚME TŘEBA ŽE:

$\lambda_1; \lambda_2; \lambda_3$ – RŮZNÉ $\quad \lambda_4 = \lambda_5 = \dots = \lambda_n = \lambda$ VÍCENÁSOBNÝ

$$y_H = \underbrace{c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + c_3 e^{\lambda_3 x}}_{\text{REÁLNÉ RŮZNÉ JEDNODUCHÉ KOŘENY}} + \underbrace{c_4 e^{\lambda_4 x} + x \cdot c_5 \cdot e^{\lambda x} + c_6 \cdot x^2 \cdot e^{\lambda x} + \dots + c_n e^{\lambda_n x} \cdot x^{n-4}}_{\text{VÍCENÁSOBNÝ}}$$

TÝKÁ SE KOŘENE λ, KTERÝ JE $n-4$ NÁSOBNÝ

2) PARTIKULÁRNÍ ŘEŠENÍ – PRO NENULOVOU PRAVOU STRANU
– BUĎ VARIACÍ KONSTANT, NEBO SPEC. TYP PRAVÉ STRANY

3) NEHOMOGENNÍ ŘEŠENÍ $\boxed{y_N = y_H + y_P}$

24.

Př. 1 NAPIŠTE OBECNÉ ŘEŠENÍ, KDYŽ VÍME; KOŘENY CHAR. ROVNICE

$$\underbrace{\lambda_1 = 6;\ \lambda_2 = -2}_{\text{(JEDNODUCHÝ)}};\ \underbrace{\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = -1}_{\text{(TROJNÁSOBNÝ)}};\ \lambda_6 = 1-2i;\ \lambda_7 = 1+2i;\ \lambda_8 = \lambda_9;\ \lambda_{10} = 3$$

(DVOJNÁSOBNÝ)

$$y = c_1 e^{6x} + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{-x} + x \cdot c_4 e^{-x} + x^2 \cdot c_5 \cdot e^{-x} + c_6 \cdot e^{(1-2i)x} + c_7 e^{(1+2i)x} +$$
$$+ c_8 e^{0 \cdot x} + x c_9 e^{0 \cdot x} + c_{10} \cdot e^{3x}$$

FUNDAMENTÁLNÍ: (c_i — KONSTANTY)

$y_1 = e^{6x}$; $y_2 = e^{-2x}$; $y_3 = e^{-x}$; $y_4 = x \cdot e^{-x}$; $y_5 = x^2 \cdot e^{-x}$; $y_6 = e^{(1-2i)x}$; $y_7 = e^{(1+2i)x}$
$y_8 = e^{0x} = 1$; $y_9 = x \cdot e^{x \cdot 0} = x$; $y_{10} = e^{+3x}$

CHARAKTERISTICKÁ ROVNICE

$$(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)(\lambda-\lambda_4)(\lambda-\lambda_5)(\lambda-\lambda_6)(\lambda-\lambda_7)(\lambda-\lambda_8)(\lambda-\lambda_9)(\lambda-\lambda_{10})=0$$

Př. 2, URČETE OBECNÉ ŘEŠENÍ ROVNICE:

$$y''' - 2y'' + y' = x$$
$$\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda = x$$
$$\lambda(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = x$$

1) NEJDŘÍVE BUDETE ŘEŠIT ZHOMOGENIZOVANOU ROVNICI:

$$y''' - 2y'' + y' = 0$$ POLOŽÍME PRAVOU STRANU ROVNOU NULE.

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda = 0$$
$$\underbrace{\lambda(\lambda^2 - 2\lambda + 1)}_{(\lambda-1)^2} = 0$$
$$\lambda \cdot (\lambda - 1)^2 = 0$$

$\lambda_1 = 0$ JEDNODUCHÝ

$\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ DVOJNÁSOBNÝ

$$y_H = c_1 \cdot e^{0x} + c_2 \cdot e^{x} + x \cdot c_3 e^{x} = c_1 + c_2 e^{x} + x \cdot c_3 e^{x}$$

2) NEHOMOGENNÍ ROVNICE

MOŽNOSTI ŘEŠENÍ — VARIACE KONSTANT

— VYUŽITÍ SPECIÁLNÍHO TVARU PRAVÉ STRANY

TOTO NYNÍ POUŽIJETE

NEMÁME FUNKCE SINUS ANI COSINUS, MOHU PAK ŘÍCT, ŽE $\alpha = 0$

POLYNOM JE STUPNĚ $\underline{1}$, PARTIKULÁRNÍ ŘEŠENÍ BUDEME HLEDAT JAKO POLYNOM $f(x) = x \cdot k_1$

JEDNODUCHÝ KOŘEN

$r = 1$; $\alpha = 0$ $r = 2$ DVOJNÁSOBNÝ

$$y_p = x^r \cdot e^{\alpha x}(Ax + B) = x^r(Ax + B) = x \cdot (Ax + B)$$

MUSÍME URČIT NEZNÁMÉ $\underline{A;B}$

$$\left.\begin{aligned} y_p &= Ax^2 + Bx \\ y_p' &= 2Ax + B \\ y_p'' &= 2A \\ y_p''' &= 0 \end{aligned}\right\} \text{DOSADÍM DO } y''' - 2y'' + y' = x$$

$$0 - 4A + 2Ax + B = x + 0$$

x^1 $2Ax = x$ $/ :x \Rightarrow 2A = 1 \Rightarrow \underline{A = 1/2}$

x^0 $-4A + B = 0$ $\underline{B = 4/2 = 2}$

$$y_p = \tfrac{1}{2}x^2 + 2x$$

$$y = y_p + y_H = \underline{\underline{c_1 + c_2 e^x + c_3 \cdot x \cdot e^x + \tfrac{1}{2}x^2 + 2x}} \quad \text{OBECNÉ ŘEŠENÍ}$$

POKUD BYCHOM MĚLI ZADÁNY NĚJAKÉ KONKRÉTNÍ ŘEŠENÍ NE OBECNÉ, TO KONKRÉTNÍ ŘEŠENÍ BY PROCHÁZELO ZADANÝMI BODY (JSOU ZADÁNY POČÁTEČNÍ PODMÍNKY) PAK BYCHOM INTEGRAČNÍ KONSTANTY $\underline{A, B}$ ZÍSKALY Z OBECNÉHO ŘEŠENÍ

DOSTANU Z TOHO

PART 2   DRUHÝ ÚKOL, NAJDĚTE "PARTIKULÁRNÍ" ŘEŠENÍ

PRO $y(0) = 1$; $y'(0) = 2$; $y''(-2) = 4$ (NĚJAKÉ DANÉ PODMÍNKY)

$$y' = c_2 \cdot e^x + c_3 e^x + x \cdot c_3 \cdot e^x + x + 2$$

$$y'' = c_2 e^x + c_3 e^x + c_3 e^x + c_3 e^x \cdot x + 1 = c_2 e^x + 2c_3 e^x + c_3 e^x \cdot x + 1$$

$$y(0) = c_1 + c_2 e^0 + \overbrace{c_3 \cdot 0 \cdot e^0 + \tfrac{1}{2} \cdot 0^2 + 2 \cdot 0}^{0} = c_1 + c_2 = 1$$

$$y'(0) = c_2 e^0 + c_3 e^0 + c_3 \cdot 0 \cdot e^0 + 0 + 2 = c_2 + c_3 + 2 = 2$$

$$y''(-2) = c_2 e^{-2} + \cancel{2c_3 e^{-2}} + \cancel{c_3 \cdot (-2) \cdot e^{-2}} + 1 = c_2 e^{-2} + 1 = 4$$

Z TĚCHTO $\underline{3}$ ROVNIC BUDEME URČOVAT $\underline{c_1 ; c_2 ; c_3}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & e^{-2} & 0 & 3 \end{array}\right)$$

$c_2 = \dfrac{3}{e^{-2}}$ $c_3 = -\dfrac{3}{e^{-2}}$ $c_1 = 1 - \dfrac{3}{e^{-2}}$

25.)

KAPITOLA 7.

KŘIVOČARÉ SOUŘADNICE

- ŘEŠENÍ NĚKTERÝCH PROBLÉMŮ VE FYZICE JE JEDNUŠŠÍ ŘEŠIT V JINÉ SOUSTAVĚ SOUŘADNIC NEŽ JE ZROVNA KARTÉZSKÁ, KDE TO ŘEŠENÍ MŮŽE BÝT PODSTATNĚ JEDNODUŠŠÍ.

KŘIVKA: KŘIVKOU ROZUMÍME ZOBRAZENÍ, KTERÉ NĚJAKÉMU PARAMETRU t PŘIŘADÍ USPOŘÁDANOU TROJICI ČÍSEL $(x(t); y(t); z(t)) \in \mathbb{R}^3$

MNOŽINA PŘIROZ. ČÍSEL $\mathbb{R} \ni t \longrightarrow (x(t); y(t); z(t)) \in \mathbb{R}^3$

INTERVAL $(a;b) \to (a;b) \ni t$

KŘIVKA JE VEKTOROVOU FUNKCÍ 1 REÁLNÉ PROMĚNNÉ (t – PARAMETR). KŘIVKU DEFINUJEME JAKO ZOBRAZENÍ.

Př. | KŘIVKY

PARAMETRICKÉ ROVNICE PŘÍMKY

$$x(t) = 2+4t \qquad\qquad x(s) = 2-4s$$
$$y(t) = 1-2t \quad t \in \mathbb{R} \qquad y(s) = 1+2s \quad s \in \mathbb{R}$$
$$z(t) = 6-8t \qquad\qquad z(s) = 6+8s$$

RŮZNÉ KŘIVKY, ALE TYTÉŽ MNOŽINY BODŮ, PROTOŽE U SMĚROVÉHO VEKTORU JSME POUZE VYMĚNILI ZNAMÉNKA

PLOCHA: OPĚT JE TO ZOBRAZENÍ, KTERÉ DVĚMA PARAMETRŮM (t A s) PŘIŘAZUJE USPOŘÁDANOU TROJICI ČÍSEL $(x(t;s); y(t;s); z(t;s)) \in \mathbb{R}^3$.

$$\mathbb{R}^2 \ni (t;s) \longrightarrow (x(t;s); y(t;s); z(t;s)) \in \mathbb{R}^3$$

$(a;b) \times (c;d) \ni (t;s) \text{ --- }$

PLOCHA JE VEKTOROVOU FUNKCÍ DVOU REÁLNÝCH PROMĚNNÝCH A TO PARAMETRŮ t A s

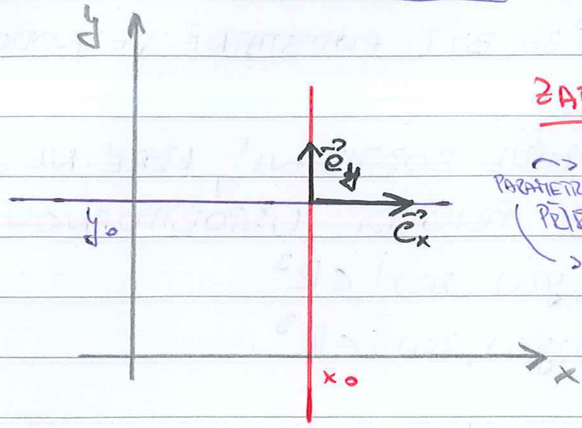
Př.)

$$x(t;s) = 1+2t-3s$$
$$y(t;s) = -1+4t-7s \qquad t; s \in \mathbb{R}$$
$$z(t;s) = -6-6t+12s$$

TYTÉŽ MNOŽINY BODŮ MOHOU REPREZENTOVAT RŮZNÉ KŘIVKY

SOUŘADNICOVÉ SYSTÉMY V ROVINĚ

KARTÉZSKÉ SOUŘADNICE – DVĚ NAVZÁJEM KOLMÉ OSY



ZAFIXUJI $x = x_0$

PARAMETRU $y \to (x_0; y)$ ... $\vec{e}_y = \left(\frac{dx_0}{dy}; \frac{dy}{dy}\right) = (0;1)$

PŘIŘAZUJEME USPOŘ. DVOJICI

$t \to (x_0; t)$ ... $\vec{e}_t = \left(\frac{dx_0}{dt}; \frac{dy}{dt}\right) = (0;1)$

KONST.

ZAFIXUJI $y = y_0$

$x \to (x; y_0)$ ... $\vec{e}_x = \left(\frac{dx}{dx}; \frac{dy_0}{dx}\right) = (1;0)$

$t \to (t; y_0)$ ... $\vec{e}_t = \left(\frac{dt}{dt}; \frac{dy_0}{dt}\right) = (1;0)$

$\vec{e}_x; \vec{e}_y$ – TEČNÉ VEKTORY K SOUŘ. KŘIVKAMI

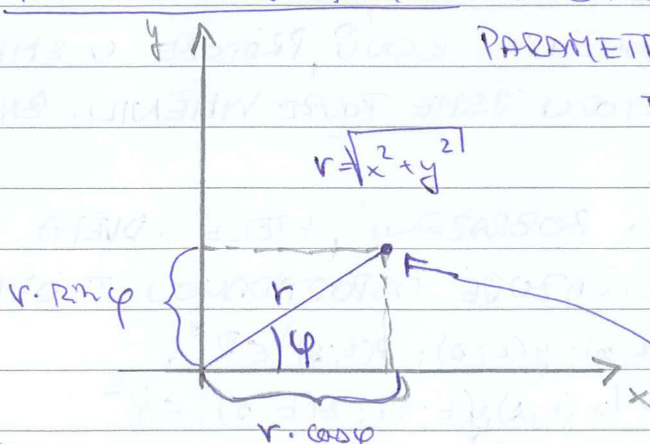
TEČNÉ VEKTORY

$t \to (x(t); y(t))$ ... $t \to (x(t); y(t); z(t))$

$\vec{e}_t = \left(\frac{dx(t)}{dt}; \frac{dy(t)}{dt}\right)$ ... $\vec{e}_t = \left(\frac{dx}{dt}; \frac{dy}{dt}; \frac{dz}{dt}\right)$

POLÁRNÍ SOUŘADNICE (ČÁSTI KRUHŮ, KRUŽNIC) ← NA TOHLE SE HODÍ

PARAMETRY JSOU r; φ ($r \to 0 \dots \infty$; $\varphi \to 0 \to 2\pi$)



TRANSFORMAČNÍ VZTAHY:

$x = r \cdot \cos\varphi$

$y = r \cdot \sin\varphi$

$x(r;\varphi) = r \cdot \cos\varphi$

$y(r;\varphi) = r \cdot \sin\varphi$

φ – ÚHEL SVÍRAJÍCÍ PRŮVODIČ BODU S KLADNOU POLOOSOU x

$r \; (0;\infty)$
$\varphi \; (0;2\pi)$ } PRO CELOU ROVINU

SOUŘADNICOVÉ KŘIVKY

NEJDŘÍVE $r = r_0$ ... ZAFIXUJEME r

$\varphi \to (r_0 \cos\varphi; r_0 \sin\varphi)$ ZOBRAZENÍ

$\vec{e}_\varphi = \left(\frac{dx}{d\varphi}; \frac{dy}{d\varphi}\right) = (-r_0 \sin\varphi; r_0 \cos\varphi)$

POTOM $\varphi = \varphi_0$ ... ZAFIXUJEME φ U DRUHÉ KŘIVKY

$r \to (r \cos\varphi_0; r \sin\varphi_0)$

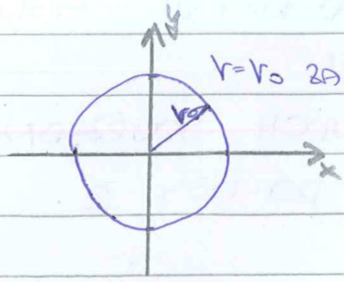
$\vec{e}_r = \left(\frac{dx}{dr}; \frac{dy}{dr}\right) = (\cos\varphi_0; \sin\varphi_0)$

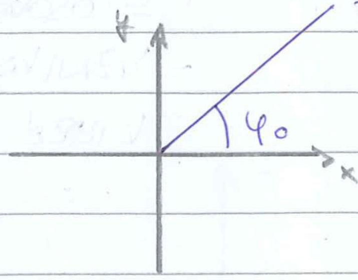
(26)

POKROČILEJŠÍ ZÁPIS

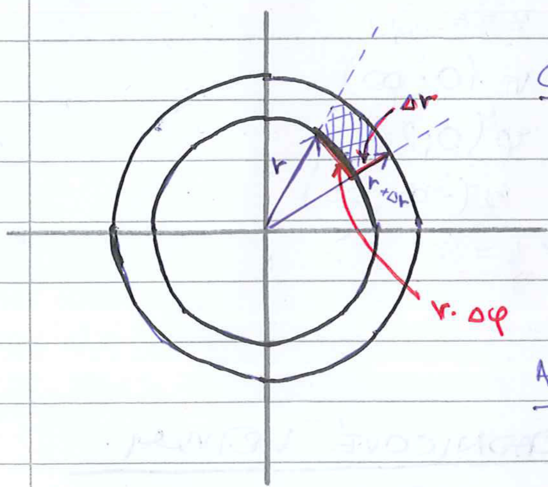
$$\vec{e}_\varphi = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}; \frac{\partial y}{\partial \varphi}\right) = \left(\frac{\partial x(r;\varphi)}{\partial \varphi}; \frac{\partial y(r;\varphi)}{\partial \varphi}\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial(r\cos\varphi)}{\partial \varphi}; \frac{\partial(r\cdot\sin\varphi)}{\partial\varphi}\right) = (-r\sin\varphi; r\cos\varphi)$$





ELEMENT PLOCHY, OMEZENÉ SOUŘADNICOVÝMI KŘIVKAMI



GEOMETRICKY

PLOCHA $\Delta S \doteq \Delta r \cdot r \cdot \Delta\varphi$ PŘIBLIŽNĚ PLATÍ TÍM LÉPE ČÍM Δr A $\Delta\varphi$ JE MENŠÍ

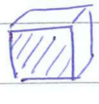
ALGEBRAICKY:

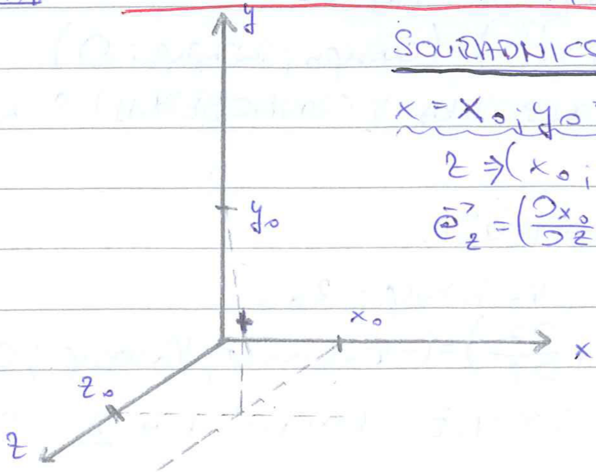
PLATÍ; ABSOLUTNÍ HODNOTA DETERMINANTU

$$dS = |\vec{e}_\varphi \times \vec{e}_r|\, dr\, d\varphi = \underbrace{\left\| \begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial\varphi} & \frac{\partial y}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \end{matrix} \right\|}_{\text{JAKOBIÁN}}$$

SOUŘADNICOVÉ SYSTÉMY V PROSTORU

KARTÉZSKÉ - ZŘEJMÉ





SOUŘADNICOVÉ KŘIVKY

$x = x_0; y_0 = y$ ZAFIXUJI

$z \Rightarrow (x_0; y_0; z)$

$$\vec{e}_z = \left(\frac{\partial x_0}{\partial z}; \frac{\partial y_0}{\partial z}; \frac{\partial z}{\partial z}\right) = (0;0;1)$$

$x = x_0; z = z_0$ ZAFIXUJI

$y \to (x_0; y; z_0)$

$$\vec{e}_y = \left(\frac{\partial x_0}{\partial y}; \frac{\partial y}{\partial y}; \frac{\partial z_0}{\partial y}\right) = (0;1;0)$$

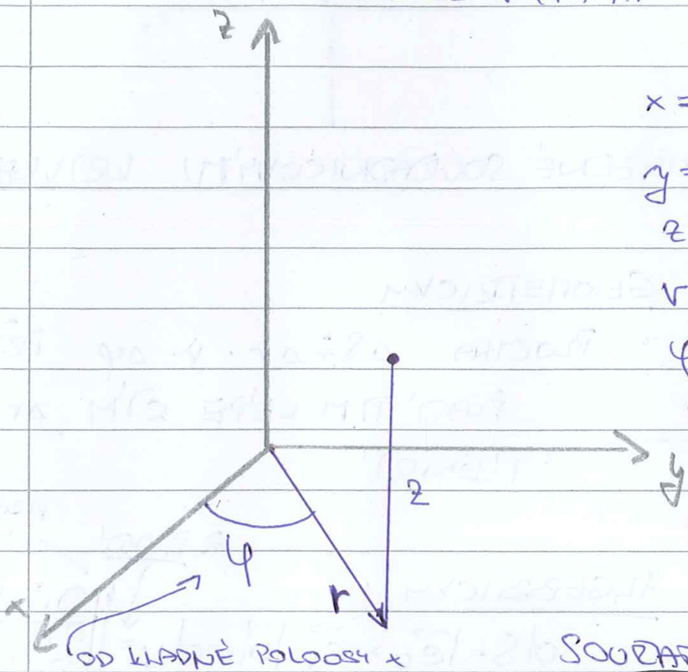
$y_0 = y$; $z = z_0$ ZAFIXUJI

$$x \to (x; y_0; z_0)$$

$$\vec{e}_x = \left(\frac{\partial x}{\partial x}; \frac{\partial y_0}{\partial x}; \frac{\partial z_0}{\partial x}\right) = (1; 0; 0)$$

CYLINDRICKÉ (VÁLCOVÉ) SOUŘADNICE

- HODÍ SE PRO PŘÍPAD KDY JE PROBLÉM S OSOVOU SYMETRIÍ
- VZNIKAJÍ Z POLÁRNÍCH SOUŘADNIC, KTERÉ VYTÁHNEME DO OSY z.



$x = r \cdot \cos\varphi$

$y = r \cdot \sin\varphi$

$z = z$

$r\ (0; \infty)$

$\varphi\ (0; 2\pi)$

$z\ (-\infty; \infty)$

SOUŘADNICOVÉ KŘIVKY

$\varphi = \varphi_0$; $r = r_0$ ZAFIXUJI

$$z \to (r_0 \cos\varphi_0; r_0 \cdot \sin\varphi_0; z)$$

$$\vec{e}_z = \left(\frac{\partial x}{\partial z}; \frac{\partial y}{\partial z}; \frac{\partial z}{\partial z}\right) = (0; 0; 1)$$

PŘÍMKA ∥ (ROVNOBĚŽNÁ) S OSOU z

$\varphi = \varphi_0$; $z = z_0$ ZAFIXUJI

$$r \to (r \cdot \cos\varphi_0; r \cdot \sin\varphi_0; z_0)$$

$$\vec{e}_r = \left(\frac{\partial x}{\partial r}; \frac{\partial y}{\partial r}; \frac{\partial z}{\partial r}\right) = (\cos\varphi_0; \sin\varphi_0; 0)$$

POLOPŘÍMKA ∥ (ROVNOBĚŽNÁ) S x; y

$z = z_0$; $r = r_0$ ZAFIXUJI

$$\varphi \to (r_0 \cos\varphi; r_0 \sin\varphi; z_0)$$

$$\vec{e}_\varphi = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}; \frac{\partial y}{\partial \varphi}; \frac{\partial z}{\partial \varphi}\right) = (-r_0 \sin\varphi; r_0 \cos\varphi; 0)$$

KRUŽNICE V ROVINĚ KOLMÁ NA z SE STŘEDEM NA OSE z, S POLOM. r_0

(27)

SOUŘADNICOVÉ PLOCHY

KDYŽ ZAFIXUJEME POUZE 1 SOUŘADNICI

$\varphi = \varphi_0 \,;\, r = r_0 \,;\, z = z_0$

PRO $\varphi = \varphi_0$

FUNKCE 2 PROMĚNNÝCH $(r; z) \longrightarrow (r\cos\varphi_0 ; r\sin\varphi_0 ; z)$

ELEMENT PLOCHY $\rightarrow dS_\varphi = |\vec{e}_r \times \vec{e}_z| \, dr \, dz$

POLOROVINA PROCHÁZEJÍCÍ ~~PŘ~~ OSOU z.

PRO $r = r_0$

$(z ; \varphi) \longrightarrow (r_0\cos\varphi ; r_0 \sin\varphi ; z)$ $\quad \vec{e}_\varphi \times \vec{e}_z = (r_0\cos\varphi ; -r_0\sin\varphi ;)$

$\rightarrow dS_r = |\vec{e}_\varphi \times \vec{e}_z| \, d\varphi \, dz \quad |\vec{e}_\varphi \times \vec{e}_z| = \sqrt{r_0^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)} = r_0$

VÁLCOVÁ PLOCHA (SLUPKA SALÁMU)

$$dS_r = \begin{vmatrix} -r_0\sin\varphi & r_0\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} -r_0\sin\varphi & r_0\cos\varphi \\ 0 & 0 \end{matrix}$$

PRO $z = z_0$

$(\varphi ; r) \rightarrow (r \cdot \cos\varphi ; r \cdot \sin\varphi ; z_0)$

$\rightarrow dS_z = |\vec{e}_\varphi \times \vec{e}_r| \, d\varphi \, dr$

$$dS_z = \begin{vmatrix} -r_0\sin\varphi & r_0\cos\varphi & 0 \\ \cos\varphi_0 & \sin\varphi_0 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} -r_0\sin\varphi & r_0\cos\varphi \\ \cos\varphi_0 & \sin\varphi_0 \end{matrix} =$$ ROVINA ROVNOBĚŽNÁ S $x ; y$

$= (0 ; 0 ; -r_0\sin\varphi\sin\varphi_0) \qquad |\vec{e}_\varphi \times \vec{e}_r| = r_0 \sin\varphi \sin\varphi_0$

ROZEPÍŠEME dS_φ

$$dS_\varphi = |\vec{e}_r \times \vec{e}_z| \, dr \, dz$$

$$\vec{e}_r = (\cos\varphi ; \sin\varphi ; 0)$$

$$\vec{e}_z = (0 ; 0 ; 1)$$

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & 0 \end{matrix}$$

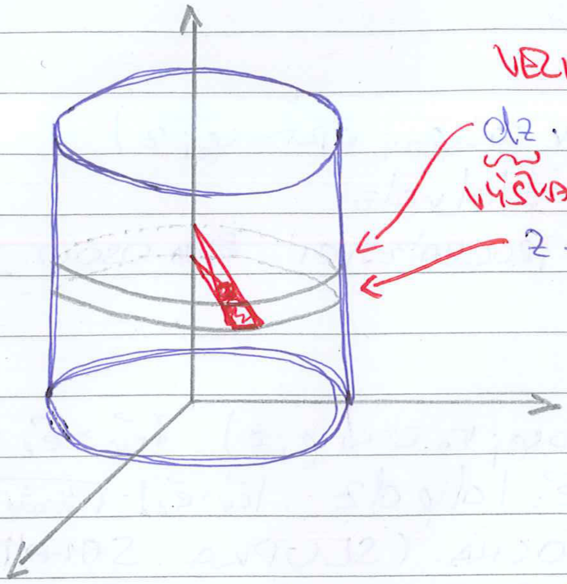
$$\vec{e}_r \times \vec{e}_z = (\sin\varphi ; -\cos\varphi ; 0)$$

$$|\vec{e}_r \times \vec{e}_z| = \sqrt{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi} = \underline{1}$$

$$dS_\varphi = dr \, dz$$

ELEMENT ~~PLOCHY~~ OBJEMU

1.) GEOMETRICKY - KRÁJENÍ SÝRU, SALÁMU



VELIKOST MALÉHO HRANOLKU

$$\underbrace{dz}_{\text{VÝŠKA}} \cdot \underbrace{r \cdot d\varphi\, dr}_{\text{PODSTAVA VIZ. POLÁRNÍ SOUŘAD.}} = dS$$

$z \to z + dz$

ALGEBRA

MOHU ZAMĚNIT POŘADÍ VŽDY VYJDE STEJNĚ

$$dS = |\vec{e}_\varphi \cdot (\vec{e}_r \times \vec{e}_z)|\, d\varphi\, dr\, dz =$$

ABSOLUTNÍ HOD. DETERMINANTU

$$\underbrace{\left\| \begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{matrix} \right\|}_{\text{JAKOBIÁN}}\, d\varphi\, dr\, dz$$

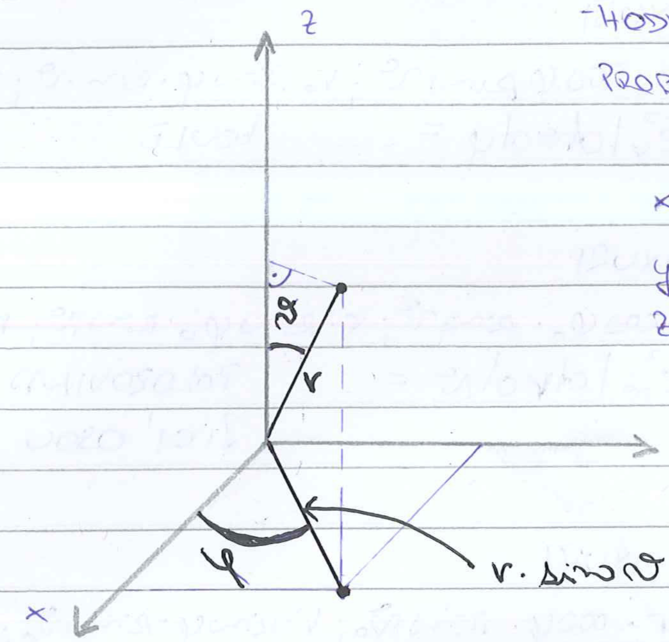
JAKOBIÁN = PRO VÁLCOVÉ SE ROVNÁ $\underline{r}$

VÝPOČET JAKOBIÁNU PRO VÁLCOVÉ SOUŘADNICE

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} -r\sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\| \begin{matrix} -r\sin\varphi & r\cos\varphi \\ \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & 0 \end{matrix} =$$

$$= |-r\sin^2\varphi + 0 + 0 + 0 + 0 - r\cos^2\varphi| = |-r(\overbrace{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi}^{1})| = \underline{r}$$

SFÉRICKÉ SOUŘADNICE



- HODÍ SE PRO KAŽDÝ OBJEKT A PRO PROBLÉM S KULOVOU SYMETRIÍ

$x = r \cdot \cos\varphi \sin\vartheta$

$y = r \cdot \sin\varphi \sin\vartheta$

$z = r \cdot \cos\vartheta$

$\varphi\ (0; 2\pi)$

$\vartheta\ (0; \pi)$

CELÝ PROSTOR $r \in (0; \infty)$

$\varphi \in (0, 2\pi)$

$\vartheta \in (0; \pi)$

SOUŘADNICOVÉ KŘIVKY

- $r = r_0;\ \vartheta = \vartheta_0$ ZAFIXOVÁNO

  $\varphi \rightarrow (r_0 \cdot \sin\vartheta_0 \cdot \cos\varphi;\ r_0 \sin\vartheta_0 \cdot \sin\varphi;\ r_0 \cdot \cos\vartheta_0)$

  $\vec{e}_\varphi = \left(\frac{\partial x}{\partial\varphi};\ \frac{\partial y}{\partial\varphi};\ \frac{\partial z}{\partial\varphi}\right) = (-r_0 \cdot \sin\vartheta_0 \cdot \sin\varphi;\ r_0 \cdot \sin\vartheta_0 \cdot \cos\varphi;\ 0)$

  ROVNOBĚŽKY NA GLÓBU

- $r = r_0;\ \varphi = \varphi_0$ ZAFIXUJI

  $\vartheta \rightarrow (r_0 \cdot \cos\varphi_0 \cdot \sin\vartheta;\ r_0 \cdot \sin\varphi_0 \cdot \sin\vartheta;\ r_0 \cdot \cos\vartheta)$

  $\vec{e}_\vartheta = \left(\frac{\partial x}{\partial\vartheta};\ \frac{\partial y}{\partial\vartheta};\ \frac{\partial z}{\partial\vartheta}\right) = (+r_0 \cdot \cos\varphi_0 \cdot \cos\vartheta;\ r_0 \cdot \sin\varphi_0 \cdot \cos\vartheta;\ -r_0 \sin\vartheta)$

  POLEDNÍKY NA GLÓBU

- $\varphi = \varphi_0;\ \vartheta = \vartheta_0$ ZAFIXUJI

  $r \rightarrow (r \cdot \cos\varphi_0 \cdot \sin\vartheta_0;\ r \cdot \sin\varphi_0 \cdot \sin\vartheta_0;\ r \cdot \cos\vartheta_0)$

  $\vec{e}_r = \left(\frac{\partial x}{\partial r};\ \frac{\partial y}{\partial r};\ \frac{\partial z}{\partial r}\right) = (\cos\varphi_0 \cdot \sin\vartheta_0;\ \sin\varphi_0 \cdot \sin\vartheta_0;\ \cos\vartheta_0)$

  POLOPŘÍMKA PROCHÁZEJÍCÍ POČÁTKEM

SOUŘADNICOVÉ PLOCHY

• $r = r_0$ ZAFIXUJI

$(\vartheta; \varphi) \to (r_0 \cos\varphi \sin\vartheta; r_0 \sin\varphi \cdot \sin\vartheta; r_0 \cdot \cos\vartheta)$

ELEMENT PLOCHY $\to dS_r = |\vec{e}_\vartheta \times \vec{e}_\varphi| \, d\vartheta \, d\varphi = \ldots$ KOULE

• $\varphi = \varphi_0$ ZAFIXUJI

$(r; \vartheta) \to (r \cdot \cos\varphi_0 \cdot \sin\vartheta; r \cdot \sin\varphi_0 \cdot \sin\vartheta; r \cdot \cos\vartheta)$

$\to dS_\varphi = |\vec{e}_r \times \vec{e}_\vartheta| \, dr \, d\vartheta = \ldots$ POLOROVINA PROCHÁZEJÍCÍ OSOU $\underline{z}$

• $\vartheta = \vartheta_0$ ZAFIXUJI

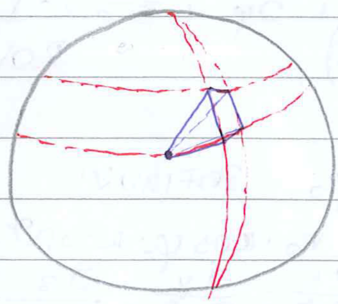
$(r; \varphi) \to (r \cdot \cos\varphi \cdot \sin\vartheta_0; r \cdot \sin\varphi \cdot \sin\vartheta_0; r \cdot \cos\vartheta_0)$

$dS_\vartheta = |\vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi| \, dr \, d\varphi$

KUŽELOVÁ PLOCHA (MÁ VÁLCOVOU SYMETRII)

ELEMENT OBJEMU

ALGEBRAICKY



$dV = |\vec{e}_r \cdot (\vec{e}_\varphi \times \vec{e}_\vartheta)| \, dr \, d\varphi \, d\vartheta =$

$$= \underbrace{\left\| \begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x}{\partial \vartheta} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} & \frac{\partial z}{\partial \vartheta} \end{matrix} \right\|}_{\text{JAKOBIÁN}} dr \, d\varphi \, d\vartheta = \left| \begin{matrix} \cos\varphi_0 \sin\vartheta_0 & \sin\varphi_0 \sin\vartheta_0 & \cos\vartheta_0 \\ -r_0 \cos\vartheta_0 \sin\varphi & r_0 \sin\vartheta_0 \cos\varphi & 0 \\ r_0 \cos\varphi_0 \cos\vartheta & r_0 \sin\varphi_0 \cos\vartheta_0 & -r_0 \sin\vartheta \end{matrix} \right| =$$

$$= \underline{\underline{r^2 \sin\vartheta \, dr \, d\varphi \, d\vartheta}}$$

29

VŠECHNO TOTO SPADÁ POD GEOMETRII KŘIVKY, JAK JE DLOUHÁ, JAK JE ROZLOŽENÁ HMOTNOST (ROZBAL?)

8. KŘIVKOVÝ INTEGRÁL

DŮVODY K POUŽITÍ KŘIVKOVÉHO INTEGRÁLU:

- POTŘEBUJU SPOČÍTAT DÉLKU KŘIVKY
- ——— || ——— HMOTNOST KŘIVKY
- CHCI SPOČÍTAT NĚJAKÉ CHARAKTERISTIKY KŘIVKY - STŘED HMOTNOSTI
- ——— || ——— MOMENT SETRVAČNOSTI
- VÝPOČET PRÁCE SÍLY PO KŘIVCE

KŘIVKOVÝ INTEGRÁL 2. TYPU (INTEGRUJI VEK. POLE, KTERÉ JE DEF. PODÉL KŘIVKY)

KŘIVKOVÝ INTEGRÁL 1. TYPU (INTEGRUJI JEDNU REÁLNOU FUNKCI)

DEFINICE KŘIVKY

- KŘIVKA JE DEFINOVÁNA JAKO ZOBRAZENÍ, KTERÉ JEDNOMU JEDINÉMU PARAMETRU t PŘIŘAZUJE USPOŘÁDANOU TROJICI ČÍSEL $(x(t); y(t); z(t))$

$$\mathbb{R} \ni t \longrightarrow (x(t); y(t); z(t)) \in \mathbb{R}^3$$

MŮŽE BÝT I INTERVAL $[a;b] \ni t$

PŘEDPOKLÁDÁME

1) $x(t); y(t); z(t)$ ... (ŽÁDNÉ SKOKY ANI HRANY) SPOJITÉ V KAŽDÉM BODĚ MAJÍ DERIVACE, TY DERIVACE JSOU SPOJITÉ
2) S VÝJIMKOU KONEČNÉHO POČTU BODŮ JE ZOBRAZENÍ $t \longrightarrow (x(t); y(t); z(t))$ - PROSTÉ

MŮŽE BÝT:  TOTO NE:  BĚHÁNÍ DOKOLA

KŘIVKOVÝ INTEGRÁL 1. TYPU

UKÁŽEME NA ÚLOZE. ŘEKNĚME, ŽE MÁME ZA ÚKOL SPOČÍTAT HMOTNOST KŘIVKY $C: t \longrightarrow (x(t); y(t); z(t)) = \vec{r}(t) \in \mathbb{R}^3$

PŘEDPOKLÁDÁME, ŽE LINEÁRNÍ HUSTOTA KŘIVKY JE DÁNA FUNKCÍ $\mu(\vec{r}) = \mu(\underbrace{x; y; z}_{\text{HUSTOTA NA KŘIVCE 3 REÁLNÉ PROMĚNNÉ}})$

KŘIVKA VEKT. FCE 1 REÁLNÉ PROMĚNNÉ

LINEÁRNÍ HUSTOTA:

HUSTOTA TĚLESA V $\mathbb{R}^3$: $\rho(x;y;z) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}$ ← ELEMENT HMOTNOSTI ← ELEMENT OBJEMU

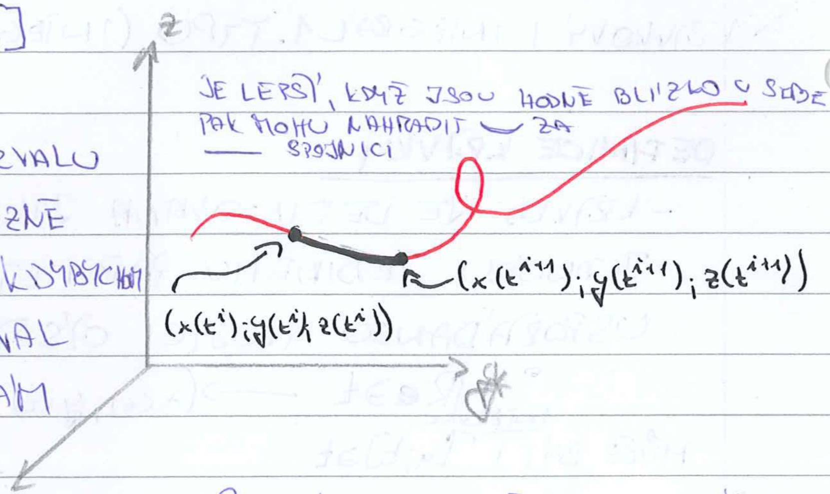
BEZPROSTŘEDNÍ OKOLÍ BODU

PLOŠNÁ HUSTOTA: $\sigma(x;y;z) = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta S} = \frac{dm}{dS}$

LINEÁRNÍ HUSTOTA — OPĚT OKOLÍ BODU

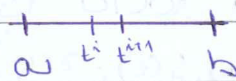
$$\mu(x;y;z) = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta l} = \frac{dm}{dl}$$

ŘEŠENÍ: $t \in [a;b]$



TYTO BODÍKY NA INTERVALU $[a;b]$ MŮŽEME MÍT RŮZNĚ DALEKO OD SEBE. I KDYBYCHOM VZALI STEJNÝ INTERVAL DÉLKY, TAK SE NÁM TO MŮŽE RŮZNĚ NATÁHNOUT PO KŘIVCE, RŮZNÝM STEJNĚ DLOUHÝM INTERVALŮM MOHOU BÝT PŘIŘAZENY RŮZNÉ, RŮZNĚ DLOUHÉ ÚSEKY KŘIVKY.

MŮŽEME ROZDĚLIT INTERVAL



POSTUP: PROVEDEME DĚLENÍ INTERVALU $[a;b]$

$$a = t^0 < t^1 < t^2 < \ldots < t^{i-1} < t^i < t^{i+1} \ldots < t^n = b$$

PRO VYBRANÝ ÚSEK KŘIVKY DOSTANEME:

$$\Delta m_{[t^i;t^{i+1}]} \doteq \mu(x(t^i); y(t^i); z(t^i)) \cdot \Delta l_{[t^i;t^{i+1}]}$$

$$\Delta l_{[t^i;t^{i+1}]} \doteq \sqrt{(x(t^{i+1}) - x(t^i))^2 + (y(t^{i+1}) - y(t^i))^2 + (z(t^{i+1}) - z(t^i))^2}$$

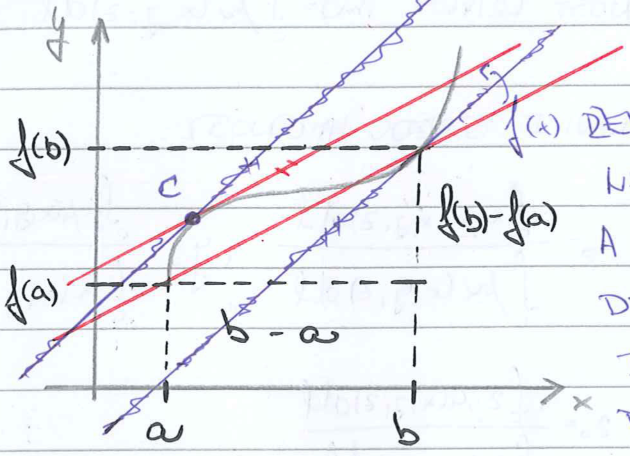
PŘEDPOKLÁDÁME, ŽE ELEMENT DÉLKY JE TAK MALÝ, ŽE HO MŮŽEME NAHRADIT NĚJAKOU KONKRÉTNÍ HODNOTOU HUSTOTY VE VYBRANÉM BODĚ.

(30.)

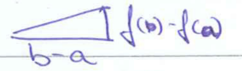
ODBOČKA – LAGRANGEOVA VĚTA O STŘEDNÍ HODNOTĚ

- TÝKÁ SE SPOJITÝCH FUNKCÍ 1 REÁLNÉ PROMĚNNÉ
TA FUNKCE MŮŽE BÝT DEFINOVÁNA NA INTERVALU $[a;b]$
$x \in [a;b]$, $f(x)$ JE SPOJITÁ A PRO $\forall x$ Z $[a;b]$ MÁ DERIVACI. PAK EXISTUJE BOD $\underline{c} \in [a;b]$ TAK, ŽE PLATÍ

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



ŘEKNEME, ŽE JE SPOJITÁ NA INTERVALU $[a;b]$ A VE VŠECH BODECH MÁ DERIVACI. TEČNA V BODĚ $\underline{c}$ JE ROVNOBĚŽNÁ S TOU PRUHOU TEČNOU. MÁME POTOM Δ.



NYNÍ VYUŽIJEME LAG. VĚTU:

DEFINICE DERIVACE PODOBNĚ!

$$x(t^{i+1}) - x(t^i) = x'(\xi)(t^{i+1}-t^i) \quad ; \xi \in [t^i; t^{i+1}]$$
$$y(t^{i+1}) - y(t^i) = y'(\eta)(t^{i+1}-t^i) \quad ; \eta \in [t^i; t^{i+1}]$$
$$z(t^{i+1}) - z(t^i) = z'(\vartheta)(t^{i+1}-t^i) \quad ; \vartheta \in [t^i; t^{i+1}]$$

$$\Delta l_{[t^i;t^{i+1}]} \doteq \sqrt{(x'(\xi))^2 + (y'(\eta))^2 + (z'(\vartheta))^2} \cdot (t^{i+1}-t^i)$$

$$\Delta m_{[t^i;t^{i+1}]} \doteq \mu(x(t^i); y(t^i); z(t^i)) \cdot \sqrt{(x'(\xi))^2 + (y'(\eta))^2 + (z'(\vartheta))^2} \cdot (t^{i+1}-t^i)$$

NYNÍ MUSÍME VŠECHNY TYTO ELEMENTY POSČÍTAT

$$m \doteq \sum_{t=0}^{M-1} \Delta m_{[t^i;t^{i+1}]} \doteq \underbrace{\sum_{i=0}^{M-1}}_{\approx \int} \underbrace{\mu(x(t^i); y(t^i); z(t^i)) \cdot \sqrt{(x'(\xi))^2 + (y'(\eta))^2 + (z'(\vartheta))^2}}_{\text{TOTO JE KONKRÉTNÍ FUNKCE}} \underbrace{(t^{i+1}-t^i)}_{\approx dt}$$

BUDEME ZJEMŇOVAT DĚLENÍ NA INTERVALU $[a;b]$
TAK ABY NORMA (DÉLKA) DĚLENÍ ŠLA K NULE => INTEGRACE

$$m = \int_a^b \mu(x(t); y(t); z(t)) \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt$$

DEFINICE: KŘIVKOVÝM INTEGRÁLEM 1. TYPU Z FUNKCE 3 PROMĚNNÝCH $f(x;y;z)$ PO KŘIVCE c : $t \to (x(t);y(t);z(t))$, $t\in[a;b]$ ROZUMÍME INTEGRÁL $\int f(x;y;z)\,dl = \underbrace{\int_a^b f(x(t);y(t);z(t))\cdot\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt}$

RIEMANŮV INTEGRÁL JEDNÉ REÁLNÉ PROMĚNNÉ

APLIKACE:

1) DÉLKA KŘIVKY $L=\int_c dl$ $\quad f(x;y;z)=1$

2) HMOTNOST KŘIVKY $m=\int_c \mu(x;y;z)\,dl$ $\quad f(x;y;z)=\mu(x;y;z)$

3) SOUŘADNICE STŘEDU HMOTNOSTI

$$x_0=\frac{\int_c x\cdot\mu(x;y;z)\,dl}{\int_c \mu(x;y;z)\,dl};\quad y_0=\frac{\int_c y\cdot\mu(x;y;z)\,dl}{\int_c \mu(x;y;z)\,dl}$$

$$z_0=\frac{\int_c z\cdot\mu(x;y;z)\,dl}{\int_c \mu(x;y;z)\,dl}$$

PRO HOMOGENNÍ KŘIVKU JE HUSTOTA $\mu(x;y;z)=$ KONST. PAK BYCHOM JI MOHLI VYJMOUT PŘED INTEGRÁL A POKRÁTIT.

4) MOMENT SETRVAČNOSTI KŘIVKY

$$J_x=\int_c (y^2+z^2)\mu(x;y;z)\,dl$$
$$J_y=\int_c (x^2+z^2)\mu(x;y;z)\,dl$$
$$J_z=\int_c (x^2+y^2)\mu(x;y;z)\,dl$$

PRO KŘIVKOVÝ INTEGRÁL 1. TYPU PARAMETRIZUJEME KŘIVKU, POKUD NÁM NIKDO PARAMETRIZOVANOU KŘIVKU NEZADÁ, TAK JI MUSÍME SAMI PARAMETRIZOVAT. ZPŮSOB PARAMETRIZACE V TOMTO PŘÍPADĚ NEHRAJE ROLI. POTÉ CO PARAMETRIZUJEME PŘEVEDEME KŘIVKOVÝ INTEGRÁL NA PRACH OBYČEJNÝ RIEMANŮV INTEGRÁL.

PŘÍKLAD: MÁME SPOČÍTAT SOUŘADNICE STŘEDU HMOTNOSTI KŘIVKY $x=a\cdot\cos t$; $y=a\cdot\sin t$; $z=b\cdot t$ (ŠROUBOVICE) $t\in[0;2\pi]$. PŘEDPOKLÁDÁME, ŽE KŘIVKA JE HOMOGENNÍ. SPOČTĚTE TAKÉ JEJÍ DÉLKU.
a - POLOMĚR ŠROUBOVICE ; b - STOUPÁNÍ ZÁVIT

(31.)

PARAMETRIZACE $A=[0;1]$ $B=[2;3]$

$$\vec{X}=\vec{A}_x+t(\vec{B}_x-\vec{A}_x)$$
$$\vec{Y}=\vec{A}_x+t(\vec{B}_y-\vec{A}_y)$$

PROTOŽE JE HOMOGENNÍ

$$x_0=\frac{\cancel{\mu(x;y;z)}\int_c x\,dl}{\cancel{\mu(x;y;z)}\int_c dl}=\frac{\int_c x\,dl}{\int_c dl}=\underline{0}$$

$$y_0=\frac{\cancel{\mu(x;y;z)}\int_c y\,dl}{\mu(x;y;z)\int_c dl}=\frac{\int_c y\,dl}{\int_c dl}=\underline{0}$$

$$z_0=\frac{\mu(x;y;z)\int_c z\,dl}{\mu(x;y;z)\int_c dl}=\frac{\int_c z\,dl}{\int_c dl}=\frac{2\pi^{\cancel{2}}\cdot b\cancel{\sqrt{a^2+b^2}}}{\cancel{2\pi}\cdot\cancel{\sqrt{a^2+b^2}}}=\underline{\pi\cdot b}$$

$$L=\int_c dl=\int_0^{2\pi}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{(-a\cdot\sin t)^2+(a\cos t)^2+(b^2)}\,dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{(+a^2(\underbrace{\sin^2 t+\cos^2 t}_{1}))+b^2}\,dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2+b^2}\,dt=\sqrt{a^2+b^2}\int_0^{2\pi}dt=\sqrt{a^2+b^2}\cdot[t]_0^{2\pi}=\underline{\underline{2\pi\sqrt{a^2+b^2}}}$$

$$\int_c x\,dl=\int_0^{2\pi}\underbrace{a\cos t}_{x(t)}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt=\int_0^{2\pi}a\cdot\cos t\cdot\sqrt{a^2+b^2}\,dt=a\cdot\sqrt{a^2+b^2}\int_0^{2\pi}\cos t\,dt=$$

$$=-a\sqrt{a^2+b^2}\,[+\sin t]_0^{2\pi}=\underline{0}$$

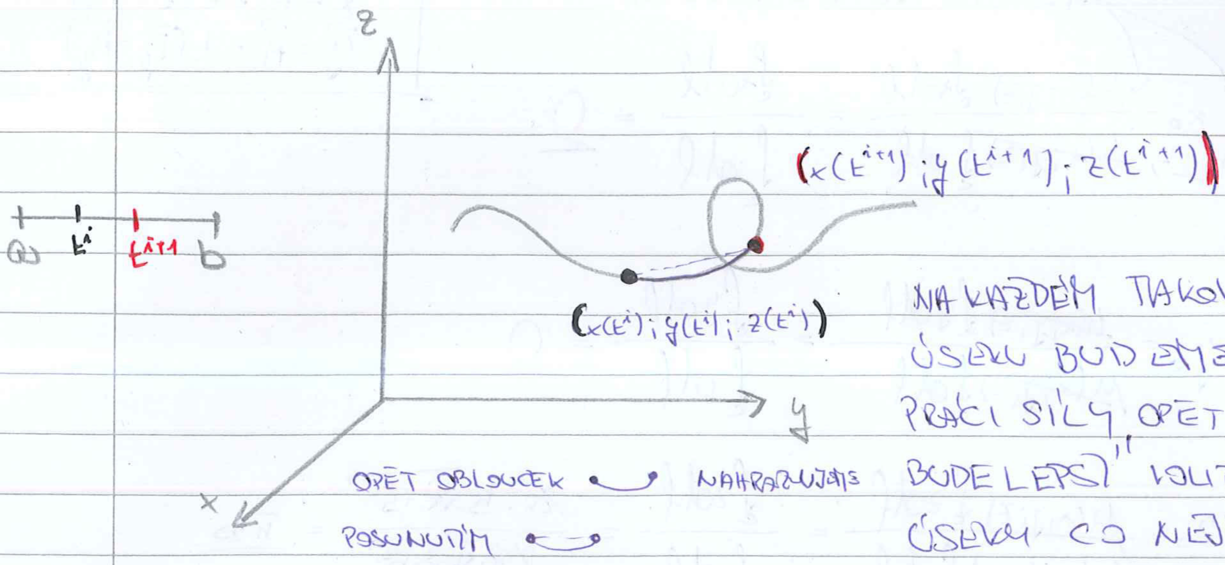
$$\int_c y\,dl=\int_0^{2\pi}a\sin t\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt=a\cdot\sqrt{a^2+b^2}\int_0^{2\pi}\sin t\,dt=a\sqrt{a^2+b^2}\,[\cos t]_0^{2\pi}=$$
$$=\underline{0}$$

$$\int z\,dl=\int_0^{2\pi}b\,t\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt=b\cdot\sqrt{a^2+b^2}\int_0^{2\pi}t\,dt=b\cdot\sqrt{a^2+b^2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{2\pi}=$$
$$=b\cdot\sqrt{a^2+b^2}\cdot\frac{2\cancel{4}\pi^2}{\cancel{2}}=\underline{\underline{2\pi^2\cdot b\sqrt{a^2+b^2}}}$$

KŘIVKOVÝ INTEGRÁL 2. TYPU

ÚKOL: MÁME VYPOČÍTAT PRÁCI SÍLY $\vec{F}(\vec{r})=\vec{F}(x;y;z)=(F_x(\underbrace{x;y;z}_{\vec{r}});F_y(\underbrace{x;y;z}_{\vec{r}});F_z(\underbrace{x;y;z}_{\vec{r}}))$, TEĎ CHCEME PRÁCI SÍLY PO NĚJAKÉ KŘIVCE $C: t\to(x(t);y(t);z(t));\ t\in[a;b]$, (MEZI BODY $A=[x(a);y(a);z(a)]$ a $B=[x(b);y(b);z(b)]$)

BUDE TO PODOBNÉ JAKO U KŘIVKOVÉHO INTEG. I. TYPU, AKORÁT TENTOKRÁT TO BUDE VEKTOROVÁ FUNKCE 3 PROMĚNNÝCH.



NA KAŽDÉM TAKOVÉMTO ÚSEKU BUDEME POČÍTAT PRÁCI SÍLY, OPĚT PLATÍ, ŽE BUDE LEPŠÍ VOLIT TYTO ÚSEKY CO NEJMENŠÍ.

1.) DĚLENÍ INTERVALU $[a;b]$

$$a = t^0 < t^1 < \dots < t^i < t^{i+1} < \dots < t^n = b$$

2.) VÝPOČET PRÁCE

$$\Delta W_{[t^i;t^{i+1}]} \doteq \vec{F}(x(t^i); y(t^i); z(t^i)) \underbrace{\cdot \Delta \vec{r}_{[t^i;t^{i+1}]}}_{\text{SKALÁRNÍ SOUČIN VEKTORU SÍLY A POSUNUTÍ}} =$$

$$= F_x(x(t^i); y(t^i); z(t^i)) \cdot \overbrace{(x(t^{i+1}) - x(t^i))}^{\Delta x_{[t^i;t^{i+1}]}} + F_y(x(t^i); y(t^i); z(t^i)) \cdot$$
$$\cdot \underbrace{(y(t^{i+1}) - y(t^i))}_{\Delta y_{[t^i;t^{i+1}]}} + F_z(x(t^i); y(t^i); z(t^i)) \cdot \underbrace{(z(t^{i-1}) - z(t^i))}_{\Delta z_{[t^i;t^{i+1}]}}$$

NYNÍ OPĚT LAGRANGEOVA VĚTA O STŘEDNÍ HODNOTĚ. POMOCÍ TÉTO VĚTY MOHU PROMĚNNÉ VÝŠE ROZEPSAT TAKTO:

$$\Delta x_{[t^i;t^{i+1}]} = x'(\xi)(t^{i+1} - t^i)$$

$$\Delta y_{[t^i;t^{i+1}]} = y'(\eta)(t^{i+1} - t^i)$$

$$\Delta z_{[t^i;t^{i+1}]} = z'(\vartheta)(t^{i+1} - t^i)$$

NYNÍ PŘEPÍŠU DO PŘEDCHOZÍHO TVARU A VYTKNU $(t^{i+1} - t^i)$

$$W \doteq \sum_{i=0}^{n-1} \Delta W_{[t^i;t^{i+1}]} \doteq \sum_{i=0}^{n-1} [F_x(x(t^i); y(t^i); z(t^i)) \cdot x'(\xi) + F_y(x(t^i); y(t^i); z(t^i)) \cdot y'(\eta) +$$
$$+ F_z(x(t^i); y(t^i); z(t^i)) \cdot z'(\vartheta)] \cdot (t^{i+1} - t^i)$$

TEĎ BUDEME ZJEMŇOVAT DĚLENÍ NA INTERVALU $[a;b]$

$$W \doteq \sum_{i=0}^{n-1} \Delta W_{[t^i;t^{i+1}]} \doteq \sum_{i=0}^{n-1} [F_x(x(t^i); y(t^i); z(t^i)) \cdot x'(\xi) + F_y(x(t^i); y(t^i); z(t^i)) \cdot y'(\eta) +$$
$$+ F_z(x(t^i); y(t^i); z(t^i)) \cdot z'(\vartheta)] dt$$

(32)

DEFINICE – KŘIVKOVÝM INTEGRÁLEM 2. TYPU Z VEKTOROVÉ FUNKCE $\vec{F}(x;y;z) = (F_x(x;y;z); F_y(x;y;z); F_z(x;y;z))$ PŘES KŘIVKU $C: t \to (x(t); y(t); z(t))$ MEZI BODY $A = [x(a); y(a); z(a)]$ a $B = [x(b); y(b); z(b)]$; $t \in [a;b]$ ROZUMÍME INTEGRÁL:

$$\int_C \vec{F}(x;y;z)\,d\vec{r} = \int_C F_x(x;y;z)dx + F_y(x;y;z)dy + F_z(x;y;z)dz =$$

$$= \underbrace{\int_a^b \left(F_x(x(t);y(t);z(t))\cdot x'(t) + F_y(x(t);y(t);z(t))\cdot y'(t) + F_z(x(t);y(t);z(t))\cdot z'(t)\right)dt}_{\text{RIEMANNŮV INTEGRÁL FUNKCE JEDNÉ REÁLNÉ PROMĚNNÉ}}$$

$$\int_C F_x dx + F_y dy + F_z dz = \int_a^b (F_x\cdot x' + F_y\cdot y' + F_z\cdot z')\,dt$$

TADY POZOR U 2. TYPU KŘIVKOVÉHO INTEGRÁLU UŽ MŮŽE VADIT ZMĚNA PARAMETRIZACE (MŮŽE SE ZMĚNIT ZNAMÉNKO).

ZÁKLADNÍ ROZDÍLY MEZI INTEGRÁLEM 1. TYPU A 2. TYPU JSOU:

1) V INTEGROVANÉM OBJEKTU, 1. TYP – REÁLNÁ FUNKCE 3 PROMĚNNÝCH
   2. TYP – VEKTOROVÁ FUNKCE 3 PROMĚNNÝCH
2) PARAMETRIZACE, U 1. TYPU NA NÍ NEZÁLEŽÍ U 2. TYPU SE MŮŽE ZMĚNIT ZNAMÉNKO

PŘÍKLAD – URČETE PRÁCI VEKTOROVÉHO POLE $\vec{F} = (\overbrace{x^2 + xz - 4}^{F_x}; \overbrace{y^2 - 6}^{F_y}; \underbrace{z^2 + xz}_{F_z})$. PO KŘIVCE $y = x^3$; $z = 1$ MEZI BODY $[0;0;1]$; $[2;8;1]$

PŘÍMKU MUSÍME NYNÍ VHODNĚ PARAMETRIZOVAT, NABÍZÍ SE NÁSLEDUJÍCÍ MOŽNOST:

ŘEŠENÍ:

$x(t) = t$	2	0	$x = t$ – PARAMETR	POTOM Z $y = x^3$ DOSTANU
$y(t) = t^3$	8	0	$y = x^3 = t^3$	ZA t DOSADÍM 0 NULU
$z(t) = 1$	1	1	$z = 1$	A DOSTANU $[0;0;1]$

NYNÍ ZA t DOSADÍM 2 A DOSTANU $[2;8;1]$

$x = 2$

$y = 8$

$z = 1$

POTOM $t \in [0;2]$ ABY NÁM TO SEDĚLO NA BODY

$$W=\int F_x dx + F_y dy + F_z dz = \int_0^2 [(t^2+t-4)x'(t) + (t^6-6)y'(t) + (1+t)\cdot z'(t)]dt =$$

$$x'(t)=(t)'=\underline{1};\ y'(t)=(t^3)'=\underline{3t^2};\ z'(t)=(1)'=\underline{0}$$

$$=\int_0^2 (t^2+t-4+3t^8-18t^2)dt = \int_0^2 (3t^8-17t^2+t-4)dt = \left[\frac{3\cdot t^9}{9_3} - \frac{17t^3}{3} + \frac{t^2}{2} - 4t\right]_0^2 =$$

$$=\left[\frac{t^9-17t^3}{3} + \frac{t^2}{2} - 4t\right]_0^2 = \frac{\overbrace{512-17\cdot 8}^{376}}{3} + \frac{4}{2} - 8 = \underline{\frac{370}{3}}$$

PŘÍKLAD: VÝPOČET PRÁCE SÍLY PO KŘIVCE $x=a\cdot\cos t$; $y=a\cdot\sin t$; $z=bt$ $t\in[a;b]$ MEZI BODY $[a;0;0]$; $[a;0;2\pi b]$; $F=(xy;\ z-x;\ x^2y)$

$$W=\int_C F_x dx + F_y dy + F_z dz = \int_0^{2\pi} (-(a\cdot\sin t\cdot a\cdot\cos t)\cdot a\sin t +$$
$$+(bt-a\cdot\cos t)\cdot(a\cos t) + (a^2\cos^2 t\cdot a\cdot\sin t)\cdot b)\,dt =$$

$$=\int_0^{2\pi}((-a^3\cdot\sin^2 t\cdot\cos t) + abt\cos t - a^2\cdot\cos^2 t + a^3\cdot b\cdot\cos^2 t\cdot\sin t)dt =$$
$$=\int_0^{2\pi}(-a^3\cdot\sin^2 t\cos t)dt + \int_0^{2\pi} abt\cos t\,dt + \int_0^{2\pi}(a^2\cos^2 t)dt + \int_0^{2\pi}(a^3 b\cdot\cos^2 t\sin t)dt =$$
$$=$$

9. FUNKCE DVOU A VÍCE PROMĚNNÝCH
(SKALÁRNÍ FUNKCE)

JSOU TO TAKOVÉ FUNKCE, KDE SE NĚKOLIKA RŮZNÝM PROMĚNNÝM PŘIŘAZUJE REÁLNÉ ČÍSLO (SKALÁRNÍ VELIČINA)

1. PROMĚNNÁ: $\mathbb{R}\ni x \longrightarrow f(x)\in\mathbb{R}$ (DERIVOVÁNÍ, INTEGROVÁNÍ)
2. PROMĚNNÁ $\mathbb{R}^2\ni\underbrace{(x;y)}_{\text{USPOŘÁDANÁ DVOJICE}} \longrightarrow f(x;y)\in\mathbb{R}$ (SKALÁRNÍ POLE V ROVINĚ)
3. PROMĚNNÉ $\mathbb{R}^3\ni\underbrace{(x;y;z)}_{\text{USPOŘÁDANÁ TROJICE}} \longrightarrow f(x;y;z)\in\mathbb{R}$ (SLOŽKY SÍLY PŮSOBÍCÍ NA ČÁSTICI)

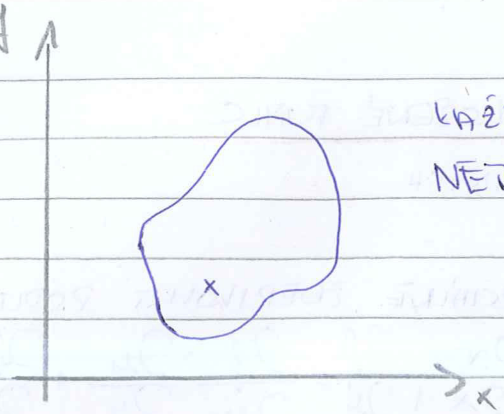
⋮

n PROMĚNNÝCH $\mathbb{R}^n\ni(x^1;x^2;\ldots x^n) \longrightarrow f(x^1;x^2\ldots\ldots x^n)\in\mathbb{R}$

ŠPATNĚ SE TO KRESLÍ

DEFINIČNÍ OBOR 2 PROMĚNNÝCH LZE ZAKRESLIT JAKO ~~ROVINY~~ PODMNOŽINU NĚJAKÉ →

33



KAŽDÉMU BODU $\underline{x}$ SE PŘIŘADÍ NĚJAKÁ FUNKČNÍ HODNOTA

PARCIÁLNÍ DERIVACE FUNKCÍ VÍCE PROMĚNNÝCH

- KDYŽ DERIVUJEME PODLE JEDNÉ KONKRÉTNÍ FUNKCE, TAK SE NA OSTATNÍ DÍVÁM JAKO NA KONSTANTY.

$$f'_{x^i}(x^1; x^2; \dots x^n) = \frac{\partial f(x^1; x^2 \dots x^n)}{\partial x^i} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x^1; \dots x^{i-1}; x^{i+t}; x^{i+1}; \dots x^n) - f(x^1; x^2; \dots x^{i-1}; x^i; x^{i+1}; \dots x^n)}{t}$$

NYNÍ, CO KDYBYCHOM MUSELI POČÍTAT PARCIÁLNÍ DERIVACI

$$f''(x_0; y_0) = \frac{\partial f'_y(x;y)}{\partial x}$$ POZOR ZNAMÉNKA PODLE ČEHO PRVNĚ DERIVUJI

PLATÍ VĚTA: POKUD V NĚJAKÉM BODĚ $(x_0; y_0)$ EXISTUJÍ PARCIÁLNÍ DERIVACE $f''_{xy}(x_0; y_0)$, $f''_{yx}(x_0; y_0)$ A JSOU SPOJITÉ, PAK JSOU SI ROVNY. MOHU JE TEDY ZAMĚNIT.

PŘÍKLAD: SPOČTĚTE SMÍŠENÉ PARCIÁLNÍ DERIVACE f''_{xy}

$$f(x;y) = \frac{y^{27} \ln y + x y^2 \sin x}{\partial y}$$

PAK ∂x

KDYŽ ZAČNEME DERIVOVAT PODLE $\underline{y}$ TAK BUDEME DERIVOVAT HNUSNÝ SOUČIN A JEŠTĚ NÁM BUDE ZBÝVAT $\underline{\partial x}$.

ZDERIVUJI NEJPRVE $\underline{\partial x}$ A UŠETŘÍM HODNĚ PRÁCE.

$$\cancel{\frac{\partial f'(x;y)}{\partial x} = y^2 \cdot \cos x} \qquad \cancel{\frac{\partial f''(x;y)}{\partial y} = 2y \cdot \cos x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 \cdot \sin x + x \cdot y^2 \cdot \cos x$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 2y \sin x + 2xy \cos x$$

PARCIÁLNÍ DERIVACE SLOŽENÉ FUNKCE

FUNKCE DVOU PROMĚNNÝCH

$f(u(x;y);v(x;y))$

A TEĎ JI POTŘEBUJEME PARCIÁLNĚ ZDERIVOVAT PODLE x

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\ ;\ \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

PARCIÁLNÍ DERIVACE f VE SMĚRU NĚJAKÉHO VEKTORU

- MÁME FUNKCI $f(x;y;z)$ A CHCEME JI DERIVOVAT VE SMĚRU VEKTORU $\vec{s}=(s_x;s_y;s_z)$ (NĚKDY SE POŽADUJE ABY $\vec{s}$ BYL JEDNOTKOVÝ).
- MUSÍME POHLÍDAT ABY VEKTOR $\vec{s}$ A PŘÍPADNÁ MNOŽINA SPADALI DO DEFINIČNÍHO OBORU FUNKCE.

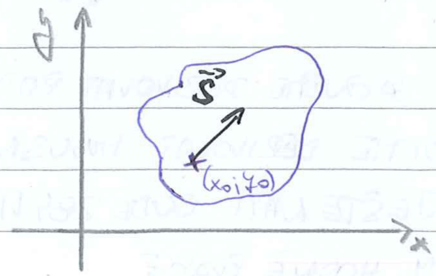
- MĚJME ÚSEČKU:

$$x=x_0+t\cdot s_x$$
$$y=y_0+t\cdot s_y \qquad t\in(-\varepsilon;\varepsilon)$$
$$z=z_0+t\cdot s_z$$

BUDEME PŘEDPOKLÁDAT, ŽE VŠECHNY BODY TÉTO ÚSEČKY LEŽÍ V MNOŽINĚ, NA NÍŽ JE $f(x;y;z)$ DEFINOVÁNA.

$$\frac{\partial f(x_0;y_0;z_0)}{\partial\vec{s}}=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t\cdot s_x;y_0+t\cdot s_y;z_0+t\cdot s_z)-f(x_0;y_0;z_0)}{t}$$

OBRÁZEK PRO FUNKCE DVOU PROMĚNNÝCH $(x;y)$



PRO FUNKCI DVOU PROMĚNNÝCH MÁME DEFINIČNÍ OBOR, KTERÝ SPLÝVÁ S ROVINOU TABULE. KDYŽ CHCEME POČÍTAT TU SMĚROVOU DERIVACI, TAK VEDEME ROVINU KOLMOU NA ROVINU TABULE, KTERÁ PROCHÁZÍ BODEM $(x_0;y_0)$ A VEKTOREM $\vec{s}$, PODÍVÁME SE JAK NÁM TATO ROVINA ŘÍZNE GRAF FUNKCE A DERIVACE VE SMĚRU VEKTORU $\vec{s}$ JE TEČNA KE KŘIVCE VE FUNKČNÍM BODĚ $f(x_0;y_0)$.

PLATÍ: $f(x(t);y(t);z(t))$ $$\frac{\partial f}{\partial\vec{s}}=\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{t=0}=\frac{\partial f}{\partial x}\underbrace{\frac{\partial x}{\partial t}}_{s_x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\underbrace{\frac{\partial y}{\partial t}}_{s_y}+\frac{\partial f}{\partial z}\underbrace{\frac{\partial z}{\partial t}}_{s_z}\Rightarrow$$

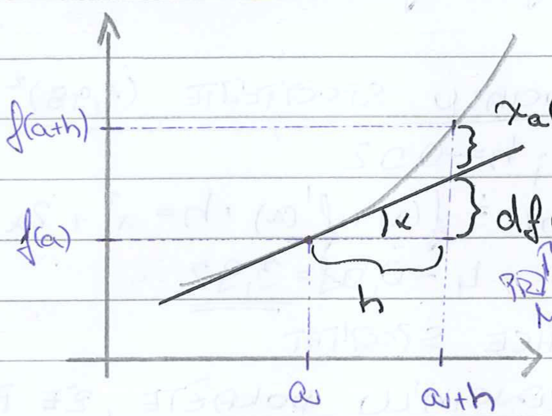
$$\boxed{= \frac{\partial f}{\partial x} s_x + \frac{\partial f}{\partial y} s_y + \frac{\partial f}{\partial z} s_z} \qquad \frac{\partial f}{\partial \vec{s}} = \text{grad} f \cdot \vec{s}$$

SKALÁRNÍ SOUČIN

GRADIENT URČUJE SPÁD FUNKCE. PARCIÁLNÍ DERIVACE JE MAXIMÁLNÍ, PŘI DERIVOVÁNÍ TAKOVÉHO VEKTORU, KTERÝ JE ROVNOBĚŽNÝ S GRADIENTEM f.

10. DIFERENCIÁL FUNKCE JEDNÉ A VÍCE PROMĚNNÝCH, KMENOVÁ FUNKCE

PRO FUNKCI f JEDNÉ REÁLNÉ PROMĚNNÉ - MŮŽEME PŘEDPOKLÁDAT, ŽE V BODĚ a MÁ FUNKCE DERIVACI $f'(a)$



$$f(a+h) - f(a) = \underbrace{df(a)(h)}_{\text{DIFERENCIÁL FUNKCE } f \text{ V BODĚ } a} + \chi_a(h)$$

DIFERENCIÁL ZÁVISÍ NA a (NA TOM JAK ZVOLÍME BOD) A NA h (NA VZDÁLENOSTI DRUHÉHO BODU.

PRO DIFERENCIÁL PLATÍ $\tan\alpha = \frac{df(a)(h)}{h} = f'(a) \Rightarrow df(a)(h) = f'(a) \cdot h$

$df(a)(h)$ – PŘÍRŮSTEK NA TEČNĚ.

VÝZNAM $\chi_a(h)$ - OPĚT ZÁVISÍ NA a A NA h. JE TO CHYBA, KTERÉ SE DOPUSTÍME, KDYŽ ~~PŘÍRŮSTEK~~ NAHRADÍME PŘÍRŮSTEK FUNKCE $(f(a+h) - f(a))$ PŘÍRŮSTKEM NA TEČNĚ. ČÍM MENŠÍ BUDE h, TÍM VÍCE BUDE $\chi_a(h)$ ZTRÁCET VÝZNAM.

$$\chi_a(h) = f(a+h) - f(a) - df(a)(h)$$

VYUŽIJI VZTAHU PRO $df(a)(h) = f'(a) \cdot h$

$$\chi_a(h) = f(a+h) - f(a) - f'(a) \cdot h \qquad /: h$$

$$\frac{\chi_a(h)}{h} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a)$$

UDĚLÁME LIMITNÍ PŘECHOD PRO $h \to 0$ CHCEME UKÁZAT, ŽE TATO VELIČINA SE PRO $h \to 0$ STANE ZANEDBATELNOU

$$\lim_{h\to 0} \frac{\chi_a(h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) = $$

$$= f'(a) - f'(a) = 0$$

$\chi_a(h)$ BĚŽÍ K NULE RYCHLEJI NEŽ h

DEFINICE DERIVACE

$$f(a+h) - f(a) = df(a)(h) + \chi_a(h)$$

$h \to 0$ PAK $\chi_a(h)$ SE STANE ZANEDBATELNOU

$$f(a+h) - f(a) = df(a)(h) + \chi_a(h)$$

$$f(a+h) - f(a) = f'(a) \cdot h + \underbrace{\chi_a(h)}_{\Downarrow\ 0 \text{ LIMITNÍ PŘÍPAD}}$$ ← ZANEDBÁME

$$f(a+h) - f(a) \doteq f'(a) \cdot h$$

OPĚT $\doteq$ PLATÍ TÍM LÉPE ČÍM JE $\underline{h}$ BLÍŽE K NULE

JINÉ MOŽNOSTI ZAPSÁNÍ:

$$f(a+h) - f(a) \doteq f'(a) \cdot h$$

$$\Delta f(a) \doteq f'(a) \cdot \Delta x$$ ← KONEČNÁ ZMĚNA

$$df(x) = f'(x)\,dx$$ ← NEKONEČNÁ ZMĚNA

PŘÍKLAD – POMOCÍ DIFERENCIÁLU SPOČÍTEJTE $(1{,}98)^2$

$f(x) = x^2$; $a = 2$; $h = -0{,}02$

MUSÍME VHODNĚ STANOVIT V BODĚ $\underline{a}$ MOHU FUNKCI LEHCE SPOČÍTAT

$$(1{,}98)^2 = f(a+h) \doteq f(a) + f'(a) \cdot h = x^2 + 2x \cdot (-0{,}02) =$$
$$= 4 - 0{,}08 = \underline{3{,}92}$$

– POMOCÍ DIFERENCIÁLU DOKAŽTE, ŽE PRO MALÉ HODNOTY ÚHLU (V RADIÁNECH) PŘIBLIŽNĚ PLATÍ $\sin x \doteq x$

$f(x) = \sin x$; $a = 0$; $h = x$

$$\sin x = f(a+h) \doteq f(0) + x \cdot (\sin x)' = \overbrace{\sin 0}^{0} + x \cdot \overbrace{\cos 0}^{1} =$$
$$= x$$

DIFERENCIÁL FUNKCE VÍCE PROMĚNNÝCH

– BUDEME MÍT SKALÁRNÍ FUNKCI $\underline{m}$ PROMĚNNÝCH

MÁME FUNCI f, KTERÁ PŘIŘAZUJE BODŮM $(x^1; \dots x^m)$ $f(x^1; \dots x^m)$

PŘIŘAZUJEME

$$f: \underbrace{(x^1 \dots x^m)}_{\in \mathbb{R}^m} \to f\underbrace{(x^1; \dots x^m)}_{\in \mathbb{R}}$$

35

DEFINICE: ŘEKNEME ŽE $f:(x^1;\dots x^m)\to f(x^1;\dots x^m)$ JE V BODĚ $(a^1;\dots a^m)$ DIFERENCOVATELNÁ, JESTLIŽE EXISTUJE LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ $\lambda: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, TAK ŽE PLATÍ:

$$\lim_{h\to 0} \frac{|f(a+h)-f(a)-\underbrace{\lambda(h)}_{\text{DIFERENCIÁL}}|}{|h|} = 0$$

LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ - μ, TAK PLATÍ $\mu(x+y)=\mu(x)+\mu(y)$ A ROVNĚŽ $\mu(\alpha\cdot x)=\alpha\cdot\mu(x)$

α JE REÁLNÉ ČÍSLO

LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ SE DÁ VYJÁDŘIT NĚJAKOU VHODNOU MATICÍ.

NYNÍ SE PODÍVÁME NA TU LIMITU, BOD $a=(a^1;\dots a^m)\in\mathbb{R}^m$ (DO $\mathbb{R}^m$ PATŘÍ, PROTOŽE JE TO ARGUMENT FUNKCE), TO STEJNÉ PLATÍ PRO $h=(h^1;\dots h^m)\in\mathbb{R}^m$. ABSOLUTNÍ HODNOTA h ZNAMENÁ $|h|=\sqrt{(h^1)^2+(h^2)^2+\dots+(h^m)^2}$, KDYŽ $h\to 0$ PAK $h^1\to 0;\ h^2\to 0\dots h^m\to 0$ $(h^1;h^2;\dots h^m)\to(0;\dots 0)$. ROVNĚŽ PLATÍ $f(a+h)\in\mathbb{R}$ (JE REÁLNÉ ČÍSLO) $f(a)\in\mathbb{R}$ A $\lambda(h)\in\mathbb{R}$ (JSOU ROVNĚŽ REÁLNÁ ČÍSLA), PROTOŽE JE ZOBRAZENÍ, KTERÉ USPOŘÁDANÉ DVOJICI PŘIŘAZUJE REÁLNÉ ČÍSLO. $\lambda(h)$ LZE VYJÁDŘIT MATICÍ:

$$\lambda(h) = \underbrace{(\lambda_1;\dots\lambda_m)}_{\text{POPISUJE ZOBRAZENÍ } \lambda}\begin{pmatrix} h^1 \\ \vdots \\ h^m \end{pmatrix}$$

JAKÝ MAJÍ VÝZNAM KOEFICIENTY $\lambda_1\dots\lambda_m$ (MĚLI BY BÝT ROVNY PARCIÁLNÍM DERIVACÍM)

SPĚT VYUŽIJEME LIMITU $h\to 0$

$$\lim_{h\to 0}\frac{|f(a+h)-f(a)-\lambda(h)|}{|h|}=0$$ ZKUSÍME ROZEPSAT

$$\lim_{h\to 0}\frac{|f(a^1+h^1;a^2+h^2;\dots;a^m+h^m)-f(a^1,a^2,\dots a^m)-\lambda_1h^1-\lambda_2h^2-\lambda_3h^3\dots\lambda_mh^m|}{\sqrt{(h^1)^2+(h^2)^2+\dots(h^m)^2}}=0$$

TOTO PLATÍ ZCELA OBECNĚ.

VEZMEME 1 SPECIÁLNÍ PŘÍPAD: POLOŽÍME $h^1 = H;\ h^2 = h^3 = \dots = h^m = 0$

$$\lim_{H \to 0} \left| \frac{f(a^1 + H; a^2; \dots a^m) - f(a^1; a^2; \dots a^m) - \lambda_1 \cdot H}{H} \right| = 0$$

$$\lim_{H \to 0} \frac{f(a^1 + H; a^2; \dots a^m) - f(a^1; \dots a^m)}{H} - \lambda_1 = 0$$

$$\lambda_1 = \lim_{H \to 0} \frac{f(a^1 + H; a^2; \dots a^m) - f(a^1; a^2; \dots a^m)}{H} = \left. \frac{\partial f}{\partial x^1} \right|_a$$

ANALOGICKY: $\lambda_i = \left. \frac{\partial f}{\partial x^i} \right|_a \quad 1 \leq i \leq m$

FUNKCE JE DIFERENCOVATELNÁ V NĚJAKÉM KONKRÉTNÍM BODĚ, POKUD TOTO PLATÍ PAK V TOM BODĚ EXISTUJÍ PARCIÁLNÍ DERIVACE

PLATÍ: 1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ JE DIFERENCOVATELNÁ V BODĚ $a \in \mathbb{R}$
$\iff$ EXISTUJE -LI $f'(a)$
(PRÁVĚ TEHDY)

2) $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ JE DIFERENCOVATELNÁ V BODĚ $a = (a^1; \dots a^m) \in \mathbb{R}^m$
$\Rightarrow$ EXISTUJÍ PARCIÁLNÍ DERIVACE $\left. \frac{\partial f}{\partial x^i} \right|_a$ PRO VŠECHNA i, $1 \leq i \leq m$
PLATÍ JEN NA JEDNU STRANU,
IMPLIKACI LZE OBRÁTIT POKUD JSOU SPOJITÉ

JEŠTĚ NÁVRAT K LIMITĚ

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(a+h) - f(a) - \lambda(h)|}{|h|} = 0$$

KDYŽ $h \to 0$ UTÍKÁ K NULE, PŘIBLIŽNĚ PLATÍ

$$f(a+h) - f(a) \doteq h \cdot \lambda(h) = \underbrace{\lambda_1}_{\frac{\partial f}{\partial x^1}} h^1 + \underbrace{\lambda_2}_{\frac{\partial f}{\partial x^2}} h^2 + \dots \underbrace{\lambda_m}_{\frac{\partial f}{\partial x^m}} h^m$$

36.

$$f(a+h) - f(a) = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x^1}\Big|_a h^1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^m}\Big|_a h^m} = \frac{\partial f}{\partial x^i} \cdot h^i$$

DIFERENCIÁL FUNKCE m PROMĚNNÝCH V BODĚ a

JINÝ ZPŮSOB ZÁPISU: $df(a) = \frac{\partial f}{\partial x^1} \Delta x^1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^m} \Delta x^m$

$$df(x) = \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2} dx^2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^m} dx^m$$

PŘÍKLAD: POMOCÍ DIFERENCIÁLU FUNKCE DVOU PROMĚNNÝCH PŘIBLIŽNĚ VYPOČTĚTE $\left(\frac{1{,}98}{2{,}01}\right)^3$

$f(x) = \left(\frac{x}{y}\right)^3 \quad a(a_1; a_2) = (2;2) \quad h = (-0{,}02; 0{,}01)$

$$\left(\frac{1{,}98}{2{,}01}\right)^3 = f(2;2) + \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(2;2)} h^1 + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(2;2)} \cdot h^2 =$$

$$= 1 + \frac{3}{2}(-0{,}02) - \frac{3}{2}(0{,}01) = 1 + \frac{-0{,}06}{2} - \frac{0{,}03}{2} = 1 - \frac{0{,}09}{2} = \underline{0{,}955}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{3x^2}{y^3} = \frac{3 \cdot 2^2}{8} = \frac{12}{8} = \underline{\frac{3}{2}} \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^3}{y^4}(-3) = \frac{8}{16}(-3) = -\underline{\frac{3}{2}}$$

DIFERENCIÁL FUNKCE TŘÍ REÁLNÝCH PROMĚNNÝCH

$$df(x;y;z) = \frac{\partial f(x;y;z)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x;y;z)}{\partial y} dy + \frac{\partial f(x;y;z)}{\partial z} dz$$

$\delta W = F_x(x;y;z)dx + F_y(x;y;z)dy + F_z(x;y;z)dz$ – VÝRAZ PRO ELEMENTÁRNÍ PRÁCI

VIDÍME, ŽE TENTO VÝRAZ JE VELICE PODOBNÝ PŘEDCHÁZEJÍCÍMU

δ ← OBECNĚ PRÁCE SÍLY ZÁVISÍ NA TOM JAK ZVOLÍME KŘIVKU, KTERÁ DVA BODY SPOJUJE.

OTÁZKA – ZA JAKÝCH PODMÍNEK EXISTUJE FUNKCE $f(x;y;z)$ (KMENOVÁ FUNKCE), PRO NÍŽ, KDYŽ UDĚLÁM DIFERENCIÁL TO DOPADNE TAKTO:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

TAKOVÉ FUNKCI SE ŘÍKÁ KMENOVÁ

EKVIVALENTNÍ OTÁZKA Z FYZIKY ZNÍ – ZA JAKÝCH PODMÍNEK JE POLE SÍLY $\vec{F}$ KONZERVATIVNÍ?

KONZERVATIVNÍ SILOVÉ POLE – PRÁCE PO UZAVŘENÉ KŘIVCE JE NULOVÁ, NEBO rot(POLE) = $\underline{0}$ – PLATÍ ZÁMĚNNOST PARCIÁLNÍCH DERIVACÍ. PRÁCE MEZI DVĚMA BODY $(a; b)$ NEZÁVISÍ NA INTEG. CESTĚ, PAK KAŽDÉMU BODU SILOVÉHO POLE PŘIŘADIT POTENCIÁLNÍ ENERGII.

PARAMETRIZUJEME

$$W = \int\limits_{\substack{C \\ \uparrow \\ \text{PRÁCE PO KŘIVCE } \underline{C}}} F_x dx + F_y dy + F_z dz = \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{\left(F_x \frac{dx}{dt} + F_y \frac{dy}{dt} + F_z \frac{dz}{dt}\right)}_{\frac{df}{dt}} dt =$$

$\frac{df}{dt}$ ← KMENOVÁ FUNKCE

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) dt = f(x(t_2); y(t_2); z(t_2)) - f(x(t_1); y(t_1); z(t_1))$$

ROZDÍL SOUŘADNIC POČÁTEČNÍHO A KONCOVÉHO BODU KŘIVKY, ROZDÍL KMENOVÝCH FUNKCÍ V POČÁTEČNÍM A KONCOVÉM BODU.

KMENOVÁ FUNKCE EXISTUJE (TJ. POLE JE KONZERVATIVNÍ) PRÁVĚ TEHDY KDYŽ:

$$\underbrace{\left(\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial x}\right) \text{ A ZÁROVEŇ } \left(\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial y}\right) \text{ A ZÁROVEŇ } \left(\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial z}\right)}_{\text{rot } \vec{F} = \vec{0}}$$

PARCIÁLNÍ DERIVACE JSOU SPOJITÉ

JAK URČIT KMENOVOU FUNKCI?

– ZPŮSOBŮ JE NĚKOLIK

– PŘEPÍŠI DVĚ PŘEDCHÁZEJÍCÍ ROVNICE I S PROMĚNNÝMI

$$df(x;y;z) = \boxed{\frac{\partial f(x;y;z)}{\partial x}}\boxed{dx} + \boxed{\frac{\partial f(x;y;z)}{\partial y}}\boxed{dy} + \boxed{\frac{\partial f(x;y;z)}{\partial z}}\boxed{dz}$$

$$dW = \boxed{F_x(x;y;z)}\boxed{dx} + \boxed{F_y(x;y;z)}\boxed{dy} + \boxed{F_z(x;y;z)}\boxed{dz}$$

1) ZPŮSOB – JEDNODUŠE SE PUSTÍM DO POROVNÁVÁNÍ

$$\frac{\partial f(x;y;z)}{\partial x} = F_x(x;y;z) \Rightarrow f(x;y;z) = \int F_x(x;y;z)\,\partial x + C(y;z)$$

NA y A z SE DÍVÁM JAKO NA KONSTANTY, INTEGRAČNÍ KONSTANTA, ZÁVISÍ NA y; z.

ZAJÍMÁ NÁS $C(y;z)$ PROTO UDĚLÁME TOTO:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial\left(\int F_x(x;y;z)\,\partial x + C(y;z)\right)}{\partial y} = F_y(x;y;z)$$

A POTOM JEŠTĚ POUŽÍT TŘETÍ PODMÍNKU NA ZJIŠTĚNÍ $C(z)$

2.) ZPŮSOB – ZAČÁTEK STEJNÝ, BUDEME ALE INTEGROVAT V URČITÝCH MEZÍCH, NEBUDEME MÍT KONSTANTU

$$\frac{\partial f(x;y;z)}{\partial x} = F_x(x;y;z) \Longrightarrow \underbrace{f(x;y;z) - f(x_0;y;z)}_{\text{TOHLE VLASTNĚ ONA INT. KONST – NEZNÁMÁ}} = \int_{x_0}^{x} F_x(t;y;z)\,dt$$

Z ČERNÝCH RÁMEČKŮ (STRANA 36) PLYNE:

$$\frac{\partial f(x;y;z)}{\partial y} = F_y(x;y;z)$$ PLATÍ TO PRO $\forall (x;y;z)$, TEDY I PRO: $(x_0;y;z)$: $\frac{\partial f(x_0;y;z)}{\partial y} = F_y(x_0;y;z) =$

$$\Rightarrow f(x_0;y;z) - f(x_0;y_0;z) = \int_{y_0}^{y} F_y(x_0;t;z)\,dt$$

Z ČERVENÝCH RÁMEČKŮ (STRANA 36) PLYNE:

– OPĚT STEJNÝ MUSTR

$$\frac{\partial f(x;y;z)}{\partial z} = F_z(x;y;z)$$ PLATÍ PRO $\forall (x;y;z)$, TEDY I PRO: $(x_0;y_0;z)$: $\frac{\partial f(x_0;y_0;z)}{\partial z} = F_z(x_0;y_0;z) =$

$$\Rightarrow f(x_0;y_0;z) - f(x_0;y_0;z_0) = \int_{z_0}^{z} F_z(x_0;y_0;t)\,dt$$

NYNÍ TO CELÉ POPADNU, SPOJÍM A ZÍSKÁM KMENOVOU FUNKCI

ZÁVĚR:

$$f(x;y;z) = f(x_0;y_0;z_0) + \int_{x_0}^{x} F_x(t;y;z)\,dt + \int_{y_0}^{y} F_y(x_0;t;z)\,dt + \int_{z_0}^{z} F_z(x_0;y_0;t)\,dt$$

PŘÍKLAD: ROZHODNĚTE ZDA EXISTUJE KMENOVÁ FUNKCE PRO:

$$\underbrace{(y\cdot\sin z + z\cdot\cos y)}_{F_x}dx + \underbrace{(x\cdot\sin z - \overset{2x}{\cancel{z}}\cdot\sin y)}_{F_y}dy + \underbrace{(xy\cos z + x\cos y)}_{F_z}dz$$

URČETE KMENOVOU FUNKCI, POKUD EXISTUJE...

EXISTUJE:

ZAČNEME TÍM, ŽE ZJISTÍME ZDA TAKOVÁ FUNKCE VŮBEC - MUSÍ PLATIT ZÁMĚNNOST PARCIÁLNÍCH DERIVACÍ

a) $\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$ b) $\frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x}$ c) $\frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}$

a) $\frac{\partial F_x}{\partial y} = \sin z + (-z\sin y)$; $\frac{\partial F_y}{\partial x} = \sin z - z\cdot\sin y$ ANO

b) $\frac{\partial F_x}{\partial z} = y\cdot\cos z + \cos y$; $\frac{\partial F_z}{\partial x} = y\cdot\cos z + \cos y$ ANO

c) $\frac{\partial F_y}{\partial z} = x\cdot\cos z - x\cdot\sin y$; $\frac{\partial F_z}{\partial y} = x\cdot\cos z - x\cdot\sin y$ ANO

KMENOVÁ FUNKCE EXISTUJE A TEĎ JI BUDEME HLEDAT

1 ZPŮSOB: $f(x;y;z) = f(x_0;y_0;z_0) + \int_{x_0}^{x} F_x(t;y;z)\,dt + \int_{y_0}^{y} F_y(x_0;t;z)\,dt + \int_{z_0}^{z} F_z(x_0;y_0;t)\,dt$

MÍSTO x - PÍŠU t   MÍSTO y - PÍŠU t

$$f(x;y;z) = C + \int_{x_0}^{x}(y\sin z + z\cos y)\,dt + \int_{y_0}^{y}(x_0\cdot\sin z - x_0 z\sin t)\,dt + \int_{z_0}^{z}(x_0 y_0\cdot\overset{\cos}{\cancel{\sin}}\,t - x_0\cdot\cos y_0)\,dt =$$

MÍSTO z - PÍŠU t

$$= C + [t\cdot(y\cdot\sin z + z\cdot\cos y)]_{x_0}^{x} + [x_0\sin z\cdot t + x_0\cdot z\cdot\cos t]_{y_0}^{y} + [y_0 x_0\cdot\sin t + x_0\cdot t\cdot\cos y_0]_{z_0}^{z} =$$

$$= C + [(y x\sin z + z\cos y)x - x_0(y\cdot\sin z + z\cos y)] + [x_0\cdot y\cdot\sin z + x_0\cdot z\cdot\cos y_0 - x_0\cdot y_0\cdot\sin z - x_0\cdot z\cdot\cos y_0] + [y_0\cdot x_0\cdot\sin z + x_0\cdot z\cdot\cos y_0 - y_0\cdot x_0\cdot\sin z_0 - x_0\cdot z_0\cdot\cos y_0] = \underline{\underline{D + xy\sin z + xz\cdot\cos y}}$$

D = KONST

38.

NEURČITÝ INTEGRÁL

2) ZPŮSOB: $\frac{\partial f}{\partial x} = F_x \Rightarrow f = \int (y \sin z + z \cdot \cos y)\, \partial x =$

$= xy \sin z + x \cdot z \cdot \cos y + c(y;z)$

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(xy \sin z + xz \cos y + c(y;z)) = F_y =$

$= \cancel{x \cdot \sin z} - \cancel{xz \cdot \sin y} + \frac{c(y;z)}{\partial y} = \overbrace{\cancel{x \cdot \sin z} - \cancel{xz \cdot \sin y}}^{F_y}$

ZBYDE

$\frac{\partial c(y;z)}{\partial y} = 0 \Rightarrow c(y;z) = \int 0\, dy = c(z)$

$f = x \cdot y \cdot \sin z + xz \cos y + c(z)$

$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(xy \sin z + xz \cos y + c(z)) = F_z$

$\cancel{xy \cos z} + \cancel{x \cos y} + \frac{\partial c(z)}{\partial z} = \cancel{xy \cos z} + \cancel{x \cos y}$

$\frac{\partial c(z)}{\partial z} = 0$

$c(z) = \int 0\, dz = D$ — KONSTANTA (NEZÁVISLÁ NA $x;y;z$)

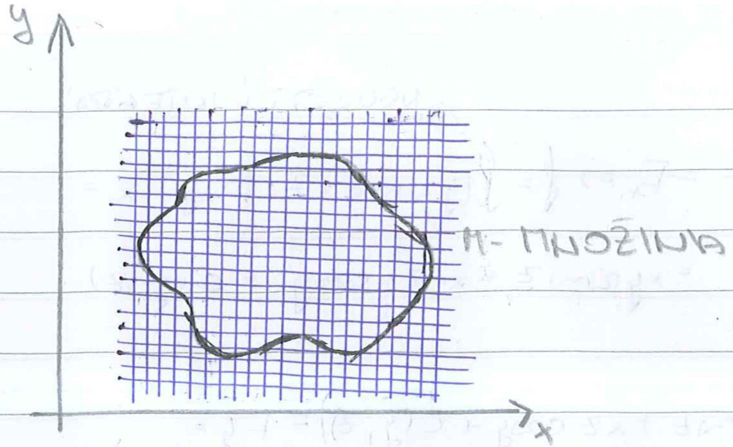
$f = x \cdot y \sin z + xz \cos y + D$ TOTO JE KMENOVÁ FUNKCE

11.) A 12.) DVOJNÝ A TROJNÝ INTEGRÁL

DEFINICE DVOJNÉHO INTEGRÁLU:

- ŘEKNEME, ŽE MÁME PRO JEDNODUCHOST SKALÁRNÍ FUNKCI DVOU PROMĚNNÝCH, TO ZNAMENÁ ŽE NĚJAKÉ USPOŘÁDANÉ DVOJICI Z MNOŽINY M, S TÍM ŽE ~~PODMNOŽINA~~ MNOŽINA M JE PODMNOŽINOU MNOŽINY $\mathbb{R}^2$, SE PŘIŘAZUJE HODNOTA $f(x;y)$ LEŽÍCÍ V MNOŽINĚ $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}^2 \supseteq M \ni (x;y) \quad f(x;y) \in \mathbb{R}$



MNOŽINU ROZDĚLÍME POMOCÍ ČTVERCOVÉ SÍTĚ, PAK SI VEZMEME NĚJAKÝ ČTVEREČEK UVNITŘ MNOŽINY, Z NICHŽ KAŽDÝ MÁ STRANU O VELIKOSTI $1/n$. VNITŘNÍ ČTVEREČKY NEJSOU PROBLÉM.

NA KAŽDÉ MNOŽINĚ M_i JSME ZKONSTRUOVALI FUNKČNÍ HODNOTU ODPOVÍDAJÍCÍ MINIMU A MAXIMU FUNKCE TÍM JSME ZÍSKALI KVÁDR. PAK JSME ZÍSKALI HORNÍ A DOLNÍ SOUČTY

<u>HORNÍ SOUČTY</u> PŘÍSLUŠNÉ FUNKCI f A DĚLENÍM D_n

$$S_n(f;M) = \sum M_i \cdot m(D_n)$$

M_i - JE MAXIMÁLNÍ HODNOTA FUNKCE NA PŘÍSLUŠNÉ DĚLÍCÍ MNOŽINĚ

$m(D_n)$ - OBSAH DĚLÍCÍ MNOŽINY D_n

<u>DOLNÍ SOUČTY</u> PŘÍSLUŠNÉ FUNKCI f A DĚLENÍM D_n

$$s_n(f;M) = \sum m_i \cdot m(D_n)$$

m_i - JE MINIMÁLNÍ HODNOTA FUNKCE NA PŘÍSLUŠNÉ DĚLÍCÍ MNOŽINĚ

NYNÍ BUDEME ZJEMŇOVAT DĚLENÍ ($n \to \infty$) POČET ČTVEREČKŮ

$$S_n(f;M) \Rightarrow \iint_M f(x;y)\,dx\,dy \Leftarrow s_n(f;M)$$

POKUD JE SPOJITÁ, PAK INTEGRÁL

NYNÍ TAM MÁME <u>DVOJNÝ INTEGRÁL</u> Z FUNKCE f NA MNOŽINĚ M.
U TROJNÉHO INTEGRÁLU UŽ TO NEBUDE MNOŽINA, ALE NĚJAKÝ KVÁDRIK NEBO NĚJAKÉ OBECNÉ OMEZENÍ V PROSTORU.

APLIKACE PRO DVOJNÝ INTEGRÁL	APLIKACE PRO TROJNÝ INTEGRÁL
• OBSAH ROVINNÉ PLOCHY $S = \iint_M dx\,dy$	• OBJEM TĚLESA $V = \iiint dx\,dy\,dz$
• HMOTNOST ROVINNÉ PLOCHY $m = \iint_M \sigma(x;y)\,dx\,dy$ (σ – PLOŠNÁ HUSTOTA)	• HMOTNOST TĚLESA $m = \iiint_T \rho(x;y;z)\,dx\,dy\,dz$ (ρ – OBJEMOVÁ HUSTOTA)

- SOUŘADNICE STŘEDU HMOTNOSTI

$$r_0 = \frac{\iint_M \vec{r} \cdot \tau(x;y)\, dx\, dy}{m}$$

$$x_0 = \frac{\iint_M x \tau\, dx\, dy}{m} \; ; \; y_0 = \frac{\iint_M y \tau(x;y)\, dx\, dy}{m}$$

$$r_0 = \frac{\iiint_T \vec{r} \cdot \rho(x;y;z)\, dx\, dy\, dz}{m}$$

$$x_0 = \ldots \; ; \; y_0 = \ldots \; ; \; z = \ldots$$

- MOMENT SETRVAČNOSTI

$$J_x = \iint_M y^2 \tau(x;y)\, dx\, dy$$

$$J_y = \iint_M x^2 \tau(x;y)\, \underbrace{dx\, dy}_{dS}$$

VZDÁLENOST OD OSY OTÁČENÍ

$$J_x = \iiint_T (y^2+z^2)\rho(x;y;z)\, dx\, dy\, dz$$

$$J_y = \iiint_T (x^2+z^2)\rho(x;y;z)\, dx\, dy\, dz$$

$$J_z = \iiint_T (y^2+x^2)\rho(x;y;z)\, \underbrace{dx\, dy\, dz}_{dV}$$

ELEMENT HMOTNOSTI

METODY VÝPOČTU

1) FUBINIOVA VĚTA

- ŘEKNĚME, ŽE MÁME DVĚ ROVNICE $g(x)$ A $h(x)$, KTERÉ JSOU SPOJITÉ NA INTERVALU $[a;b]$, A PRO VŠECHNA $x \in [a;b]$ PLATÍ: $g(x) \leq y \leq h(x)$.
- PAK MÁME MNOŽINU M, KTERÁ JE URČENA USPOŘÁDANÝMI DVOJICEMI $x;y$ A PLATÍ $a \leq x \leq b$; $g(x) \leq y \leq h(x)$. POTOM PŘEDPOKLÁDÁME, ŽE FUNKCE $f(x;y)$, KTERÁ BĚŽÍ Z MNOŽINY M DO MNOŽINY REÁL. ČÍSEL ($\mathbb{R}$).

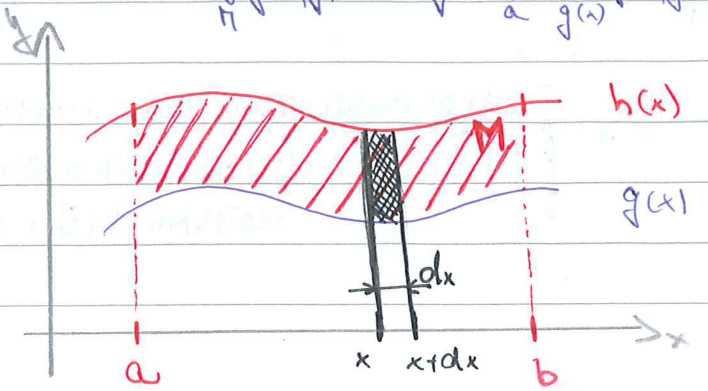
$M = \{[x;y]\; a \leq x \leq b\; ; g(x) \leq y \leq h(x)\}$ $f(x;y): M \to \mathbb{R}$

ROVNĚŽ PLATÍ $\mathbb{R}^2 \supseteq M \ni (x;y) \to f(x;y) \in \mathbb{R}$, DÁLE PŘEDPOKLÁDÁME, ŽE $f(x;y)$ JE NA MNOŽINĚ M SPOJITÉ, OMEZENÉ, A ŽE EXISTUJE:

$$\iint_M f(x;y)\, dx\, dy$$

TO VLASTNÍ TVRZENÍ MŮŽEME NAPSAT TAKTO

$$\iint_M f(x;y)\, dx\, dy = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x;y)\, dy \right) dx$$



S x PROJEDU CELÝ INTERVAL $a;b$. TOSTEJNĚ I PRO y

PRO FUNKCI 3 REÁLNÝCH PROMĚNNÝCH – TĚŽKÉ NAKRESLIT, ALE DÁ SE ZOBECNIT (TA FUBINIOVA VĚTA):

$$\iiint_T f(x;y;z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} \left(\int_{G(x;y)}^{H(x;y)} f(x;y;z)\,dz \right) dy \right) dx$$

PŘÍKLAD $\iint_M f(x;y)\,dx\,dy \quad f(x;y) = (x^2+y)$

MNOŽINA M BUDE OMEZENÁ FUNKCEMI $y=x^2$; $y=\sqrt{x}$

$x \in [0;1]$.

$$\iint_M f(x;y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2+y)\,dy \right) dx = \int_0^1 \left(\left[x^2 \cdot y + \frac{y^2}{2} \right]_{x^2}^{\sqrt{x}} \right) dx =$$

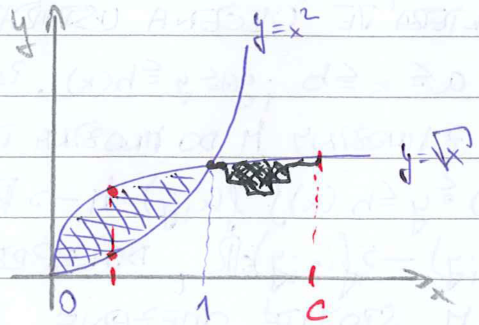
ODKUD KAM SE MĚNÍ x

ZAFIXUJI x A JAK SE MĚNÍ y

$$= \int_0^1 \left(x^2 \cdot \sqrt{x} + \frac{x}{2} - x^4 - \frac{x^4}{2} \right) dx = \int_0^1 \left(x^{5/2} + \frac{x}{2} - \frac{3}{2}x^4 \right) dx =$$

$$= \left[\frac{x^{7/2}}{7/2} + \frac{x^2}{4} - \frac{3}{2} \cdot \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \left[\frac{2x^{7/2}}{7} + \frac{x^2}{4} - \frac{3x^5}{10} \right]_0^1 =$$

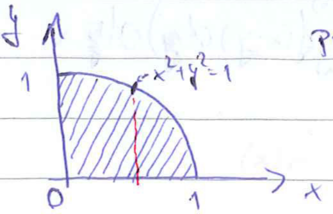
$$= \left[\frac{2}{7} + \frac{1}{4} - \frac{3}{10} \right] = \frac{2}{7} + \frac{5-6}{20} = \frac{2}{7} - \frac{1}{20} = \frac{40-7}{140} = \underline{\frac{33}{140}}$$



2) VĚTA O TRANSFORMACI PROMĚNNÝCH V INTEGRAČNÍM OBORU

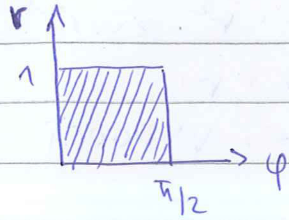
- PROČ JE TATO VĚTA DŮLEŽITÁ? FUBINIOVA VĚTA NÁM DÁVÁ $\int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x;y)\,dy \right) dx$

PŘI ZAFIXOVANÉM x JAK SE NÁM MĚNÍ $y = \sqrt{1-x^2}$



POTOM BYCHOM JELI PODLE FUBINIOVY VĚTY $\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x;y)\,dy \right) dx$ BYLO BY DOST PROTIVNÉ KVŮLI ODMOCNINĚ

LEPŠÍ PŘEVÉST DO POLÁRNÍCH SOUŘADNIC, NAROVNÁ TO MNOŽINU



$\varphi \in [0; \pi]$

$r \in [0; 1]$

VĚTA M. MNOŽINA (OTEVŘENÁ) $M \subseteq \mathbb{R}^{n}$ ($m \lneq 2$; $n = 3$)

KE KAŽDÉMU BODU Z MNOŽINY NAJDEME ODDĚLNÍČEK KTERÝ HO OTVÁŘÍ

ZOBRAZENÍ $\alpha : M \to \mathbb{R}^{n}$, ZOBRAZENÍ MUSÍ BÝT VZÁJEMNĚ JEDNOZNAČNÉ, SPOJITĚ DIFERENCOVATELNÉ (EXISTUJÍ PARCIÁLNÍ DERIVACE A JSOU SPOJITÉ).

SPOJÍ DVĚ MNOŽINY M & $\mathbb{R}^{n}$

$M \subseteq \mathbb{R}^{n}$

M JE PODMNOŽINA PROSTORU $\mathbb{R}^{n}$ (V NAŠEM PŘÍPADĚ HRAJE ROLI JEN $n=2$ A $n=3$ TO JSOU FUNKCE 2 A 3 BODŮ). ZOBRAZENÍ α JE ZOBRAZENÍ Z M DO $\mathbb{R}^{n}$ A JE VZÁJEMNĚ JEDNOZNAČNÉ A SPOJITĚ DIFERENCOVATELNÉ (EXISTUJÍ PARCIÁLNÍ DERIVACE A JSOU SPOJITÉ). POTOM PRO KAŽDOU INTEGRABILNÍ FUNKCI $f : \alpha(M) \to \mathbb{R}$ PLATÍ:

$$\iiint_{\alpha(M)} f \,dx\,dy\,dz = \iiint_{M} (f \circ \alpha)\,|\det D\alpha|\,du\,dv\,dw$$

SKLÁDÁNÍ ZOBRAZENÍ

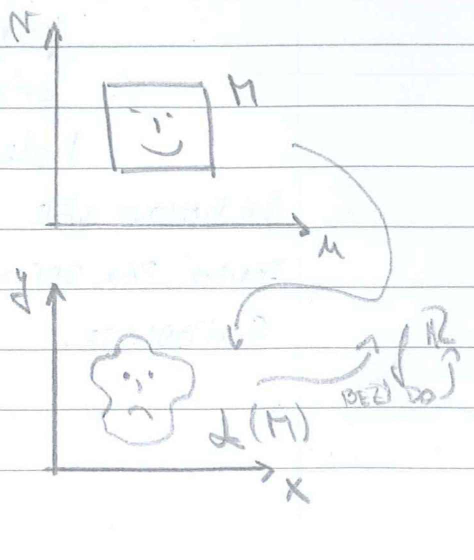
JAKOBIÁN

$$\iint_{\alpha(M)} f \,dx\,dy = \iint_{M} (f \circ \alpha)\,|\det D\alpha|\,du\,dv$$

$\alpha : (u; v; w) = (x(u;v;w); y(u;v;w); z(u;v;w))$

$$|\det D\alpha| = \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix} \right|$$

$$|\det D\alpha| = \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \right|$$



VÝSLEDKY JAKOBIÁNU

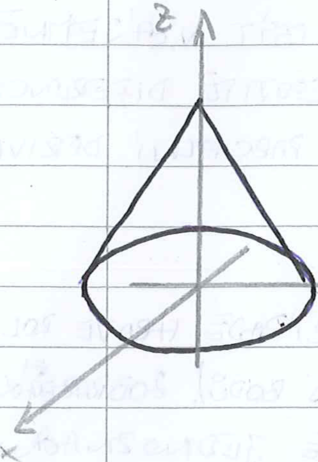
JAKOBIÁNY: POLÁRNÍ SOUŘADNICE : r

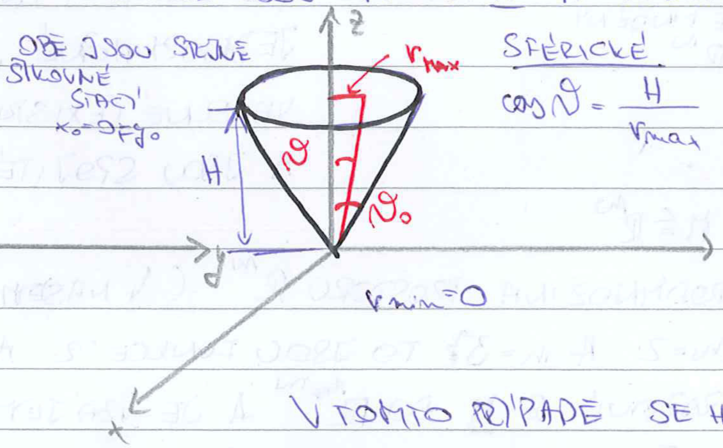
SFÉRICKÉ : $r^2 \cdot \sin\vartheta$

VÁLCOVÉ SOUŘADNICE : r

OBECNÉ KŘIVOČARÉ SOUŘADNICE : VÝPOČET

PŘÍKLAD - VYPOČTĚTE (VE VHODNÉ SOUSTAVĚ SOUŘADNIC) SOUŘADNICE STŘEDU HMOTNOSTI HOMOGENNÍHO KUŽELE. PARAMETRY KUŽELE JSOU VÝŠKA H A POLOMĚR PODSTAVY R





SFÉRICKÉ

$\cos\vartheta = \frac{H}{r_{max}} \quad r_{max} = \frac{H}{\cos\vartheta}$

V TOMTO PŘÍPADĚ SE HODÍ LÉPE SFÉRICKÉ

$x_0 = y_0 = 0$

$$z_0 = \frac{\iiint_T \rho(x;y;z) z\,dx\,dy\,dz}{M} = \frac{\overbrace{\cancel{\rho(x;y;z)}}^{\text{KONST.}} \iiint_T z\,dx\,dy\,dz}{\underbrace{\cancel{\rho(x;y;z)}}_{\text{KONST.}} \underbrace{\iiint_T dx\,dy\,dz}_{\text{OBJEM KUŽELU}}} = \frac{\iiint_T z\,dx\,dy\,dz}{\underbrace{\iiint_T dx\,dy\,dz}_{V}}$$

TOTO MUSÍME SPOČÍTAT

KONST. - JE TOTIŽ HOMOGENNÍ

OBJEM KUŽELU $V = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot H$

NYNÍ MUSÍME SPOČÍTAT VÝRAZ V ČITATELI, V KARTÉZSKÝCH SLOŽITÉ, PŘEJDEME DO SFÉRICKÝCH:

$x = r\cos\varphi \cdot \sin\vartheta \qquad r\ \varphi\ \vartheta \qquad r \in [0; \frac{H}{\cos\vartheta}]$

$y = r \cdot \sin\varphi \cdot \sin\vartheta \qquad \vartheta \in [0; \vartheta_0]$

$z = r \cdot \cos\vartheta \qquad \varphi \in [0; 2\pi]$

$|\det \mathcal{D}x| = r^2 \cdot \sin\vartheta$

VE FUBINIOVĚ VĚTĚ JSME ZAFIXOVALI 1 SOUŘADNICI A SLEDOVALI JAK SE MĚNÍ DRUHÁ, PAK ZAFIXOVALI 1. A DRUHOU A SLEDOVALI JAK SE MĚNÍ TŘETÍ SOUŘADNICE.

41.

ZAFIXOVALI JSME φ

ZAFIXOVALI JSME ϑ

A TEĎ SE DÍVÁME JAK SE MĚNÍ r

$$\iiint z\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\vartheta_0}\left(\int_0^{H/\cos\vartheta} \underbrace{r\cdot\cos\vartheta}_{z}\cdot\underbrace{r^2\sin\vartheta}_{|\mathrm{Det}\,DX|}\,dr\right)d\vartheta\right)d\varphi =$$

$$= 2\pi\int_0^{\vartheta_0}\left(\int_0^{H/\cos\vartheta} r^3\cdot\cos\vartheta\cdot\sin\vartheta\,dr\right)d\vartheta = 2\pi\int_0^{\vartheta_0}\left(\sin\vartheta\cdot\cos\vartheta\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{H/\cos\vartheta}\right)d\vartheta =$$

PROTOŽE 2π DO 0, KDYŽ NEMÁM φ VE VÝRAZECH TAK PO INTEGRACI BUDEME MÍT JE φ (ZÁVORKY) A PO DOSAZENÍ NÁM ZŮSTANE JEN VÝRAZ S 2π, 0 TO POZŘE.

$$= 2\pi\int_0^{\vartheta_0}\left(\sin\vartheta\cdot\cancel{\cos\vartheta}\,\frac{H^4}{4\cdot\cos^{\cancel{4}\,3}\vartheta}\right)d\vartheta = \frac{2\pi\cdot H^4}{4}\int_0^{\vartheta_0}\sin\vartheta\cdot\frac{1}{\cos^3\vartheta}\,d\vartheta =$$

$$= \left|\begin{array}{l} t=\cos\vartheta \\ dt=d\vartheta\cdot(-\sin\vartheta) \\ -\dfrac{dt}{\sin\vartheta}=d\vartheta \\ \vartheta=0 \to t=\cos 0=1 \\ \vartheta=\vartheta_0 \to t=\cos\vartheta_0 \end{array}\right| = \frac{\pi\cdot H^4}{2}\int_1^{\cos\vartheta_0}\frac{\cancel{\sin\vartheta}}{t^3}\left(-\frac{dt}{\cancel{\sin\vartheta}}\right) =$$

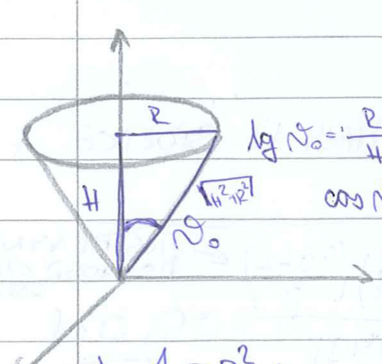
PŘEHODÍM MEZE A ZMIZÍ MÍNUS.

$$= \frac{\pi\cdot H^4}{2}\int_1^{\cos\vartheta_0}\left(-\frac{1}{t^3}\right)dt = \frac{\pi H^4}{2}\cdot\int_1^{\cos\vartheta_0} -t^{-3}\,dt = \frac{\pi H^4}{2}\cdot\int_{\cos\vartheta_0}^{1} t^{-3}\,dt =$$

$$= \frac{\pi H^4}{2}\cdot\left[\frac{t^{-2}}{-2}\right]_{\cos\vartheta_0}^{1} = -\frac{\pi H^4}{2}\left[\frac{1}{2t^2}\right]_{\cos\vartheta_0}^{1} = -\frac{\pi H^4}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cos^2\vartheta_0}\right] =$$

$$= -\frac{\pi H^4}{4}\left[1-\frac{1}{\cos^2\vartheta_0}\right] = -\frac{\pi\cdot H^4}{4}\left[1-\frac{H^2+R^2}{H^2}\right] = \frac{\pi H^4}{4}\left[\frac{H^2+R^2}{H^2}-1\right] =$$

$$= \frac{\pi H^4}{4}\left[\frac{\cancel{H^2}+R^2-\cancel{H^2}}{H^2}\right] = \frac{\pi H^{\cancel{4}\,2}\cdot R^2}{4\,\cancel{H^2}} = \frac{\pi}{4}H^2\cdot R^2 =$$



$\operatorname{tg}\vartheta_0 = \frac{R}{H}$

$\cos\vartheta = \frac{H}{\sqrt{H^2+R^2}}$

$$= \iiint_T z\,dx\,dy\,dz$$

$V = \frac{1}{3}\pi R^2\cdot H$

$$z_0 = \frac{\iiint_T z\,dx\,dy\,dz}{\underbrace{\iiint dx\,dy\,dz}_{V}} = \frac{\frac{\pi}{4}H^2\cdot\cancel{R^2}}{\frac{1}{3}\cancel{\pi}\cancel{R^2}\cancel{H}} = \frac{3}{4}H$$

13.) NÁHODNÉ VELIČINY, ZPRACOVÁNÍ MĚŘENÍ

DEFINICE PRAVDĚPODOBNOSTI:

- KLASICKÁ DEFINICE – PRAVDĚPODOBNOST $P(A) = \frac{M}{N}$ (JEV A), KDE M – JE POČET PŘÍZNIVÝCH, KU N COŽ JE POČET VŠECH MOŽNÝCH. DÁ SE APLIKOVAT POUZE KDYŽ JSOU VŠECHNY VÝSLEDKY STEJNĚ MOŽNÉ

- STATISTICKÁ DEFINICE – PRAVDĚPODOBNOST $P = \lim_{n \to \infty} \frac{n_s}{n}$; n_s – POČET ÚSPĚŠNÝCH POKUSŮ, n JE POČET VŠECH POKUSŮ.

PŘÍKLADY – VYUŽIJEME KLASICKOU DEFINICI PRAVDĚPODOBNOSTI (MÁME POCTIVOU KOSTKU)

1) JAKÁ JE PRAVDĚPODOBNOST, ŽE NA KOSTCE PADNE SUDÉ ČÍSLO?

$P = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

2) JAKÁ JE PRAVDĚPODOBNOST, ŽE PŘI SOUČASNÉM HODU DVĚMA KOSTKAMI PADNE SOUČET 7.

$(1;6)(6;1)(3;4)(4;3)(5;2)(2;5)$ 6 ÚSPĚŠNÝCH, 36 MOŽNÝCH

$P = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

3) JAKÁ JE PRAVDĚPODOBNOST HLAVNÍ VÝHRY VE SPORTCE A PÁTÉ CENY VE SPORTCE?

$P_{\text{HLAVNÍ CENA}} = \frac{1}{\binom{49}{6}} = 7 \cdot 10^{-8}$

Z 6 TAŽENÝCH 3 MUSÍME UHÁDNOUT

MUSÍME VYNÁSOBIT MOŽNOSTÍ ČÍSEL CO JSME NEZVOLILI

$P_{\text{PÁTÁ CENA}} = \frac{\binom{6}{3}\binom{49-6}{3}}{\binom{49}{6}} = 0{,}018$

VŠECHNY MOŽNÉ

$\binom{49}{6} = \frac{49!}{(49-6)! \cdot 6!} = 13\,983\,816$

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$ **KOMBINACE**

42

PRAVDĚPODOBNOST NEZÁVISLÝCH JEVŮ

PŘ. JAKÁ JE PRAVDĚPODOBNOST, ŽE PŘI HODU DVĚMA KOSTKAMI PADNE NA OBOU 6

A ... NA PRVNÍ PADNE 6 $P_A = \frac{1}{6}$

B ... NA DRUHÉ PADNE 6 $P_B = \frac{1}{6}$

C ... NA OBOU PADNE 6 $P_C = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

$$\boxed{P_C = P_A \cdot P_B}$$

PRAVDĚPODOBNOST NESLUČITELNÝCH JEVŮ

PŘ. JAKÁ JE PRAVDĚPODOBNOST, ŽE PŘI HODU KOSTKOU PADNE 6, NEBO 5.

$P_A = \frac{1}{6}$ ... PADNE 6

$P_B = \frac{1}{6}$ ... PADNE 5

$$P_C = \frac{\text{POČET VŠECH PŘÍZNIVÝCH}}{\text{— " — MOŽNÝCH}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P_C = P_A + P_B = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$\bar{A}$ – JE JEV OPAČNÝ K A (NENASTANE A)

$$P_{\bar{A}} = 1 - P_A = \frac{5}{6}$$

PŘ. JAKÁ JE PRAVDĚPODOBNOST, ŽE ZE SKUPINY N-STUDENTŮ BUDOU ALESPOŇ 2 NAROZENI VE STEJNÝ DEN.

KDYŽ N (POČET STUDENTŮ) > 365 TAK NEMUSÍME NIC POČÍTAT, NĚKDO MEZI NIMI BUDE!!!

N = 35 VARIACE S OPAKOVÁNÍM

$$P_{\bar{A}} = 1 - \frac{V_n\, 365}{V'_n\, 365} = \cancel{\frac{365^{35}}{\frac{365!}{330!}}} \doteq 1 \quad 1 - 0{,}016 \doteq 0{,}984$$

(VARIACE BEZ OPAKOVÁNÍ

BERNOULLIOVO SCHÉMA

(BERNOULLIŮV POKUS)

A ... JEV, KTERÝ NASTANE S PRAVDĚPODOBNOSTÍ P_A (ZDAR)

(KOSTKA, PADNE 6 ... $P = 1/6$; MINCE PADNE OREL ... $P = 1/2$

$\bar{A}$ ... JEV, OPAČNÝ K JEVU $\underline{A}$, $P_{\bar{A}}$ (NEZDAR) $P_{\bar{A}} = 1 - P_A$
(KOSTKA, PADNE NĚCO JINÉHO NEŽ $\underline{6}$ .. $p = 5/6$; MINCE, PADNE NĚCO JINÉHO NEŽ ~~12~~ OREL ... $p = 1/2$)

~~POKUD~~ POKUS BUDEME n-KRÁT NEZÁVISLE OPAKOVAT, JAKÁ JE PRAVDĚPODOBNOST k-KRÁT ZDARU?

$$P_{\text{NEZÁVISLÉ}} = \binom{n}{k} P_A^k (1 - P_A)^{n-k}$$

POŘADÍ ZDARU

ZPRACOVÁNÍ MĚŘENÍ

PŘ.) ŘEKNĚME ŽE BUDE MĚŘIT SÁL V POSLUCHÁRNĚ A ZAZNAMENÁME SI HODNOTY DÉLKY:

i	d [cm]
1)	235,5
2)	235,9
3)	235,1
4)	231,4
5)	235,6
6)	235,7
7)	235,4

NÁHODNÉ CHYBY -
- DOPROVÁZÍ PROCES MĚŘENÍ, ~~NE~~ SOUVISÍ S TÍM, JAK ZPRACOVÁVÁME MĚŘENÍ, ~~NEZBAVÍME SE JICH~~
NELZE ÚPLNĚ ODSTRANIT

SYSTEMATICKÉ CHYBY -
VŽDY ZATĚŽUJÍ CELÉ MĚŘENÍ, NE VŽDY JE V NĚM DOKÁŽEME ROZLIŠIT

HRUBÉ CHYBY -
VÝRAZNĚ SE VYMYKÁ NAMĚŘENÝM HODNOTÁM.

NÁHODNÉ VELIČINY
- JSOU DVOJÍHO DRUHU
- DISKRÉTNÍ - HODY KOSTKOU, POČET NAROZENÝCH LIDÍ V ROČNÍM OBDOBÍ (V MĚSÍCI APOD.)

43.)

— SPOJITÉ – VÁHA NAROZENÝCH DĚTÍ, HMOTNOST NEBO DÉLKA SOUČÁSTKY

NÁHODNÁ VELIČINA S DISKRÉTNÍM ROZDĚLENÍM

- ROZDĚLENÍM NÁHODNÉ VELIČINY ROZUMÍME TENTO SOUBOR

$(x_1; p_1); (x_2; p_2); (); \ldots; (x_m; p_m)$

HODNOTA — PRAVDĚPODOBNOST

$p_1 + p_2 + \ldots p_m = 1$

TENTO SOUBOR LZE CHARAKTERIZOVAT STŘEDNÍ HODNOTOU NÁHODNÉ VELIČINY:

$$\langle x \rangle = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_m x_m}{m_1 + m_2 + \ldots m_m} = \underbrace{\frac{m_1}{m_1 + \ldots + m_m}}_{p_1} x_1 + \underbrace{\frac{m_2}{m_1 + \ldots m_m}}_{p_2} x_2 + \ldots$$

POČET PŘÍPADŮ KDY PADNE VELIČINA m_1

$$+ \underbrace{\frac{m_m}{m_1 + \ldots + m_m}}_{p_m} x_m = \sum_{i=1}^{m} p_i \cdot x_i$$

ROZPTYL NÁHODNÉ VELIČINY

- SPOLU SE STŘEDNÍ HODNOTOU CHARAKTERIZUJE MĚŘENÍ

$$D = \sum_{j=1}^{N} (x_j - \langle x \rangle)^2 \cdot p_j = \sum_{j=1}^{N} (x_j^2 - 2x_j \cdot \langle x \rangle + \langle x \rangle^2)\, p_j = \underbrace{\sum_{j=1}^{N} x_j^2 \cdot p_j}_{\text{STŘEDNÍ HODNOTA } \langle x \rangle} -$$

$$- \sum_{j=1}^{N} 2x_j \langle x \rangle\, p_j + \sum_{j=1}^{N} \langle x \rangle^2 \cdot p_j =$$

ČÍSLO STEJNÉ VE VŠECH SČÍTANCÍCH

ČÍSLO STEJNÉ VE VŠECH SČÍTANCÍCH → MOHU VYJMOUT PŘED SUMU.

SOUČET VŠECH JE 1

$$= \langle x^2 \rangle - 2\langle x \rangle \underbrace{\sum_{j=1}^{N} x_j \cdot p_j}_{\langle x \rangle} + \langle x \rangle^2 \sum_{j=1}^{N} p_j = \langle x^2 \rangle - 2\langle x \rangle^2 + \langle x \rangle^2 =$$

$$= \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

NÁHODNÁ VELIČINA SE SPOJITÝM ROZDĚLENÍM

- NÁHODNOU VELIČINU SE SPOJITÝM ROZDĚLENÍM CHARAKTERIZUJE TZV. $w(x)$ .. HUSTOTA PRAVDĚPODOBNOSTI (NAMĚŘENÉ HODNOTY x)

$$w(x) = \frac{dp(x)}{dx} \qquad p(x) = w(x)\,dx$$

↳ PRAVDĚPODOBNOST, ŽE SE VELIČINA x NACHÁZÍ V INTERVALU $[x; x+dx]$

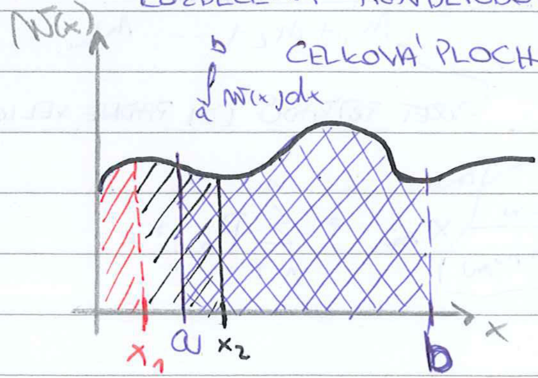
$$p(x) = \int_a^b w(x)\,dx$$

↳ PRAVDĚPODOBNOST, ŽE HODNOTA x BUDE NABÝVAT HODNOT Z INTERVALU $[a;b]$

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(x)\,dx = \underline{1}$$

ROZDĚLENÍ PRAVDĚPODOBNOSTI V GRAFU

CELKOVÁ PLOCHA POD GRAFEM = $\underline{1}$



STŘEDNÍ HODNOTA:

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot w(x)\,dx$$

DEF. OBOR POKUD JE JINÝ MŮŽE BÝT 0 -> 20 ..

ROZPTYL:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x - \langle x \rangle)^2\, w(x)\,dx = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

DISTRIBUČNÍ FUNKCE

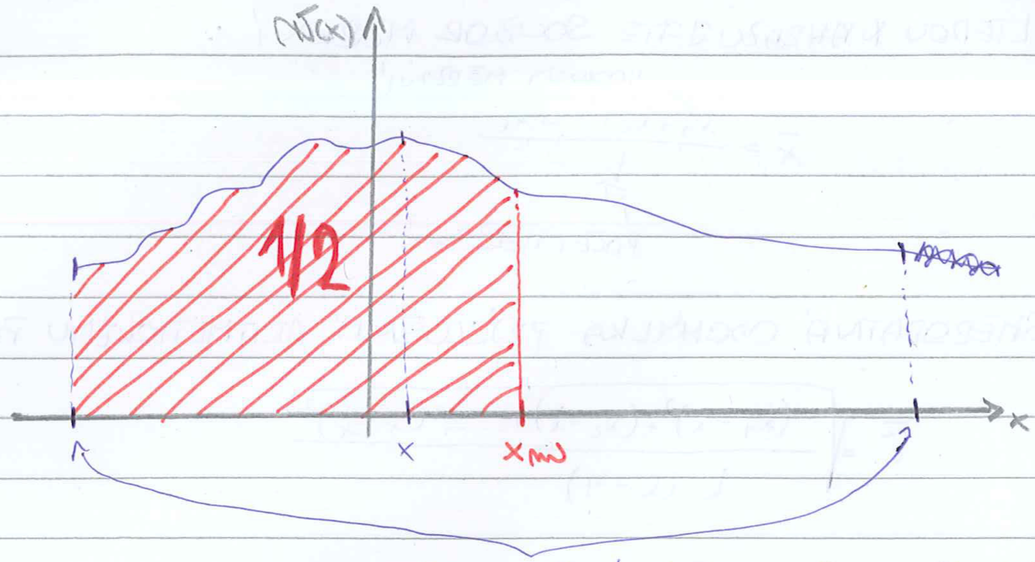
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} w(\xi)\,d\xi$$

DISTRIBUČNÍ FUNKCI VYROBÍME TAK, ŽE POJEDEME PO CELÉM DEFINIČNÍM OBORU A V NĚJAKÉM KONKRÉTNÍM x BUDE DISTRIBUČNÍ FUNKCE ZNAMENAT PLOCHU OD ZAČÁTKU DEFINIČNÍHO OBORU AŽ PO FUNKCI x.

44.)

MEDIÁN: JE TO TAKOVÁ HODNOTA x_m PRO NÍŽ $F(x)_{med} = 1/2$

KDYBYCHOM MĚLI TAKOVOUTO FUNKCI HUSTOTY PRAVDĚPODOBNOSTI, DEFINOVANOU NA KONKRÉTNÍM INTERVALU:



DEFINIČNÍ INTERVAL, PLOCHA POD KŘIVKOU ROVNA 1

KDYBYCHOM CHTĚLI POČÍTAT DISTRIBUČNÍ FUNKCI, TAK BYCHOM JE-LI PO TOM DEFINIČNÍM OBORU A PRO KAŽDÉ x BYCHOM ZJISTILI PLOCHU POD GRAFEM FUNKCE OD ZAČÁTKU DEFINIČNÍHO OBORU AŽ PO x. PRO MEDIÁN x_m PLATÍ ŽE ČÁST NALEVO JE ROVNA 1/2.

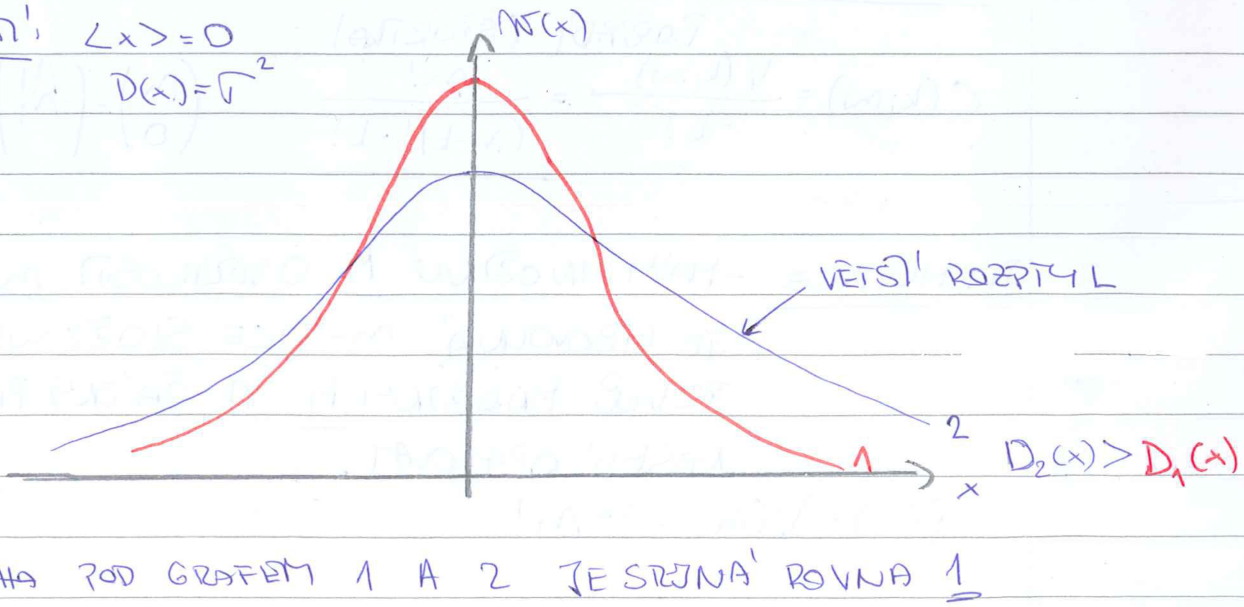
NORMÁLNÍ ROZDĚLENÍ

$$w(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right]$$

$(x-\mu)^2$ $\quad \mu = \langle x \rangle$

PLATÍ: $\langle x \rangle = 0$

$D(x) = \sigma^2$



PLOCHA POD GRAFEM 1 A 2 JE STEJNÁ ROVNA 1

ZPRACOVÁNÍ MĚŘENÍ

- PRŮMĚRNÁ HODNOTA NAMĚŘENÉ VELIČINY - JEDNA HODNOTA, KTEROU NAHRAZUJEME SOUBOR MĚŘENÍ:

HODNOTY MĚŘENÍ

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots x_k}{k}$$

POČET MĚŘENÍ

- SMĚRODATNÁ ODCHYLKA PŘÍSLUŠNÁ ARITMETICKÉMU PRŮMĚRU

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{(x_1-\bar{x})^2 + (x_2-\bar{x})^2 + \dots + (x_k-\bar{x})^2}{k\cdot(k-1)}}$$

$x = \bar{x} \pm \bar{\sigma}$ S RELATIVNÍ CHYBOU $\frac{\bar{\sigma}}{\bar{x}}$

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}}$$

VARIACE - BEZ OPAKOVÁNÍ

PLATÍ VZTAH $V(k;n) = \frac{n!}{(n-k)!}$ k - PRVKY, KTERÉ VYBÍRÁME

n - CELKOVÝ POČET PRVKŮ

VARIACE - S OPAKOVÁNÍM

$$V'(k;n) = n^k$$

KOMBINACE - Z MNOŽINY VYBÍRÁM OBJEKTY A NEZÁLEŽÍ NA POŘADÍ (SPORTKA)

$$C(k;n) = \frac{V(k;n)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!} \qquad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = \binom{0}{0} = 1$$

PERMUTACE - MÁM MNOŽINU M O VELIKOSTI n. PERMUTACE JE LIBOVOLNÁ n-TICE SLOŽENÁ Z PRVKŮ MNOŽINY M A ŽÁDNÝ PRVEK SE NESMÍ OPAKOVAT.

$$P(n) = V(n;n) = n!$$