(1)

1.) DVOJNÝ A TROJNÝ INTEGRÁL, ZAVEDENÍ, APLIKACE, METODY VÝPOČTU

SKALÁRNÍ FUNKCE DVOU/TŘÍ PROMĚNNÝCH

- TÝKÁ SE FUNKCÍ DVOU A VÍCE PROMĚNNÝCH
- USPOŘÁDANÉ DVOJICI $f:(x;y) \xrightarrow[\text{PŘIŘAZUJE}]{} \underbrace{f(x;y)}_{\text{FUNKČNÍ HODNOTA}} \in \mathbb{R}$

$f:(x;y)$ LEŽÍ V MNOŽINĚ $\underline{M} \subseteq \mathbb{R}^2$

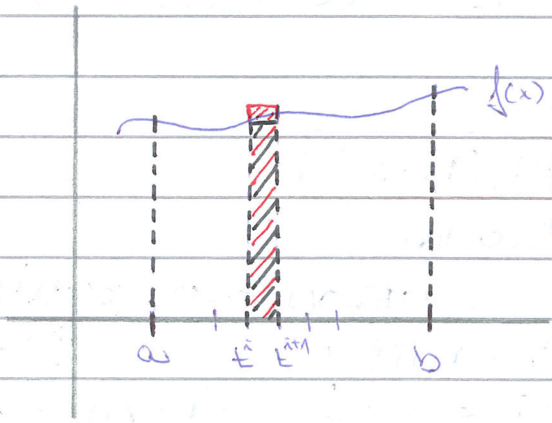
- USPOŘÁDANÁ TROJICE $f:(x;y;z) \xrightarrow[\text{PŘIŘAZENÍ}]{} \underbrace{f(x;y;z)}_{\text{FUNKČNÍ HODNOTA}} \in \mathbb{R}$

$f:(x;y;z)$ LEŽÍ V MNOŽINĚ $\underline{T} \subseteq \mathbb{R}^3$

OPAKOVÁNÍ

INTEGRÁL FUNKCE REÁLNÉ PROMĚNNÉ PŘES KONKRÉTNÍ MNOŽINU

$f:x \longrightarrow f(x) \in \mathbb{R}$ $\quad \int_{[a;b]} f(x)\,dx$ ← DEFINIČNÍ MNOŽINA (INTERVAL

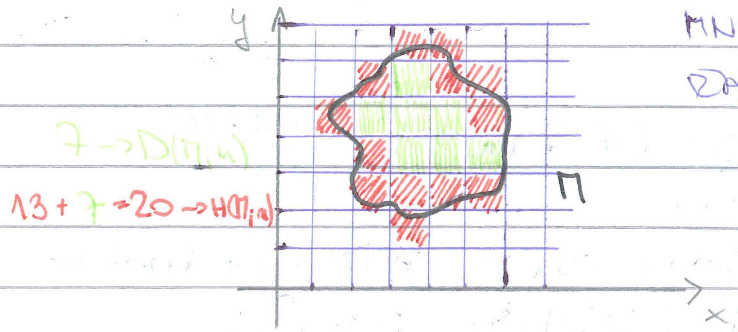


DOLNÍ SOUČTY

HORNÍ SOUČTY

. DĚLÍME DEFINIČNÍ OBOR [a;b]

ZAVEDENÍ DVOJNÉHO INTEGRÁLU



MNOŽINU $\underline{M}$ ROZDĚLÍME SÍTÍ ŘÁDU $\underline{n}$ ~~SÍŤ → SOUSTAVA~~

SÍŤ NULTÉHO ŘÁDU

- JE TO SOUSTAVA PŘÍMEK

$x = l \quad y = m \quad l, m \in \mathbb{Z}$ (CELÁ ČÍSLA)

SÍŤ n-TÉHO ŘÁDU

- DEFINUJEME ZPĚTNĚ, A TO TAK ŽE JI DOSTANEME ZE SÍTĚ (n-1) ŘÁDU ROZDĚLENÍM KAŽDÉHO ČTVERCE NA 4 STEJNÉ ČTVEREČKY

ODHAD OBSAHU MNOŽINY $M \subseteq \mathbb{R}^2$

- VYCHÁZÍME ZE SÍTĚ ŘÁDU m

DOLNÍ ODHAD - $D(M,m)$ - PŘÍSLUŠNÝ MNOŽINĚ M A DĚLENÍ m

$D(M,m) =$ "POČET □, KTERÉ LEŽÍ CELÉ UVNITŘ M A VYNÁSOBÍME OBSAHEM JEDNOHO □" $= 7 \cdot \left(\frac{1}{m+1}\right)^2$

$m=0$

HORNÍ ODHAD - $H(M;m)$ - PŘÍSLUŠNÝ MNOŽINĚ M A DĚLENÍ m

$H(M;m) =$ "POČET □, KTERÉ MAJÍ NEPRÁZDNÝ PRŮNIK S MNOŽINOU M A VYNÁSOBÍME OBSAHEM JEDNOHO □" $= 20 \cdot \left(\frac{1}{m+1}\right)^2$ $m=0$

PRO VŠECHNA m PLATÍ:

$$\boxed{D(M;m) \leq P \leq H(M;m)}$$

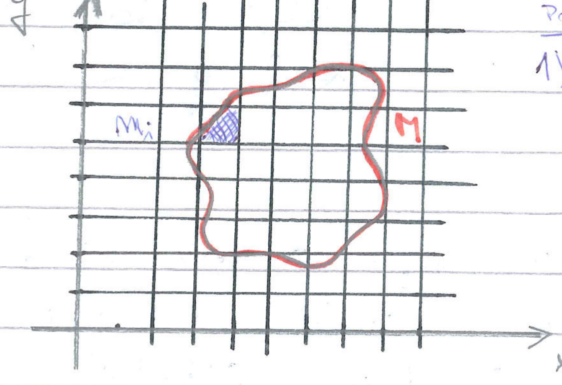
P - PLOCHA

NYNÍ NECHÁME m BĚŽET K NEKONEČNU, BUDEME TEDY ZJEMŇOVAT DĚLENÍ. V LIMITĚ:

$$\lim_{m\to\infty} D(M;m) \longrightarrow P \longleftarrow \lim_{m\to\infty} H(M;m)$$

LIMITY $D(M;m)$ A $H(M;m)$ MOHOU DOPADNOUT RŮZNĚ PRO OŠKLIVÉ FUNKCE.

INTEGRÁL Z FUNKCE $f(x;y)$ NA MNOŽINĚ $M \subseteq \mathbb{R}^2$



POSTUP:

1) DOLNÍ SOUČTY PŘÍSLUŠNÉ MNOŽINĚ M A JEJÍMU DĚLENÍ $\mathcal{D}_m$

$$D(M;\mathcal{D}_m;f) = \sum_i \overbrace{\min f(m_i)}^{\text{MINIMUM FUNKCE}} \cdot \text{OBSAH}(m_i)$$

m_i - JE MALÁ MNOŽINA (PODMNOŽINA) NA MNOŽINĚ M

2

2) HORNÍ SOUČTY PŘÍSLUŠNÉ MNOŽINĚ M A JEJÍMU DĚLENÍ D_m

$$H(M;D_m;f)=\sum_i \max f(m_i)\cdot \text{OBSAH}(m_i)$$

PŘEDPOKLÁDÁME, ŽE SE FUNKCE f CHOVÁ SLUŠNĚ A I MNOŽINA m_i, ŽE SE CHOVÁ SLUŠNĚ. SLUŠNĚ ZNAMENÁ ŽE NA KAŽDÉ MNOŽINĚ m_i MÁ FUNKCE f MINIMUM A MAXIMUM (FUNKCE BUDE TEDY SPOJITÁ).

TOTO PLATÍ:

$$D(M;D_m;f)\le H(M;D_m;f)$$

TEĎ BUDEME ZJEMŇOVAT DĚLENÍ TAK DOSTANEME

$$\lim_{m\to\infty} D(M;D_m;f)=\lim_{m\to\infty} H(M;D_m;f)=\underbrace{\iint_M f(x;y)\,dx\,dy}_{\text{DVOJNÝ INTEGRÁL Z FUNKCE } f(x;y) \text{ NA MNOŽINĚ } M}$$

$\lim \ldots = \lim \ldots =$ SPOLEČNÁ LIMITA OZNAČENÁ JAKO INTEGRÁL

APLIKACE

DVOJNÝ

1) VÝPOČET OBSAHU ROVINNÉ PLOCHY

$$P=\iint_M dx\,dy$$

2) HMOTNOST ROVINNÉ PLOCHY

$$m=\iint_M \sigma(x;y)\,dx\,dy$$

3) NÁBOJ NA ROVINNÉ PLOŠE

$$Q=\iint_M \sigma(x;y)\,dx\,dy$$

PLOŠNÁ HUSTOTA NÁBOJE

4) SOUŘADNICE STŘEDU HMOTNOSTI ROVINNÉ PLOCHY

$$\vec{r}_0=\frac{\iint \vec{r}\cdot\sigma(x;y)\,dx\,dy}{m}$$

POLOHOVÝ VEKTOR TĚŽIŠTĚ

$\vec{r}_0=(x_0;y_0)$ - TĚŽIŠTĚ

POLOHOVÝ VEKTOR ČÁSTICE

$\vec{r}=(x;y)$

TROJNÝ

1) VÝPOČET OBJEMU TĚLESA

$$V=\iiint_T dx\,dy\,dz$$

2) VÝPOČET ~~OBJEMU~~ HMOTNOSTI TĚLESA

$$m=\iiint_T \rho(x;y;z)\,dx\,dy\,dz$$

3) NÁBOJ V TĚLESE

$$Q=\iiint_T \rho(x;y;z)\,dx\,dy\,dz$$

OBJEMOVÁ HUSTOTA NÁBOJE

4) SOUŘADNICE STŘEDU HMOTNOSTI TĚLESA

$$\vec{r}_0=\frac{\iiint \vec{r}\cdot\rho(x;y;z)\,dx\,dy\,dz}{m}$$

$\vec{r}_0=(x_0;y_0;z_0)$

$$x_0 = \frac{\iint_M x\,\sigma(x;y)\,dx\,dy}{}$$

$$y_0 = \frac{\iint_M y \cdot \sigma(x;y)\,dx\,dy}{}$$

5.) MOMENT SETRVAČNOSTI

5.) MOMENT SETRVAČNOSTI

$$J_x = \iiint_T (y^2+z^2)\,\rho(x;y;z)\,dx\,dy\,dz$$

$$J_y = \iiint_T (x^2+z^2)\,\rho(x;y;z)\,dx\,dy\,dz$$

$$J_z = \iiint_T (x^2+y^2)\cdot\rho(x;y;z)\,dx\,dy\,dz$$

METODY VÝPOČTU

1) FUBINIOVA VĚTA

- MĚJME DVĚ SPOJITÉ FUNKCE $g(x);h(x)$, NECHŤ PRO VŠECHNA $\forall x \in [a;b]$ (INTERVAL) PLATÍ $g(x) \leq h(x)$. K TOMU SI POJMENUJEME MNOŽINU M TO BUDE MNOŽINA VŠECH USPOŘÁDANÝCH DVOJIC $x;y$ A TO TAKOVÝCH, ŽE x LEŽÍ V INTERVALU $[a;b]$ A PRO y PLATÍ $g(x) \leq y \leq h(x)$.

$$M = \{[x;y] \mid x \in [a;b] \quad g(x) \leq y \leq h(x)\}$$

- TŘETÍ PŘEDPOKLAD, NECHŤ EXISTUJE:

$$\iint_M f(x;y)\,dx\,dy$$

FUNKCE f JE SPOJITÁ (PŘEDPOKLAD)

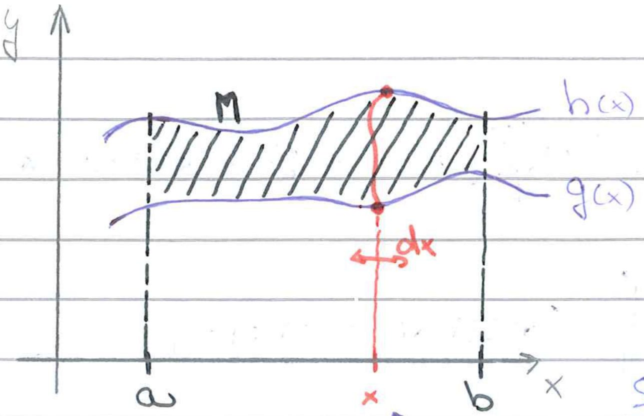
POTOM PLATÍ: DVOJNÝ

$$\iint_M f(x;y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x;y)\,dy \right) dx$$

TROJNÝ

$$\iiint_T f(x;y;z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b \left(\int_{G(x;y)}^{H(x;y)} \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x;y;z)\,dz \right) dy \right) dx$$

3.



$$\iint_M f(x;y)\,dx\,dy = \int_a^b \Big(\underbrace{\int_{g(x)}^{h(x)} f(x;y)\,dy}_{\text{SPOČÍTÁM PRVNÍ}}\Big)\,dx$$

DÍVÁME SE ODKUD KAM SE MĚNÍ x (OD a DO b),

PAK SI ZAFIXUJETE KONKRÉTNÍ x A PODÍVÁME SE ODKUD KAM SE PŘI ZAFIXOVÁNÍ MĚNÍ y (OD $g(x)$ DO $h(x)$). LZE I OPAČNĚ!

2) VĚTA O TRANSFORMACI PROMĚNNÝCH V INTEGRÁLU

- POUŽIJEME JI TEHDY, KDYŽ MNOŽINOU JE NĚCO PŘÍJEMNÉHO CO SE DOBŘE PARAMETRIZUJE V JINÝCH SOUŘADNICÍCH (KRUŽNICE, TĚLESO S VÁLCOVOU SYMETRIÍ.
- MÁME MNOŽINU A ($A \subseteq \mathbb{R}^2$), α JE ZOBRAZENÍ $A \to \mathbb{R}^2$, KTERÉ JE VZÁJEMNĚ JEDNOZNAČNÉ A SPOJITĚ DIFERENCOVATELNÉ
- NECHŤ EXISTUJE: (PŘEDPOKLÁDÁME JEHO EXISTENCI)

$$\iint_{\alpha(A)} f(x;y)\,dx\,dy$$

POTOM PLATÍ:

$$\iint_{\alpha(A)} f(x;y)\,dx\,dy = \iint_A f(x(u;v);y(u;v))\,\underbrace{\mathrm{Det}\,D\alpha}_{\text{JAKOBIÁN}}\,du\,dv$$

$$\mathrm{DET}\,D\alpha = \left|\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}\right|$$

VNITŘNÍ DETERMINANT

VNĚJŠÍ ZÁVORKY ABSOLUTNÍ HODNOTA

JE JEDNO JESTLI PROHODÍM SLOUPNĚ NEBO NE - VŽDY KLADNÝ

α JE ZOBRAZENÍ, KTERÉ USPOŘÁDANÉ DVOJICI $(u;v)$ PŘIŘAZUJE USPOŘÁDANOU DVOJICI $x(u;v)$ A $y(u;v)$. PRO POLÁRNÍ SOUŘADNICE $u;v \Rightarrow r;\varphi$

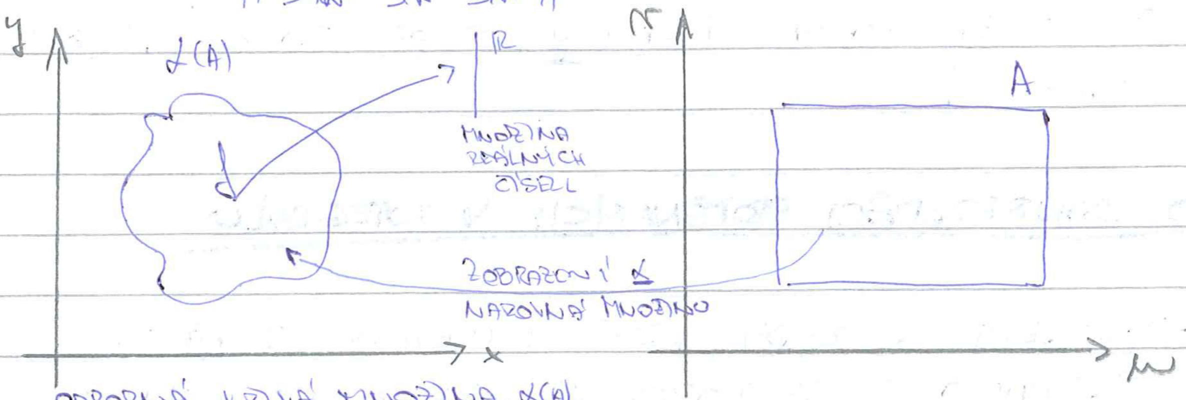
$$\alpha:(u;v) \longrightarrow (x(u;v);y(u;v))$$

3D PŘÍPAD

$$\iiint\limits_{\alpha(A)} f(x;y;z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{A} f(x(u;v;w);\,y(u;v;w);\,z(u;v;w))\,\mathrm{Det}\,D(\alpha)\,du\,dv\,dw$$

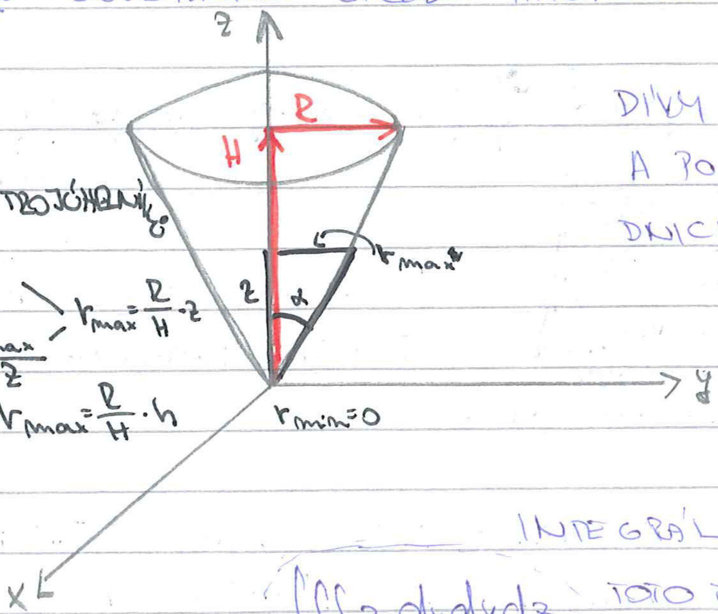
$$\mathrm{Det}\,D(\alpha) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

(OBJEMOVÝ ELEMENT)



ODPORNÁ KŘIVÁ MNOŽINA $\alpha(A)$, CO SE BUDE ŠPATNĚ INTEGROVAT. NA NÍ JE DEFINOVANÁ FUNKCE $f(x;y)$, KTERÁ SMĚŘUJE DO ROVINY REÁLNÝCH ČÍSEL.

PŘÍKLAD SOUŘADNICE STŘEDU HMOTNOSTI HOMOGENNÍHO KUŽELE



PODOBNOST TROJÚHELNÍKŮ

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{R}{H}, \quad \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{r_{max}}{z} \quad r_{max} = \frac{R}{H}\cdot z$$

$$r_{max} = \frac{R}{H}\cdot h$$

DÍKY SYMETRII PLATÍ, ŽE $x_0 = 0 = y_0$ A POČÍTÁME POUZE ZET-OVOU SOUŘADNICI:

$$z_0 = \frac{\iiint\limits_T z\cdot\rho(x;y;z)\,dx\,dy\,dz}{\iiint\limits_T \rho(x;y;z)\,dx\,dy\,dz} =$$

PROTOŽE JE KUŽEL HOMOGENNÍ, $\rho(x;y;z)$ MOHU VYJMOUT PŘED INTEGRÁL A ZKRÁTIT.

$$= \frac{\iiint\limits_T z\,dx\,dy\,dz}{\underbrace{\iiint\limits_T dx\,dy\,dz}_{\text{OBJEM } V = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot R^2\cdot H}}$$

TOTO BUDEME POČÍTAT

4

VÝPOČET PRO VÁLCOVÉ SOUŘADNICE

$$\iiint_T z\,dx\,dy\,dz = \left|\begin{array}{l} x = r\cdot\cos\varphi \\ y = r\cdot\sin\varphi \\ z = h \end{array}\right| = \int_0^{2\pi}\Big(\int_0^{H}\Big(\int_0^{\frac{R\cdot h}{H}} h\cdot r\,dr\Big)dh\Big)d\varphi =$$

ZAFIX φ ZAFIX h ZAFIX r

BUDEME POČÍTAT V POŘADÍ $\varphi; h; r$, POTOM TO PROHODÍME A MUSÍ VYJÍT SPRÁVNĚ!!!

JAKOBIÁN VÁLCOVÝCH SOUŘADNIC JE $\mathrm{Det}\,D(\alpha) = \underline{r}$

$$= 2\pi\int_0^H\Big(\int_0^{\frac{R\cdot h}{H}} h\cdot r\,dr\Big)dh = 2\pi\int_0^H\Big(h\cdot\Big[\frac{r^2}{2}\Big]_0^{\frac{h\cdot R}{H}}\Big)dh =$$

$$= \cancel{2}\pi\cdot\int_0^H h\cdot\frac{h^2\cdot R^2}{\cancel{2}H^2}\,dh = \frac{\pi R^2}{H^2}\int_0^H h^3\,dh = \frac{\pi R^2}{H^2}\Big[\frac{h^4}{4}\Big]_0^H = \frac{\pi R^2}{\cancel{H^2}}\cdot\frac{H^{\cancel{4}2}}{4} =$$

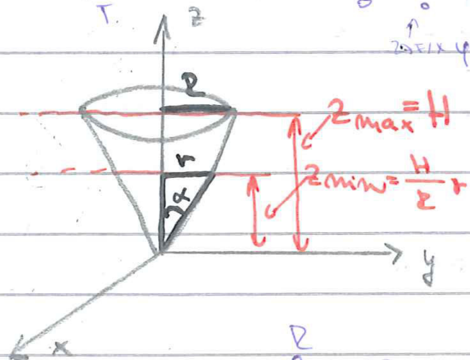
$$= \underline{\underline{1/4\cdot\pi\cdot R^2\cdot H^2}}$$ DOSADÍM ZPÁTKY DO z_0

$$z_0 = \frac{\cancel{\pi}\cdot\cancel{R^2}\cdot H^{\cancel{2}}}{4}\cdot\frac{3}{\cancel{\pi}\cdot\cancel{R^2}\cdot\cancel{H}} = \underline{\underline{\frac{3}{4}H}}$$

NYNÍ BUDU POČÍTAT V POŘADÍ $\varphi; r; h$

$$\iiint_T z\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\Big(\int_0^{R}\Big(\int_{\frac{H}{R}r}^{H} h\cdot r\,dh\Big)dr\Big)d\varphi = 2\pi\Big(\int_0^R\Big(r\cdot\Big[\frac{h^2}{2}\Big]_{\frac{H\cdot r}{R}}^{H}\Big)dr\Big) =$$

ZAFIX φ



$\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{R}{H}$

$\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{r}{z_{min}}$ $\quad z_{min} = \dfrac{H}{R}\cdot r$

$$= 2\pi\int_0^R r\Big(\frac{H^2}{2} - \frac{H^2\cdot r^2}{2R^2}\Big)dr = 2\pi\cdot\Big(\int_0^R \frac{H^2 r}{2}\,dr - \int_0^R \frac{H^2 r^3}{2R^2}\,dr\Big) =$$

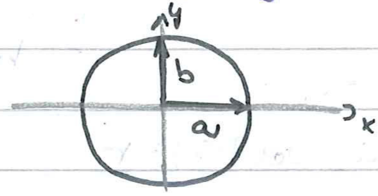
$$= \cancel{2}\pi\Big(\frac{H^2}{\cancel{2}}\cdot\frac{R^2}{2} - \frac{H^2}{\cancel{2R^2}}\cdot\frac{R^{\cancel{4}2}}{4}\Big) = \pi\Big(\frac{H^2R^2}{2} - \frac{H^2\cdot R^2}{4}\Big) = \pi\Big(\frac{2H^2R^2 - H^2R^2}{4}\Big) =$$

$$= \underline{\underline{1/4\cdot\pi\cdot H^2\cdot R^2}}$$ DOSADÍM ZPÁTKY DO z_0

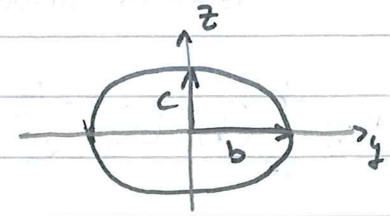
$$z_0 = \frac{\pi H^2\cdot R^2}{4}\cdot\frac{3}{\pi\cdot R^2\cdot H} = \underline{\underline{3/4\,H}}$$

POZNÁVÁNÍ TĚLES & PLOCH

1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ NAPŘ.: $z=0$ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

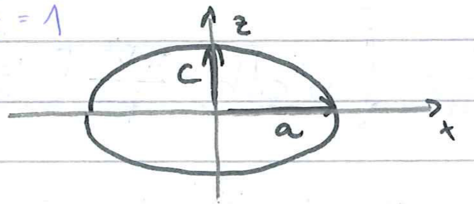


ELIPSOID



$x=0$ $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

$y=0$ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

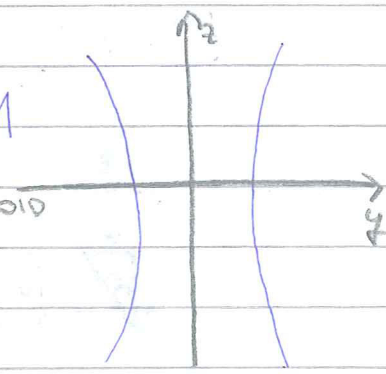


2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\left(+\frac{z^2}{c^2} \to z = \text{KONST}\right.$ Z JE TADY ROVNO ~~KONST~~ KONST, NEBO SPÍŠ JE JAKÉKOLIV

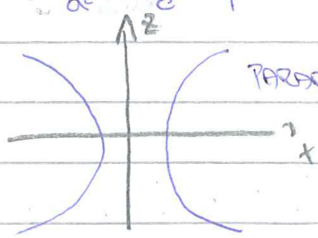
ELIPTICKÝ VÁLEC

3) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ NAPŘ.: $x=0$ $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$



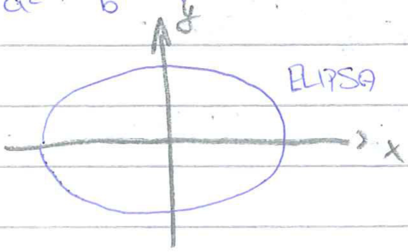
HYPERBOLOID

$y=0$ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$



PARABOLOID

$z=0$ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



ELIPSA

ELIPTICKÝ HYPERBOLOID

PODOBNÉ CHLADÍCÍM VĚŽÍM

5

4) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ $\underline{z=0}$ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=0$ $[0;0;0]$

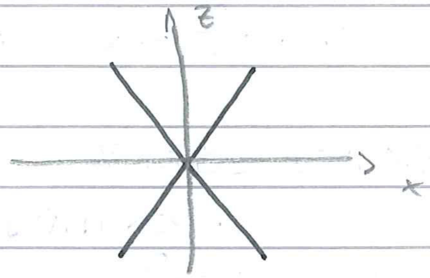
BOD V POČÁTKU SOUŘADNIC

$\underline{z=\text{KONST.}}$ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=\left(\frac{\text{KONST}}{c}\right)^2$

$x^2+y^2=\left(\frac{a\cdot\text{KONST}}{c}\right)^2$

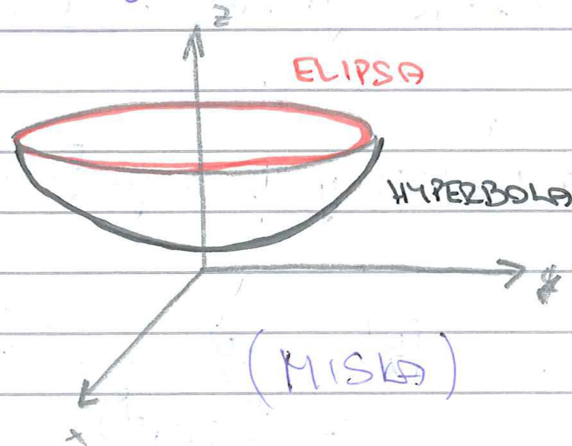
$\underline{y=0}$ $\frac{x^2}{a^2}=\frac{z^2}{c^2} \Rightarrow z=\frac{a}{c}|x|$

KUŽELOVÁ PLOCHA, SE ŠPIČKOU V POČÁTKU SOUŘADNIC



5) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ $z=0$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$



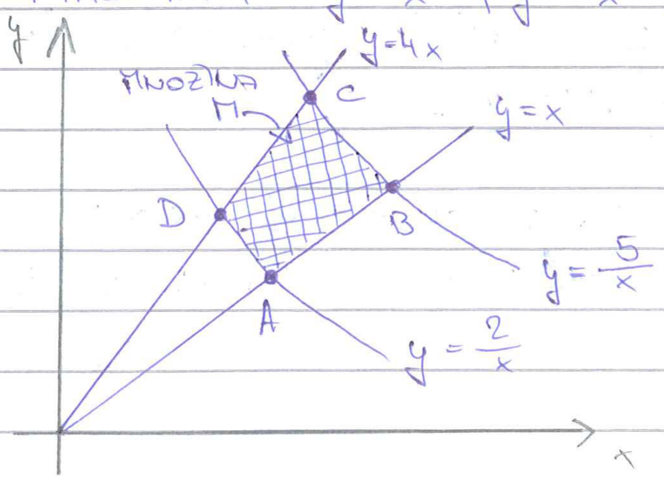
ELIPTICKÝ HYPERBOLOID

Př) PŘÍKLAD VYPOČTĚTE $\iint_M f(x;y)\,dx\,dy$, KDE $f(x;y)=\sqrt{xy}$

MNOŽINA M JE OMEZENÁ $\underbrace{xy=2;\ xy=5;\ y=x;\ y=4x}_{\text{KŘIVKY}}$;

PODMÍNKA $x>0$.

MÁME TEDY $y=\frac{2}{x}$; $y=\frac{5}{x}$; $y=4x$; $y=x$



a) V KARTÉZSKÝCH SOUŘADNICÍCH

b) VE VHODNÝCH SOUŘADNICÍCH

POZOR V TOMTO PŘÍPADĚ TEN OBRÁZEK MŮŽE BÝT RŮZNĚ NAKLONĚNÝ, MUSÍM SPOČÍTAT SOUŘADNICE BODŮ A; B; C; D.

NEBUDU TY BODY POČÍTAT JENOM KVŮLI TOMU, ALE HLAVNĚ ABYCHOM MOHLI ZAPSAT HLEDANÝ INTEGRÁL POMOCÍ FUBINIOVY VĚTY.

SOUŘADNICE BODU A:

- PROTÍNAJÍ HO KŘIVKY $y=x$ A $y=\frac{2}{x}$

$y=x \quad y=\frac{2}{x}$

$x=\frac{2}{x} \Rightarrow x^2=2 \Rightarrow x=\sqrt{2} \quad y=x=\sqrt{2} \quad \underline{\underline{A=[\sqrt{2};\sqrt{2}]}}$

SOUŘADNICE BODU B:

- PROTÍNAJÍ HO KŘIVKY $y=x$ A $y=\frac{5}{x}$

$y=x \quad y=\frac{5}{x}$

$x=\frac{5}{x} \Rightarrow x^2=5 \Rightarrow x=\sqrt{5} \quad y=x=\sqrt{5} \quad \underline{\underline{B=[\sqrt{5};\sqrt{5}]}}$

SOUŘADNICE BODU C:

- PROTÍNAJÍ HO KŘIVKY $y=4x$ A $y=\frac{5}{x}$

$y=4x \quad y=\frac{5}{x}$

$4x=\frac{5}{x} \Rightarrow 4x^2=5 \Rightarrow x=\sqrt{5/4} = x=\frac{\sqrt{5}}{2} \quad y=4x=2\sqrt{5}$

$\underline{\underline{C=[\frac{\sqrt{5}}{2};2\sqrt{5}]}}$

SOUŘADNICE BODU D:

- PROTÍNAJÍ HO KŘIVKY $y=4x$ A $y=\frac{2}{x}$

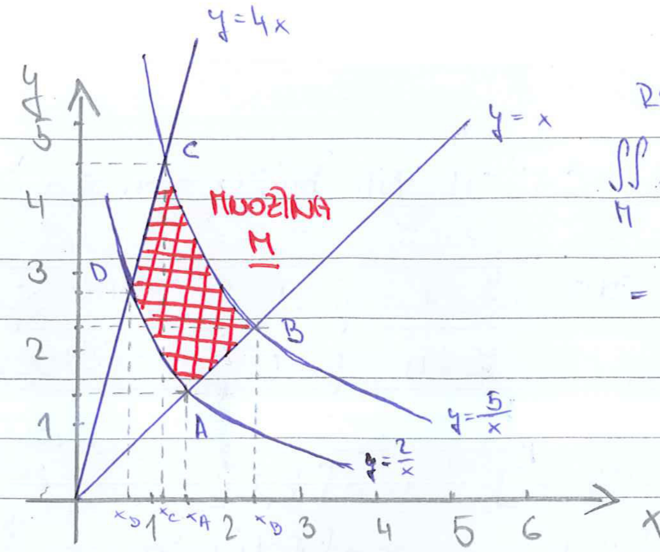
$y=4x \quad y=2/x$

$4x=\frac{2}{x} \Rightarrow 4x^2=2 \Rightarrow x=\sqrt{1/2} \quad y=4x \Rightarrow \frac{4}{\sqrt{2}}=2^2\cdot 2^{-1/2}=2^{3/2}=\underline{\underline{2\cdot\sqrt{2}}}$

$\underline{\underline{D=[1/\sqrt{2};2\cdot\sqrt{2}]}}$

TEĎ NAKRESLÍME OBRÁZEK PODLE SKUTEČNÉ POLOHY BODŮ, PODLE POLOHY BODŮ BUDE PODLE OSY $\underline{x}$ POŘADÍ BODŮ TAKOVÉTO $\underline{DCAB}$

6



ROZPADNE SE NA 3 INTEGRÁLY

$$\iint_M f(x,y)\,dx\,dy = \iint_M \sqrt{xy}\,dx\,dy = \text{FUBINIOVA VĚTA}$$

= BUDEME INTEGROVAT OD $x_D \xrightarrow{\text{DO}} x_C$ = $x_D = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $x_C = \frac{\sqrt{5}}{2}$ TAK ZAFIXUJEME x

$$= \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{5}}{2}} \left(\int_{2/x}^{4x} \sqrt{xy}\,dy \right) dx + \int_{\frac{\sqrt{5}}{2}}^{\sqrt{2}} \left(\int_{2/x}^{5/x} \sqrt{xy}\,dy \right) dx + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \left(\int_{x}^{5/x} \sqrt{xy}\,dy \right) dx$$

NEJDŘÍVE JSME INTEGROVALI OD x_D DO x_C TÍM JSME ZAFIXOVALI x A NÁSLEDNĚ JSME INTEGROVALI PODLE y. DÁLE JSME INTEGROVALI OD x_C DO x_A, OPĚT JSME TAKTO ZAFIXOVALI x A PAK JSME INTEGROVALI PODLE y. NAKONEC JSME INTEGROVALI OD x_A DO x_B, OPĚT x ZAFIXOVÁNO A NÁSLEDOVALA INTEGRACE PODLE y.

TEĎ BUDEME POČÍTAT PRVNÍ INTEGRÁL OD x_D DO x_C. BUDE TO V KARTÉZSKÝCH SOUŘADNICÍCH => TEDY KENIUS!

$$I_1 = \int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{5}/2} \left(\int_{2/x}^{4x} x^{1/2} \cdot y^{1/2}\,dy \right) dx = \int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{5}/2} x^{1/2} \left(\int_{2/x}^{4x} y^{1/2}\,dy \right) dx = \int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{5}/2} x^{1/2} \left[\frac{y^{3/2}}{\frac{3}{2}} \right]_{2/x}^{4x} dx =$$

$$= \int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{5}/2} x^{1/2} \left[\frac{2}{3} y^{3/2} \right]_{2/x}^{4x} dx = \int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{5}/2} \frac{2}{3} x^{1/2} \left[y^{3/2} \right]_{2/x}^{4x} dx = \int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{5}/2} \frac{2}{3} x^{1/2} \cdot \left[-\left(\frac{2}{x}\right)^{3/2} + (4x)^{3/2} \right] dx$$

$$= \frac{2}{3} \left(\int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{5}/2} -x^{1/2} \cdot 2^{3/2} \cdot x^{-\frac{3}{2}}\,dx + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{5}/2} x^{1/2} \cdot 4^{3/2} \cdot x^{3/2}\,dx \right) = \frac{2}{3} \left(-\int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{5}/2} 2^{3/2} \cdot x^{-1}\,dx + \int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{5}/2} 4^{3/2} \cdot x^{2}\,dx \right) =$$

$$= \frac{2}{3} \left(\underbrace{4^{3/2}}_{8} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{5}}{2}} - 2^{3/2} \cdot \left[\ln|x| \right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{5}/2} \right) = \frac{16}{3} \cdot \left[\frac{5^{3/2}}{2^3 \cdot 3} - \frac{2^{3/2}}{2^3 \cdot 3} \right] - \frac{2^{5/2}}{3} \cdot \left[\ln \frac{\sqrt{5}}{2} - \ln \frac{\sqrt{2}}{2} \right] = \frac{16}{3^2} \left[\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^3 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 \right] - \frac{2^{5/2}}{3} \cdot \left[\ln \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \right]$$

PRVNÍ INTEGRÁL HOTOV DALŠÍ 2 ČEKAJÍ, TADY JE VIDĚT, ŽE V KARTÉZSKÝCH JE TO PEKLO!

NYNÍ V SOUŘADNICÍCH ŠITÝCH NA MÍRU TOMUTO PŘÍKLADU.

$y=x \qquad y=\frac{2}{x}$ PŘEPÍŠEME $\Rightarrow$ $\frac{y}{x}=1 \qquad yx=2$ PŘEZNAČÍME $\Rightarrow$ $xy=u$

$y=4x \qquad y=\frac{5}{x} \qquad\qquad \frac{y}{x}=4 \qquad yx=5 \qquad\qquad \frac{y}{x}=v$

ZVOLÍME

$\underline{u}$ LEŽÍ V INTERVALU $[2;5]$ ... $u\in[2;5]$ PODLE FCÍ $yx=2$, $yx=5$

$\underline{v}$ LEŽÍ V INTERVALU $[1;4]$ ... $v\in[1;4]$ PODLE FCÍ $\frac{y}{x}=1$, $\frac{y}{x}=4$

$$\iint_M \sqrt{xy}\,dx\,dy = \int_2^5 \Big(\int_1^4$$

ZAFIXUJI $\underline{u}$

ZA $\underline{x}$ & $\underline{y}$ MUSÍM DOSADIT. MUSÍM SI TEDY VYJÁDŘIT $\underline{x}$ JAKO FUNKCI v & u A y JAKO FUNKCI v & u. MUSÍM TAKY NAJÍT $\underline{\text{JAKOBIÁN}}$!

$$x=x(u;v);\ y=y(u;v)$$

$\frac{y}{x}=v$

$y=x\cdot v \qquad xy=u \qquad\qquad x=\frac{y}{v} \qquad \frac{y}{v}\cdot y=u$

$x\cdot x\cdot v=u \qquad\qquad y^2=uv$

$x^2=\frac{u}{v} \Rightarrow x=\sqrt{u/v} \qquad\qquad y=\sqrt{uv}$

$$\sqrt{xy}=\sqrt{\sqrt{\frac{u}{v}}\cdot\sqrt{uv}}=\underline{\sqrt{u}} \qquad x=u^{1/2}\cdot v^{-1/2} \qquad y=u^{1/2}v^{1/2}$$

JAKOBIÁN

$$\operatorname{Det} D\alpha=\left|\begin{matrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix}1/2\cdot u^{-1/2}\cdot v^{-1/2} & 1/2\cdot u^{-1/2}\cdot v^{+1/2}\\ -1/2\,u^{1/2}\cdot v^{-3/2} & 1/2\cdot u^{1/2}\cdot v^{-1/2}\end{matrix}\right| =$$

$$=\frac{1}{4}u^0\cdot v^{-1}+\frac{1}{4}u^0\cdot v^{-3/2+1/2}=\frac{1}{4}v^{-1}+\frac{1}{4}v^{-1}=\frac{1}{2}v^{-1}=\underline{\frac{1}{2v}}=\operatorname{Det} D\alpha$$

DOSADÍME ZJIŠTĚNÉ HODNOTY ZPÁTKY DO INTEGRÁLU:

$$\iint_M \sqrt{xy}\,dx\,dy=\int_2^5\Big(\int_1^4\sqrt{u}\cdot\frac{1}{2}v^{-1}\,dv\Big)du=\frac{1}{2}\int_2^5\sqrt{u}\Big(\int_1^4\frac{1}{v}\,dv\Big)du=$$

$$=\frac{1}{2}\int_2^5\sqrt{u}\,\big[\ln v\big]_1^4\,du=\frac{1}{2}\ln 4\cdot\int_2^5\sqrt{u}\,du=2\cdot\frac{1}{2}\ln 2\left[\frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right]_2^5=$$

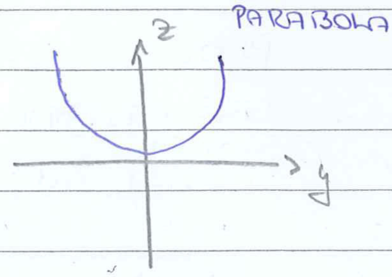
7

$$= \ln 2 \cdot \left[\frac{2u^{3/2}}{3}\right]_2^5 = \ln 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \left[5^{3/2} - 2^{3/2}\right] = \underline{\underline{\frac{2}{3}\ln 2\left[5^{3/2} - 2^{3/2}\right]}}$$

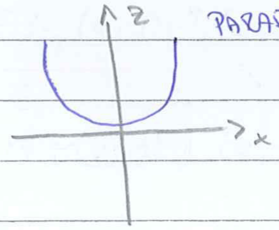
PŘÍKLAD - POMOCÍ TROJNÉHO INTEGRÁLU VYPOČÍTEJTE
VYPOČÍTEJTE OBJEM TĚLESA: $x^2 + y^2 = 6z$
NEJDŘÍVE MUSÍME POZNAT CO JE TO
ZA TĚLESO - ROTAČNÍ PARABOLOID
$0 \leq z \leq H$

Z=KONST. ZVOLÍM
$x^2 + y^2 = $ KONST. $\cdot 6$ KRUŽNICE

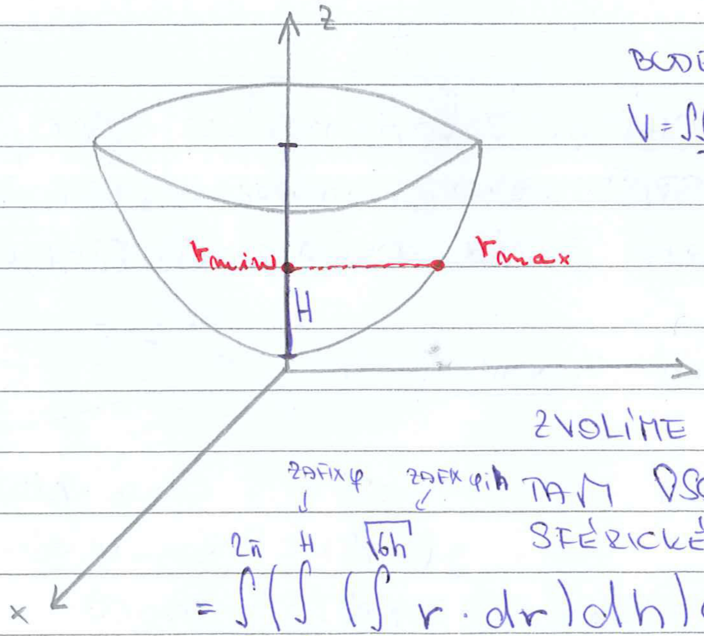
$x = 0$
$z = \frac{y^2}{6}$



$y = 0$
$z = \frac{x^2}{6}$



JE TO TEDY ROTAČNÍ PARABOLOID



BUDETE POČÍTAT OBJEM:

$$V = \iiint_T dx\,dy\,dz = \begin{vmatrix} x = r\cdot\cos\varphi \\ x = r\cdot\sin\varphi \\ z = h \end{vmatrix} =$$

$\underline{\mathrm{Det}\,D_\lambda = r}$ (VÁLCOVÉ SOUŘADNICE)
(JAKOBIÁN)

ZVOLÍME VÁLCOVÉ, PROTOŽE JE TAM OSOVÁ SYMETRIE! NA KUŽELKU SFÉRICKÉ!

ZAFIX φ — ZAFIX φ i h

$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{H}\left(\int_0^{\sqrt{6h}} r\cdot dr\right)dh\right)d\varphi =$$

GEOM. JEDNIČKA

ZAFIXUJI φ A z

$$x^2 + y^2 = 6z \Rightarrow r^2\cdot\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = 6h$$
$$r^2\,(1) = 6h$$
$$r = \sqrt{6h}$$

$$= 2\pi\left(\int_0^H \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{\sqrt{6h}} dh\right) = 2\cdot\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\int_0^H 6h\,dh = 6\pi\cdot\left[\frac{h^2}{2}\right]_0^H = 6\pi\frac{H^2}{2} = \underline{\underline{3\pi H^2}}$$

TADY JE TROCHU PROBLÉM, OBJEM NÁM VYCHÁZÍ m^2.
PROBLÉM JE UŽ V ZADÁNÍ $x^2+y^2=6z$ $m^2+m^2=m$

TOHLE JE TAKY V METRECH
TA $6\,[m]$

2.) PLOCHY V TROJROZMĚRNÉM PROSTORU: PARAMETRIZACE, KARTÉZSKÉ ROVNICE, ZÁKLADNÍ POJMY

PLOCHU JSME ZAVÁDĚLI JAKO ZOBRAZENÍ, KTERÉ USPOŘÁDANÉ DVOJICI $t;s$ PŘIŘADÍ USPOŘÁDANOU ~~DVOJICI~~ TROJICI $X(t;s)$ COŽ JE $(x(t;s);y(t;s);z(t;s))\in\mathbb{R}^3$

$$\underbrace{(t;s)}_{\mathbb{R}^2} \longrightarrow X(t;s)=(x(t;s);y(t;s);z(t;s))\in\mathbb{R}^3$$

ZOBRAZENÍ

VEKTOROVÁ FUNKCE DVOU PROMĚNNÝCH

PLOCHU MŮŽEME CHÁPAT JAKO MNOŽINU BODŮ, MY JI BEREME SPÍŠE JAKO ZOBRAZENÍ, KDE DVĚ RŮZNÁ ZOBRAZENÍ MOHOU ODPOVÍDAT STEJNÉ PLOŠE.

PARAMETRICKÉ ZADÁNÍ PLOCHY

PŘ)

$$x(t;s)=2+t-6s \qquad x(\varphi;\vartheta)=7\cdot\cos\varphi\cdot\sin\vartheta$$
$$y(t;s)=7-t \qquad y(\varphi;\vartheta)=7\cdot\sin\varphi\cdot\sin\vartheta$$
$$z(t;s)=24+6t-12s \qquad z(\varphi;\vartheta)=7\cdot\cos\vartheta$$
$$t;s\in\mathbb{R} \qquad \varphi\in[0;2\pi] \quad \vartheta\in[0;\pi]$$

KULOVÉ PLOCHY

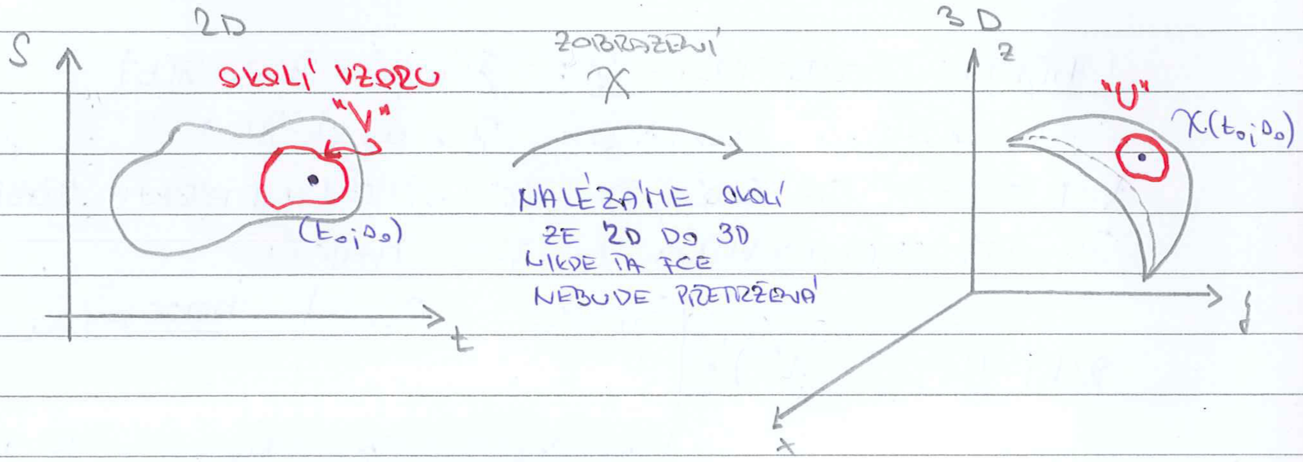
KARTÉZSKÉ ROVNICE PLOCH: $f(x;y;z)=0$ IMPLICITNÍ (NEPŘÍMÉ) ZADÁNÍ PLOCHY
$z=g(x;y)$ EXPLICITNÍ (PŘÍMÉ) ZADÁNÍ PLOCHY

PŘÍKLADY JSOU NA STRANĚ 4 A 5.

8.

DEFINICE SPOJITOSTI ZOBRAZENÍ $\chi(t;s)$

ŘEKNEME, ŽE ZOBRAZENÍ $\chi(t;s)$ JE SPOJITÉ V BODĚ $(t_0;s_0)$, JESTLIŽE KE KAŽDÉMU OKOLÍ "U" BODU $\chi(t_0;s_0) = (x(t_0;s_0); y(t_0;s_0); z(t_0;s_0))$ EXISTUJE OKOLÍ "V" BODU $(t_0;s_0)$ TAK, ŽE PRO $\underset{\text{VŠECHNA}}{\forall}(t;s) \in$ "V" PLATÍ: $\chi(t;s) \in$ "U".



DIFERENCOVATELNOST FUNKCE

BUDEME MÍT FUNKCI, KTERÁ BĚŽÍ Z $\mathbb{R}^n$ DO $\mathbb{R}^m$, PRO NAŠI PLOCHU χ BUDE $n=2$ A $m=3$.

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

ŘEKNEME, ŽE $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ JE V NĚJAKÉM BODĚ $a = \overbrace{(a^1; a^2; \ldots a^n)}^{\text{SOUŘADNICE}} \in \mathbb{R}^m$ JE DIFERENCOVATELNÁ, JESTLIŽE EXISTUJE LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ $\lambda: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ TAK ŽE PLATÍ:

LAMBDA

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(a+h) - f(a) - \lambda(h)|}{|h|} = 0$$

JDE K NULE

$h \to 0$ $\qquad h = (h^1; \ldots h^n) \xrightarrow{\text{JDE}} \overbrace{(0; \ldots; 0)}^{\text{SAMÉ NULY}}$

USPOŘÁDANÁ n-TICE

TEDY, ŽE $h^2 \to 0$; $h^3 \to 0$; $\ldots$ $h^n \to 0$

$|h| = \sqrt{(h^1)^2 + (h^2)^2 + \ldots (h^n)^2}$ – ČÍSLO ; $f(a+h)$ = N-TICE ; $\lambda(h)$ = N-TICE

$f(a) = f(a^1; a^2; \ldots; a^n) = (f^1(a^1; a^2; \ldots; a^n); f^2(a^1; a^2; \ldots; a^n); \ldots f^m(a^1; a^2; \ldots; a^n)) \in \mathbb{R}^m$

TOTO JSOU VŠECHNO FUNKCE, KTERÉ ZOBRAZUJÍ
Z $\mathbb{R}^n \xrightarrow[\text{DO}]{} \mathbb{R}$ (SKALÁRNÍ FUNKCE n-PROMĚNNÝCH)
ŘÍKÁ SE JIM SLOŽKY FUNKCE.

LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ λ: $\lambda(a+b) = \lambda(a) + \lambda(b)$
$\lambda(k \cdot a) = k \cdot \lambda(a)$

V ALGEBŘE SE UKAZUJE, ŽE KAŽDÉ LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ JE REPREZENTOVÁNO NĚJAKOU MATICÍ:

$$\lambda(h) = (h^1; \ldots; h^n) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \ldots & \lambda_{1m} \\ \vdots & \vdots & & \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \ldots & \lambda_{nm} \end{pmatrix}_{n/m}$$

MATICE n/m

DÁ SE UKÁZAT Z MINULÉHO SEMESTRU ŽE $\lambda_{ij} = \left(\frac{\partial f^j}{\partial x^i}\right)\Big|_a$

PARCIÁLNÍ DERIV. VYJÁDŘENÁ V BODĚ a

$$\lambda(h) = (h^1; h^2; \ldots h^n) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1}\big|_a & \ldots & \frac{\partial f^m}{\partial x^1}\big|_a \\ \frac{\partial f^1}{\partial x^2}\big|_a & \ldots & \frac{\partial f^m}{\partial x^2}\big|_a \\ \frac{\partial f^1}{\partial x^n}\big|_a & \ldots & \frac{\partial f^m}{\partial x^n}\big|_a \end{pmatrix}_{n/m}$$

TEČNÉ VEKTORY K SOUŘADNICOVÝM KŘIVKÁM

TEČNÉ VEKTORY KE KŘIVCE x_1=KONST ; x_2=KONST ; ... x_n=KONST.

SHRNUTÍ: NEJPRVE FUNKCE 1 REÁLNÉ PROMĚNNÉ
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ TA JE V NĚJAKÉM BODĚ $a \in \mathbb{R}$
DIFERENCOVATELNÁ PRÁVĚ TEHDY ($\Leftrightarrow$), KDYŽ V TOM BODĚ a EXISTUJE JEJÍ DERIVACE $f'(a)$.

PRO FUNKCE VÍCE PROMĚNNÝCH PLATÍ MĚKČÍ TVRZENÍ
$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ JE V BODĚ $a = (a^1; a^2; \ldots a^n)$ DIFERENCOVATELNÁ
$\Rightarrow$ EXISTUJÍ-LI PARCIÁLNÍ DERIVACE $\frac{\partial f^j}{\partial x^i}\big|_a$ $\quad 1 \leq i \leq n$
$\quad 1 \leq j \leq m$

9.

POKUD BYCHOM CHTĚLI ABY TO PLATILO OPAČNĚ $\Leftarrow$ TAK PŘIDÁME, ŽE JSOU TY PARCIÁLNÍ DERIVACE V BODĚ a SPOJITÉ.

DEFINICE: $\lambda : (t;s) \longrightarrow X(t;s) = (x(t;s); y(t;s); z(t;s)) \in \mathbb{R}^3$

USPOŘÁDANÉ DVOJICI PŘIŘAZUJEME JEJÍ OBRAZ.

TATO USPOŘÁDANÁ DVOJICE $(t;s)$ MŮŽE LEŽET V:

MNOŽINA
- $M = [a;b] \times [c;d]$ UZAVŘENÝ INTERVAL
- $M = (a;b] \times (c;d]$ NAPŮL UZAVŘENÝ INTERVAL
- $M = [a;\infty) \times (-\infty;\infty)$ MŮŽE TO I UTÉCT DO ∞ NEKONEČNA

POKUD ZOBRAZENÍ $X\ Z\ M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ JE VZÁJEMNĚ JEDNOZNAČNÉ A DIFERENCOVATELNÉ TAK PAK MLUVÍME O OBRAZU MNOŽINY M $X(M)$ JAKO O PARAMETRIZOVANÉM KOUSKU PLOCHY. POKUD BUDE TO ZOBRAZENÍ NAVÍC SPOJITĚ DIFERENCOVATELNÉ (TJ. PARCIÁLNÍ DERIVACE JSOU SPOJITÉ) PAK MNOŽINA KTERÁ JE DÁNA ~~M~~ OBRAZEM MNOŽINY $X(M)$ ŘÍKÁ HLADKÝ KOUSEK PLOCHY.

DEFINICE: VEKTOROVÉ POLE

VEKTOROVÉ POLE NA $\mathbb{R}^3$ JE ZOBRAZENÍ, KTERÉ KAŽDÉMU BODU Z $\mathbb{R}^3$ $a = (x;y;z) \in \mathbb{R}^3$ PŘIŘADÍ VEKTOR Z VEKTOROVÉHO PROSTORU $\mathbb{R}^3_a$ UMÍSTĚNÉHO V BODĚ a.

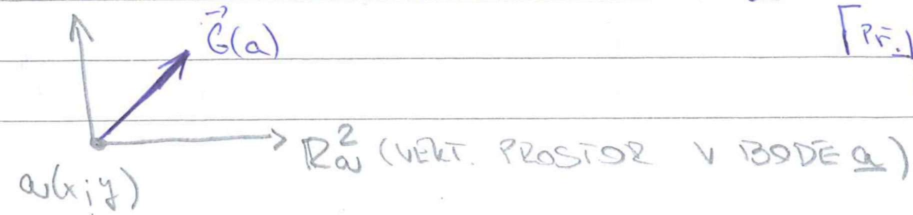
ZAPISUJE SE TO TAKTO:

$$\vec{G}(a) = \vec{G}(x;y;z) = (\underbrace{G_x(x;y;z)}; \underbrace{G_y(x;y;z)}; \underbrace{G_z(x;y;z)}) \in \mathbb{R}^3_a$$

$a \in \mathbb{R}^3$

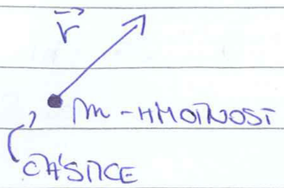
SLOŽKY VEKTOROVÉHO POLE NEBOLI FUNKCE Z $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$\mathbb{R}^3$ HRAJE ROLI PROSTORU, KTERÝ DODÁVÁ BODY, A JE TO NAVÍC VEKTOROVÝ PROSTOR UMÍSTĚNÝ V BODĚ a.



[PŘ.] PROUDÍCÍ KAPALINA, NEBO GRAVITAČNÍ POLE

BOD V GRAVITAČNÍM POLI



$$K = -\varkappa \cdot \frac{m}{r^3} \cdot \vec{r}$$

$$K(x;y;z) = \left(-\varkappa \frac{m x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} ; -\varkappa \frac{m y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} ; -\varkappa \frac{m z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \right)$$

DIFERENCIÁLNÍ OPERÁTORY – OPAKOVÁNÍ

GRADIENT – grad – POŽÍRÁ SKALÁRNÍ FUNKCI 3 REÁLNÝCH PROMĚNNÝCH

$$\operatorname{grad} f(x;y;z) = \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x} ; \frac{\partial f}{\partial y} ; \frac{\partial f}{\partial z} \right)}_{\text{VÝSLEDKEM JE VEKTOROVÉ POLE}}$$

DIVERGENCE – div – POŽÍRÁ VEKTOROVÉ POLE

$$F = (F_x(x;y;z) ; F_y(x;y;z) ; F_z(x;y;z))$$

$$\operatorname{div} \vec{F} = \underbrace{\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}}_{\text{SKALÁRNÍ POLE}} = \nabla \cdot \vec{F}$$

SKALÁRNÍ SOUČIN

NABLA = grad

DIVERGENCE SOUVISÍ S TOKEM VEKTOROVÉHO POLE PLOCHOU.

ROTACE – rot –

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} ; \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} ; \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) = \nabla \times \vec{F}$$

VEKTOROVÉ POLE

VEKTOROVÝ SOUČIN

NABLA = GRAD

PRO OPERÁTORY PLATÍ:

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{G} = 0$$
$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = \vec{0}$$
$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} G = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{G} - \Delta \vec{G}$$
$$\operatorname{rot}(f \cdot \vec{G}) = \operatorname{grad} \times \vec{G} + f \cdot \operatorname{rot} \vec{G}$$
$$\operatorname{div}(\vec{G} \times \vec{F}) = \vec{F} \cdot \operatorname{rot} \vec{G} - \vec{G} \cdot \operatorname{rot} \vec{F}$$

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \Delta \text{ – LAPLACEŮV OPERÁTOR}$$

10.

3.) PLOŠNÝ INTEGRÁL PRVNÍHO DRUHU, ZAVEDENÍ, APLIKACE, VÝPOČTY.

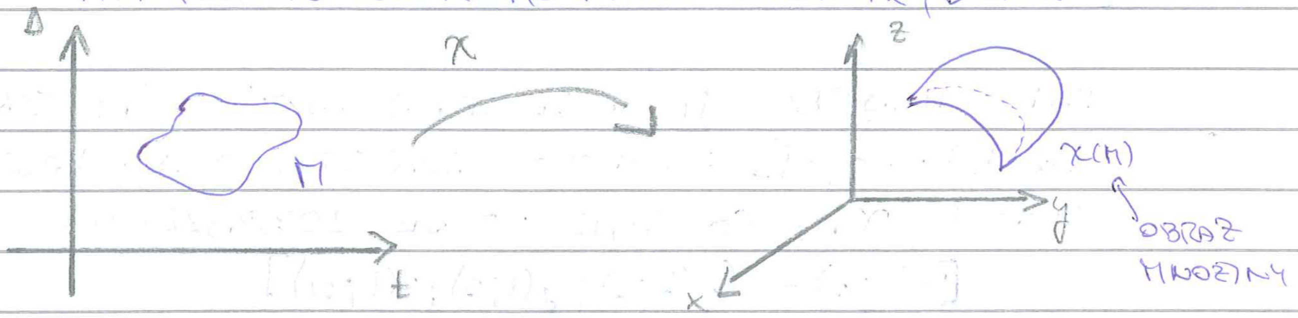
PROČ? ROVINNÉ PLOCHY - VELIKOSTI
- HMOTNOST
- MOMENTY SETRVAČNOSTI

U ROVINNÝCH PLOCH NÁM K TOMU SLOUŽÍ DVOJNÉ INTEGRÁLY.

$$\iint_M f(x;y)\,dx\,dy$$ = FUBINIOVA VĚTA, VĚTA O TRANS. SOUŘAD.

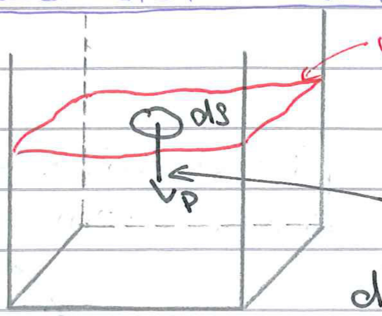
MNOŽINA

CO KDYŽ MÍSTO ROVINNÉ PLOCHY BUDU MÍT PLOCHU ZDEFORMOVANOU - DEŠTNÍK, BLÁNA



X JE ZOBRAZENÍ, KTERÉ DVĚMA ČÍSLŮM PŘIŘAZUJE MÍSTO V PROSTORU.

Př. VELIKOST SÍLY PŮSOBÍCÍ NA PLOCHU V KAPALINĚ



KŘIVÁ VODNÍ HLADINA

KVÁDR NAPLNĚNÝ KAPALINOU

NORMÁLOVÝ VEKTOR TLAKU

$$d\vec{F} = \vec{\nu} \cdot p(x;y;z)\,dS$$

$$\mathbf{F} = \iint_S \vec{\nu}(x;y;z)\,p(x;y;z)\,dS$$

MŮŽEME ROZEPSAT DO SLOŽEK

$$F_x = \iint_S \nu_x(x;y;z)\,p_x(x;y;z)\,dS$$

$$F_y = \iint_S \nu_y(x;y;z)\,p_y(x;y;z)\,dS$$

$$F_z = \iint_S \nu_z(x;y;z)\,p_z(x;y;z)\,dS$$

ARCHIMÉDŮV ZÁKON

- TEN ŘÍKÁ NĚCO VÝSLEDNÉ SÍLE, KTERÁ PŮSOBÍ NA NĚJAKOU ČÁST, NEBO NĚJAKÉ TĚLESO PONOŘENÉ DO KAPALINY.
- VZTLAKOVÁ SÍLA $\iint_S g(x;y;z)\cdot p(x;y;z)\,dS$

TATO VZTLAKOVÁ SÍLA SE MÁ ROVNAT TÍZE KAPALINY O STEJNÉM OBJEMU JAKO PONOŘENÁ ČÁST TĚLESA.

$\iiint_V \vec{g}\cdot p(x;y;z)\,dx\,dy\,dz$ TYTO DVA INTEGRÁLY BY SE MĚLI ROVNAT

ZAVEDENÍ INTEGRÁLU NA PŘÍKLADU

MÁME MNOŽINU $\underline{M}$ TA JE DÁNA KARTÉZSKÝM SOUČINEM $[a;b]\times[c;d]$ A VEZMEME PARAMETRIZOVANÝ KOUSEK PLOCHY $X(M)$ COŽ VÍME ŽE JE ZOBRAZENÍ:

$$\Big[\underset{\in M}{X(t;s)} \longrightarrow \underbrace{(x(t;s);\,y(t;s);\,z(t;s))}_{\in \mathbb{R}^3}\Big]$$

POTOM MÁME ZADANOU FUNKCI Γ Z $\mathbb{R}^3$ DO $\mathbb{R}$:

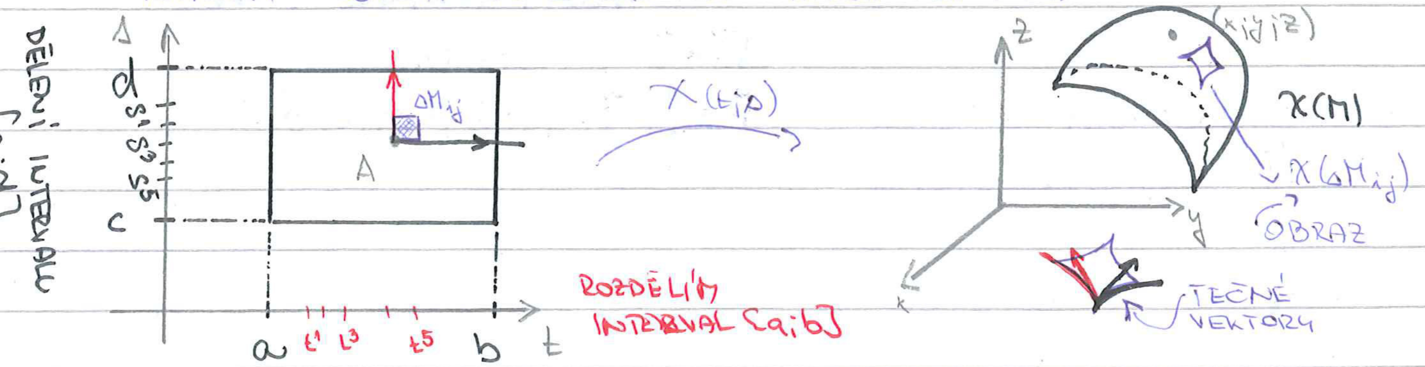
NA PLOCHU DIVNÉ (3 PROMĚNNÉ), ALE JE TO PLOCHA V PROSTORU.

$\Gamma: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$; $\Gamma(x;y;z)\in\mathbb{R}$ PŘEDPOKLÁDÁME, ŽE JE

SKALÁRNÍ FUNKCE 3 PROMĚNNÝCH

DEFINOVANÁ NA MNOŽINĚ $X(M)$, Γ - JE PLOŠNÁ HUSTOTA (SPOJITÁ)

NAŠÍM ÚKOLEM JE SPOČÍTAT HMOTNOST $X(M)$



HMOTNOST ELEMENTÁRNÍ PLOŠKY SE VÝPOČÍTÁ PŘIBLIŽNĚ JAKO PLOŠNÁ HUSTOTA.

11

$[a;b]$: $a = t^0 \le t^1 \le \dots \le t^i \le t^{i+1} \le \dots \le t^n = b$

$[c;d]$: $c = s^0 \le s^1 \le \dots \le s^j \le s^{j+1} \le \dots \le s^m = d$

DĚLÍCÍ MNOŽINA $\Delta M_{ij} = \{(t;s) \mid t^i \le t \le t^{i+1};\ s^j \le s \le s^{j+1}\}$

VELIKOST MNOŽINY $m(\Delta M_{ij}) = (t^{i+1} - t^i)\cdot(s^{j+1} - s^j)$ ... OBSAH ROVINNÉ MNOŽINY ΔM_{ij}

VEZMEME SI PLOŠKU $\Delta S_{ij} = \underbrace{X(\Delta M_{ij})}_{\text{OBRAZ NAŠÍ MNOŽINY}}$ ... TÉ ODPOVÍDÁ HMOTNOST

DANÁ TÍMTO VZTAHEM:

$$\Delta m_{ij} \doteq \sigma(x(t;s);y(t;s);z(t;s))\cdot \Delta S_{ij}$$

TENTO VZTAH BUDE PLATIT TÍM LÉPE, ČÍM BUDE ΔS_{ij} MENŠÍ.
ELEMENT ΔS_{ij} SI MUSÍME NĚKDE STRANOU VYJÁDŘIT.

POČÍTÁNÍ ΔS_{ij}

"ČERNÝ TEČNÝ VEKTOR"

$$c_t = \left(\frac{\partial x}{\partial t}\Big|_A ; \frac{\partial y}{\partial t}\Big|_A ; \frac{\partial z}{\partial t}\Big|_A\right)$$

POČÍTÁME V BODĚ A

PROTOŽE SE MĚNÍ PARAMETR t

"ČERVENÝ TEČNÝ VEKTOR"

$$c_s = \left(\frac{\partial x}{\partial s}\Big|_A ; \frac{\partial y}{\partial s}\Big|_A ; \frac{\partial z}{\partial s}\Big|_A\right)$$

MĚNÍ SE PARAMETR s — OPĚT PARCIÁLNÍ DERIVACE V BODĚ A

$$\Delta S_{ij} = |\vec{c}_t \times \vec{c}_s|\, \Delta t\, \Delta s = |\vec{c}_t \times \vec{c}_s|\, \Delta M_{ij}$$

ÚPRAVA $|\vec{c}_t \times \vec{c}_s|$

1) PŘÍMÝ VÝPOČET

2) PLATÍ: $|\vec{c}_t \times \vec{c}_s| = \sqrt{\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial s} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{vmatrix}^2} =$

3) $|\vec{c}_t \times \vec{c}_s| = |\vec{c}_t|\cdot|\vec{c}_s|\cdot \sin\alpha = |\vec{c}_t|\cdot|\vec{c}_s|\cdot\sqrt{1-\cos^2\alpha} =$

$= |\vec{c}_t|\cdot|\vec{c}_s|\cdot\sqrt{1 - \frac{\vec{c}_t\cdot\vec{c}_s}{|\vec{c}_t|\cdot|\vec{c}_s|}} = \sqrt{|\vec{c}_t|^2\cdot|\vec{c}_s|^2 - (\vec{c}_t\cdot\vec{c}_s)^2} \stackrel{*}{=}$

VZTAH PRO SKAL. SOUČIN

$\stackrel{*}{=} \sqrt{\det G}$

MATICE $\underline{G}$ JE ROVNA

$$G = \begin{pmatrix} (\vec{c}_t \cdot \vec{c}_t) & (\vec{c}_t \cdot \vec{c}_s) \\ (\vec{c}_s \cdot \vec{c}_t) & (\vec{c}_s \cdot \vec{c}_s) \end{pmatrix}$$

NYNÍ ZPÁTKY K Δm_{ij}:

$$\Delta m_{ij} \doteq \sigma(x(t;s);y(t;s);z(t;s))|\vec{c}_t \times \vec{c}_s|(t^{i+1}-t^i)(s^{j+1}-s^j)$$

POKUD BY SE NÁM NELÍBIL TENTO ZÁPIS DOSADÍME BUĎ Z BODU 2) NEBO 3).

CELKOVÁ HMOTNOST

$$m = \sum_{\substack{0 \le i \le n-1 \\ 0 \le j \le m-1}} \Delta m_{ij} \doteq \sigma(x(t;s);y(t;s);z(t;s))|\vec{c}_t \times \vec{c}_s|(t^{i+1}-t^i)(s^{j+1}-s^j)$$

LIMITNÍ PŘECHOD – SPOČÍVÁ V TOM, ŽE ZJEMŇUJEME DĚLENÍ INTERVALŮ $[a;b]$, $[c;d]$, DĚLÍCÍ INTERVAL SE LIMITNĚ BLÍŽÍ NULE. PAK PŘEJDE SUMACE V INTEGRACI.

HMOTNOST:

$$m = \iint_{X(M)} \sigma(x;y;z)\,dS = \iint_{M} \sigma(x(t;s);y(t;s);z(t;s))|\vec{c}_t \times \vec{c}_s|\,dt\,ds$$

DEFINICE: $M = [a;b] \times [c;d]$; $X: (t;s) \xrightarrow[\text{PŘIŘAZUJE}]{\text{ZOBRAZENÍ}} X(t;s)$; $(t;s) \in M$

$X(t;s) = (x(t;s);y(t;s);z(t;s)) \in \mathbb{R}^3$

PŘEDPOKLÁDÁME ŽE $X(M)$ JE PARAMETRICKÝ KOUSEK PLOCHY.
BUDEME MÍT FUNKCI $f(x;y;z)$ ... $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, FUNKCE f JE DEFINOVANÁ NA OKOLÍ $X(M)$ A PŘEDPOKLÁDÁME, ŽE JE SPOJITÁ.
POTOM PLOŠNÝM INTEGRÁLEM Z FUNKCE f PŘES PLOCHU $\underline{S} = X(M)$ ROZUMÍME INTEGRÁL:

$$\underbrace{\iint_S f(x;y;z)\,dS}_{\text{OZNAČENÍ}} = \underbrace{\iint_M f(x(t;s);y(t;s);z(t;s))|\vec{c}_t \times \vec{c}_s|\,dt\,dS}_{\text{RIEMANŮV DVOJNÝ INTEGRÁL}} =$$

(12)

MOŽNÉ ZPŮSOBY VÝPOČTU

$$=\iint_M f(x(t;s);y(t;s);z(t;s))\cdot\sqrt{\begin{vmatrix}\frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t}\\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s}\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\frac{\partial z}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial t}\\ \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial s}\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t}\\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s}\end{vmatrix}^2}\,dt\,ds=$$

$$=\iint_M f(x(t;s);y(t;s);z(t;s))\sqrt{\det G}\,ds\,dt\,ds$$

$$G=\begin{pmatrix}(\vec{c}_t\cdot\vec{c}_t) & (\vec{c}_t\cdot\vec{c}_s)\\ (\vec{c}_s\cdot\vec{c}_t) & (\vec{c}_s\cdot\vec{c}_s)\end{pmatrix}$$

SKALÁRNÍ SOUČINY

POZNÁMKA: SPECIÁLNÍ PŘÍPAD ROVINNÉ PLOCHY:

- TAM PLATÍ, ŽE $x=x(t;s);\ y=y(t;s);\ z=0$, K TOMU ABYCHOM TO ZAPSALI SE NÁM NEJVÍCE BUDE HODIT ZÁPIS S ODMOCNINOU:

$$\iint_M f(x(t;s);y(t;s);z(t;s))\sqrt{\underbrace{\begin{vmatrix}\frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t}\\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s}\end{vmatrix}^2}_{0}+\underbrace{\begin{vmatrix}\frac{\partial z}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial t}\\ \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial s}\end{vmatrix}^2}_{0}+\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t}\\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s}\end{vmatrix}^2}\,dt\,ds=$$

$$=\iint_M f(x(t;s);y(t;s);z(t;s))\left\|\begin{matrix}\frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t}\\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s}\end{matrix}\right\|\,dt\,ds$$

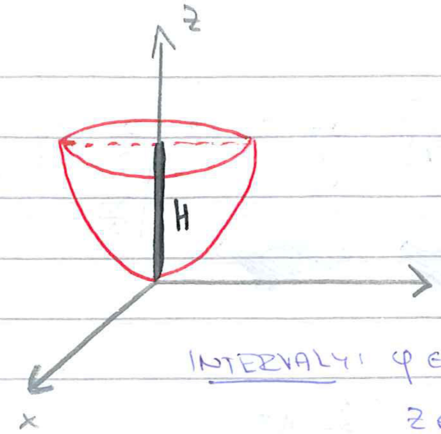
TOTO UŽ JSME VIDĚLI NA PRVNÍ PŘEDNÁŠCE, JE TO VĚTA O TRANSFORMACI PROMĚNNÝCH V INTEGRAČNÍM OBORU. INTEGRÁL 1. TYPU NEZÁVISÍ NA ZVOLENÉ PARAMETRIZACI.

PŘÍKLAD: VYPOČTĚTE BOČNÍ POVRCH PARABOLOIDU

$x^2+y^2=z \quad , \quad 0\leq z\leq H$

$r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi=h$ VÁLCOVÉ SOUŘADNICE

$r^2\underbrace{(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)}_{1}=h \qquad r^2=h$



$$\iint_S dS = \begin{vmatrix} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = h \end{vmatrix}$$

VÁLCOVÉ SOUŘADNICE

INTERVALY: $\varphi \in [0; 2\pi]$

$z \in [0; H] = [0; r^2_{max}]$

$r^2_{max} = H \Rightarrow r_{max} = \sqrt{H}$

$r \in [0; \sqrt{H}]$

POZOR! TADY MÁME VÁLCOVÉ SOUŘADNICE $(\varphi; r; h)$, ALE PLOCHA JE PARAMETRIZOVANÁ POUZE DVĚMA PARAMETRY. JEDEN Z PARAMETRŮ $\varphi; r; h$ BUDEME MUSET VYJÁDŘIT POMOCÍ ZBYLÝCH. UDĚLÁME TO TAK, ŽE SI VEZMEME ROVNICI PARABOLOIDU $x^2+y^2=z$ A DOSADÍME DO NÍ VŠECHNO CO MÁME PŘED SEBOU. (VÁLCOVÉ SOUŘADNICE).

$$\vec{c}_r = \left(\frac{\partial x}{\partial r}; \frac{\partial y}{\partial r}; \frac{\partial z}{\partial r}\right) = (\cos\varphi; \sin\varphi; 2\cdot r)$$

$$\vec{c}_\varphi = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}; \frac{\partial y}{\partial \varphi}; \frac{\partial z}{\partial \varphi}\right) = (-r\cdot\sin\varphi; r\cos\varphi; 0)$$

$$G = \begin{pmatrix} (\vec{c}_r\cdot\vec{c}_r) & (\vec{c}_\varphi\cdot\vec{c}_r) \\ (\vec{c}_r\cdot\vec{c}_\varphi) & (\vec{c}_\varphi\cdot\vec{c}_\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4r^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c}_r\cdot\vec{c}_r = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi + 4r^2 = 1+4r^2$$

$$\vec{c}_\varphi\cdot\vec{c}_r = -r\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi + r\cos\varphi\cdot\sin\varphi + 0 = 0$$

$$\vec{c}_\varphi\cdot\vec{c}_\varphi = r^2\sin^2\varphi + r^2\cdot\cos^2\varphi + 0 = r^2$$

$$\det G = r^2(1+4r^2) \Rightarrow \sqrt{\det G} = r\cdot(1+4r^2)^{1/2}$$

SUBSTITUCE

$$\iint_S dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{H}} r(1+4r^2)^{1/2}\,dr\,d\varphi = 2\pi\cdot\int_0^{\sqrt{H}} r(1+4r^2)^{1/2}\,dr = \begin{vmatrix} 1+4r^2 = t \\ 8r\,dr = dt \\ dr = \frac{dt}{8r} \end{vmatrix} \Rightarrow$$

MEZE

$r = 0 \to t = 1$

$r = \sqrt{H} \to t = 1+4H$

NOVÉ MEZE

13

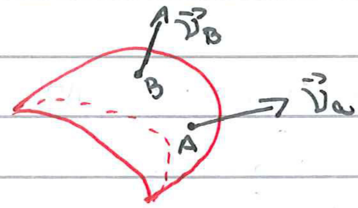
$$= \frac{\pi}{4} \int_1^{1+4H} t^{1/2}\, dt = \frac{\pi}{4} \left[\frac{t^{3/2}}{\frac{3}{2}} \right]_1^{1+4H} = \frac{\pi}{\cancel{4}\,2} \left[\frac{2\, t^{3/2}}{3} \right]_1^{1+4H} =$$

$$= \frac{\pi}{6} \left[t^{3/2} \right]_1^{1+4H} = \underline{\underline{\frac{\pi}{6} \left((1+4H)^{3/2} - 1 \right)}}$$

4) PLOŠNÝ INTEGRÁL 2. TYPU ZAVEDENÍ APLIKACE

ORIENTACE PLOCHY VERSUS PARAMETRIZACE

- PŘEDPOKLÁDÁME, ŽE ZADANÁ PLOCHA JE ORIENTOVÁNA NORMÁLOU $\vec{\nu}$.



MÁME PAK VEKTOROVÉ POLE NORMÁLY, KTERÝM ORIENTUJEME ZADANOU PLOCHU.

$$\vec{c}_{P;t} = \left(\frac{\partial x}{\partial t}\Big|_P ; \frac{\partial y}{\partial t}\Big|_P ; \frac{\partial z}{\partial t}\Big|_P \right) \qquad \vec{c}_{P;s} = \left(\frac{\partial x}{\partial s}\Big|_P ; \frac{\partial y}{\partial s}\Big|_P ; \frac{\partial z}{\partial s}\Big|_P \right)$$

V BODĚ P   V BODĚ P

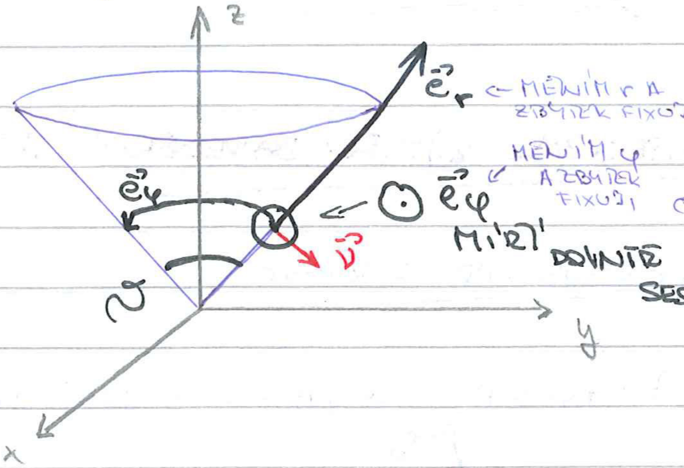
JESTLIŽE BÁZE $\langle \vec{c}_{P;t} ; \vec{c}_{P;s} ; \nu_P \rangle$ JE PRAVOTOČIVÁ, NEBO MŮŽE BÝT LEVOTOČIVÁ.

PRAVOTOČIVÁ: PARAMETRIZACE $(t;s)$, V TOMTO POŘADÍ, JE KOMPATIBILNÍ (SLUČITELNÁ) SE ZADANOU ORIENTACÍ NORMÁLOU $\vec{\nu}$.

LEVOTOČIVÁ: PARAMETRIZACE $(t;s)$ V TOMTO POŘADÍ JE NEKOMPATIBILNÍ (NESLUČITELNÁ) SE ZADANOU ORIENTACÍ NORMÁLOU $\vec{\nu}$.

PŘÍKLAD: OVĚŘENÍ KOMPATIBILITY / NEKOMPATIBILITY PARAMETRIZACE S DANOU ORIENTACÍ.

– MÁME KUŽELOVOU PLOCHU ORIENTOVANOU VNĚJŠÍ NORMÁLOU, PARAMETRIZUJEME SFÉRICKÝMI SOUŘADNICEMI.



PLOCHA BUDE CHARAKTERIZOVÁNA SOUŘADNICEMI $r; \varphi$. ϑ UŽ NE PROTOŽE SE NEMĚNÍ.

BUDEME NYNÍ DĚLAT NA SFÉRICKÝCH, ALE ŠLO BY I NA POLÁRNÍCH.

$\varphi; r$ ... $x = r \cdot \cos\varphi \cdot \sin\vartheta_0$

$y = r \cdot \sin\varphi \cdot \sin\vartheta_0$

$z = r \cdot \cos\vartheta_0 \qquad \vartheta_0 = \text{KONST}$

NAŠÍM ÚKOLEM JE ZJISTIT ZDA KOMPATIBILNÍ KONFIGURACE JE $\varphi; r$ NEBO $r; \varphi$? UDĚLÁME TO POMOCÍ GEOMETRICKÉ (PRAVIDLO PRAVÉ RUKY) PŘEDSTAVY. Z NÍ NÁM NĚJAK VYPLYNE, ŽE $\varphi; r$ JE KOMPATIBILNÍ. NYNÍ VÝPOČTEM:

$$\det \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s} \\ \nu_x & \nu_y & \nu_z \end{vmatrix} \begin{matrix} e_t \\ e_s \\ \nu \end{matrix}$$

$(t; s)$ KDYŽ DETERMINANT > 0 PAK JE PARAMETR. KOMPATIBILNÍ S ORIENTACÍ NORMÁLOU $\vec{\nu}$

$(t; s)$ KDYŽ DETERMINANT < 0 PAK JE PARAMETRIZACE NEKOMPATIBILNÍ S ORIENTACÍ NORMÁLOU $\vec{\nu}$

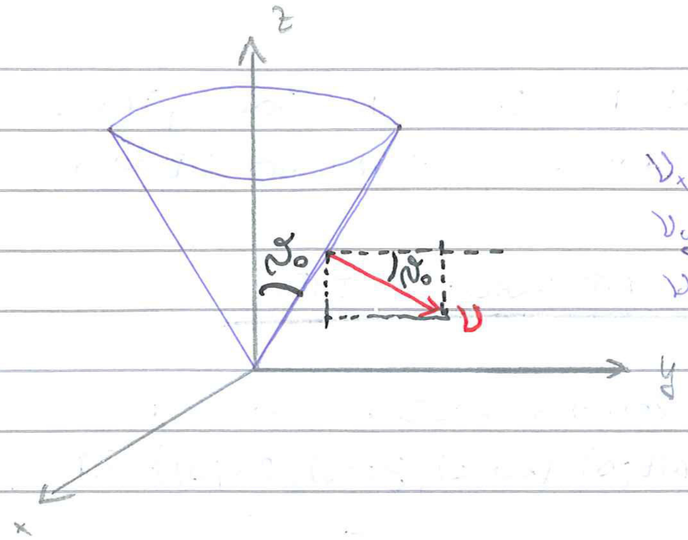
TOTO PLYNE Z PRAVOTOČIVOSTI / LEVOTOČIVOSTI BÁZE

$$\vec{c}_\varphi = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}; \frac{\partial y}{\partial \varphi}; \frac{\partial z}{\partial \varphi}\right) = (-r \sin\varphi \cdot \sin\vartheta_0; r\cos\varphi \sin\vartheta_0; 0)$$

$$\vec{c}_r = \left(\frac{\partial x}{\partial r}; \frac{\partial y}{\partial r}; \frac{\partial z}{\partial r}\right) = (\cos\varphi \sin\vartheta_0; \sin\varphi \sin\vartheta_0; \cos\vartheta_0)$$

$$\vec{\nu} = \underbrace{(\nu \cdot \cos\vartheta_0 \cdot \cos\varphi; \nu \cdot \cos\vartheta_0 \cdot \sin\varphi; -\nu \cdot \sin\vartheta_0)}_{\text{SLOŽKY VEKTORU } \vec{\nu}}$$

14.



$\nu_x = \nu \cdot \cos\vartheta_0 \cdot \cos\varphi$

$\nu_y = \nu \cdot \cos\vartheta_0 \cdot \sin\varphi$

$\nu_z = -\nu \cdot \sin\vartheta_0$

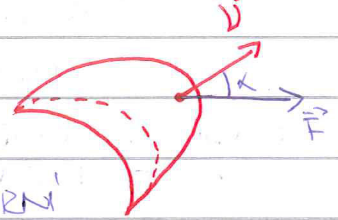
$$\begin{vmatrix} -r\sin\varphi\sin\vartheta_0 & r\cdot\cos\varphi\sin\vartheta_0 & 0 \\ \cos\varphi\sin\vartheta_0 & \sin\varphi\sin\vartheta_0 & \cos\vartheta_0 \\ \nu\cos\vartheta_0\cos\varphi & \nu\cos\vartheta_0\cdot\sin\varphi & -\nu\sin\vartheta_0 \end{vmatrix} = \ldots$$

DEFINICE: PLOŠNÝ INTEGRÁL DRUHÉHO TYPU Z VEKTOROVÉHO POLE $\vec{F}$ PŘES PLOCHU $S = X(M)$ ORIENTOVANOU POLEM NORMÁLY $\vec{\nu}$ JE INTEGRÁL:

TOK VEKT. POLE ORIENTOVANOU PLOCHOU

$$\iint_S \overbrace{(\vec{F}\cdot\vec{\nu})}^{\text{SKALÁRNÍ POLE}} \underbrace{\vec{\nu}\, dS}_{d\vec{S}} = \iint \vec{F}\cdot d\vec{S}$$

NORMÁLA SE PO TÉ PLOŠE MĚNÍ ROZUMNÝM ZPŮSOBEM (TO MUSÍM MÍT ZARUČENO)



KDYBY $\vec{F}$ A $\vec{\nu}$ BYLY SOUHLASNĚ ROVNOBĚŽNÉ, PAK BY TEN SKALÁRNÍ SOUČIN BYL MAXIMÁLNÍ. POKUD JE TAM α TAK $\vec{F}$ PROMÍTNEME DO SMĚRU ν A TOK VEKT. POLE MENŠÍ.

SKALÁRNÍ SOUČIN

$$\Phi = \iint_S (\vec{F}\cdot\vec{\nu})\, dS$$

Φ ... TOK VEKTOROVÉHO POLE PLOCHOU

$\vec{F}$ ... ZADANÉ VEKTOROVÉ POLE

SLOŽKY JSOU JEDNOTLIVÉ ν_x, ν_y, ν_z

$\vec{\nu}$ ... VEKTOROVÉ POLE V NORMÁLE $\vec{\nu}$ "SPOJITÉ" (SPOJITÉ ORIENTACE PLOCHY S POMOCÍ ZADANÉ NORMÁLY $\vec{\nu}$.

ZÁVORKOU $(\vec{F} \cdot \vec{\nu})$ ZÍSKÁM SKALÁRNÍ POLE, TAKŽE TO CELÉ PŘECHÁZÍ NA INTEGRÁL PRVNÍHO DRUHU

VÝPOČET PLOŠNÉHO INTEGRÁLU 2. TYPU

MÁME DÁNO: PARAMETRIZOVANÝ KOUSEK PLOCHY:

$$\underbrace{(t;s)}_{\in M} \longrightarrow X(t;s) = (x(t;s);\, y(t;s);\, z(t;s)) = X(M)$$

SOUBOR $\vec{F}$ .. VEKTOROVÉ POLE

$$\vec{F} = (F_x; F_y; F_z) \quad .. \quad F_x = F_x(x;y;z);\ F_y = F_y(x;y;z);\ F_z = F_z(x;y;z)$$

MUSÍME SPOČÍTAT NORMÁLU $\vec{\nu}$, TO UDĚLÁME POMOCÍ VEKTORŮ $\vec{c}_t$ & $\vec{c}_s$:

$$\vec{c}_t = \left(\frac{\partial x}{\partial t}; \frac{\partial y}{\partial t}; \frac{\partial z}{\partial t}\right); \quad \vec{c}_s = \left(\frac{\partial x}{\partial s}; \frac{\partial y}{\partial s}; \frac{\partial z}{\partial s}\right)$$

NORMÁLA $\vec{\nu}$ JE PAK DÁNA (POKUD JE JEDNOTKOVÁ):

$$\vec{\nu} = \varepsilon \frac{\vec{c}_t \times \vec{c}_s}{|\vec{c}_t \times \vec{c}_s|}$$

NORMÁLA MUSÍ BÝT KOLMÁ NA VEKTORY $\vec{c}_t$ A $\vec{c}_s$ PROTO VEKTOROVÝ SOUČIN.

ŘÍKÁ NÁM, JAK JE TO S KOMPATIBILITOU ZADANÉ PARAMETRIZACE SE ZADANOU ORIENTACÍ NORMÁLY.

$\varepsilon =$
- $+1$ – POŘADÍ PARAMETRŮ $(t;s)$ JE KOMPATIBILNÍ SE ZADANOU ORIENTACÍ NORMÁLY $\vec{\nu}$.
- -1 – POŘADÍ PARAMETRŮ $(t;s)$ JE NEKOMPATIBILNÍ SE ZADANOU ORIENTACÍ NORMÁLY $\vec{\nu}$.

PROVEDEME SKALÁRNÍ SOUČIN

$$\Phi = \iint_S (\vec{F} \cdot \vec{\nu})\, dS = \iint_S (F_x \cdot \nu_x + F_y \nu_y + F_z \cdot \nu_z)\, dS =$$

$$= \iint_S F_x \cdot \underline{\nu_x\, dS} + F_y \cdot \underline{\nu_y\, dS} + F_z \underline{\nu_z\, dS} =$$

3 ELEMENTY PLOCHY

15.

$\nu_x dS$ JE PRŮMĚT PLOCHY dS DO ROVINY yz, $dydz = \nu_x dS$ (MOHU OZNAČIT I TAKTO), PODOBNĚ JE TO I PRO $\nu_y dS = dxdz$ A $\nu_z dS = dxdy$, VŠECHNO PRŮMĚTY DO ROVIN.

$$= \iint_S F_x\,dydz + F_y\,dzdx + F_z\,dxdy = \underbrace{\iint_S}_{\text{PLOCHA } S} \varepsilon \cdot \vec{F} \cdot \frac{\vec{c}_t \times \vec{c}_s}{|\vec{c}_t \times \vec{c}_s|}\, d\overset{\text{VELKÉ}}{S} =$$

NĚKOLIK MOŽNOSTÍ:

a) $|e_t \times e_s|\,dt\,ds$

b) $\sqrt{\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s} \end{vmatrix}^2 + \dots}$

c) $\sqrt{\det G}$

$$= \varepsilon \iint_M \vec{F}(x(t;s);y(t;s);z(t;s)) \cdot (\vec{c}_t \times \vec{c}_s)\,dt\,ds =$$

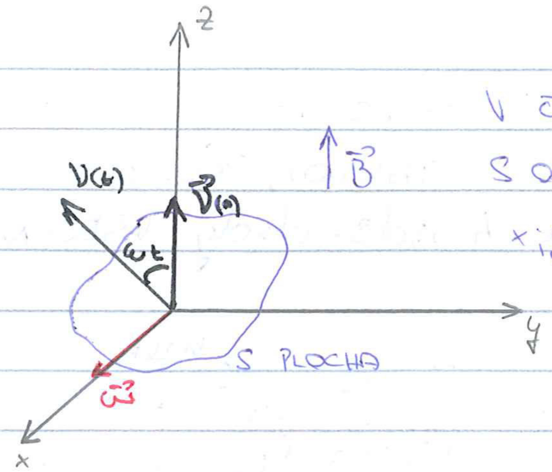
MNOŽINA M

$$= \varepsilon \iint_M \left(F_x(x(t;s);y(t;s);z(t;s)) \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s} \end{vmatrix} + F_y(x(t;s);y(t;s);z(t;s)) \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial s} \end{vmatrix} + \right.$$

$$\left. + F_z(x(t;s);y(t;s);z(t;s)) \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{vmatrix} \right) dt\,ds$$

PLOŠNÝ INTEGRÁL DRUHÉHO TYPU ZÁVISÍ NA ORIENTACI PLOCHY (MŮŽE I NEMUSÍ).

PŘÍKLAD: ROVINNÁ PLOCHA, MÁME KONSTANTNÍ VEKTOROVÉ POLE MAGNETICKÉ INDUKCE $\vec{B} = (0;0;B)$, PŘEDPOKLÁDÁME $B > 0$ A ROVINNOU PLOCHU S, KTERÁ ROTUJE KOLEM OSY x KONSTANTNÍ ÚHLOVOU RYCHLOSTÍ ω, TAK ŽE V ČASE $t=0$ JE JEJÍ NORMÁLA $\vec{\nu}$ SOUHLASNĚ ROVNOBĚŽNÁ S KLADNOU POLOOSOU z ($\vec{\nu} \parallel z^+$). URČETE ZÁVISLOST $\Phi(t)$. $B = \frac{\partial \Phi}{\partial t}$



V ČASE $t=0$ JE NORMÁLA $\vec{V}$ ROVNOBĚŽNÁ S OSOU Z, TATO NORMÁLA MÁ 3 SLOŽKY $x;y;z$ TY JSOU TAKOVÉTO:

$\vec{V}=(0;-\sin\omega t;\cos\omega t)$

PROTOŽE ROTUJE KOLEM OSY $\underline{x}$

$\vec{B}=(0;0;B)$

$$\Phi(t)=\iint_S(\vec{B}\cdot\vec{V})\,dS=\iint_S(\underbrace{0;0}_{0};B)\cdot(\underbrace{0;-\sin\omega t}_{0};\cos\omega t)\,dS=$$

JE KONSTANTA, MOHU DÁT PŘED INTEGRÁL

$$=\iint_S B\cdot\cos\omega t\,dS=B\cdot\cos\omega t\iint_S dS=\underline{\underline{B\cdot S\cdot\cos\omega t}}$$

ODPOVÍDÁ VELIKOSTI PLOCHY

MOHU TAKY DÁT PŘED INTEGRÁL, INTEGRUJEME TOTIŽ PŘES PLOCHU A NE PŘES ČAS

SILOČÁRY

- SILOČÁRA – V KAŽDÉM BODĚ JE NA NÍ TEČNÁ INTENZITA

SILOČÁROU ROZUMÍME KŘIVKU NA NÍŽ JE V KAŽDÉM BODĚ VEKTOR VEKTOROVÉHO POLE TEČNÝ.

MÁME VEKTOROVÉ POLE $\vec{G}(r)=(G_x(x;y;z);G_y(x;y;z);G_z(x;y;z))$

SILOČÁRA JE KŘIVKA: $\mathbb{R}\ni t\longrightarrow\vec{r}(t)=(x(t);y(t);z(t))$

- JE TO ZOBRAZENÍ, KTERÉ REÁLNÉMU $\underline{t}$ PŘIŘAZUJE $\vec{r}(t)=(x(t);y(t);z(t))$ A ŘÍKÁ SE ŽE $\vec{G}$ JE V KAŽDÉM BODĚ TEČNÉ KE KŘIVCE. $\dot{\vec{r}}(t)=\vec{G}(\vec{r}(t))$ TATO ROVNICE SE NÁM ROZPADNE NA 3 ROVNICE SKALÁRNÍ:

$$\dot{x}(t)=G_x(x(t);y(t);z(t))$$
$$\dot{y}(t)=G_y(x(t);y(t);z(t))$$
$$\dot{z}(t)=G_z(x(t);y(t);z(t))$$

PŘÍKLAD: NALEZNĚTE SILOČÁRY VEKTOROVÉHO POLE

$$\vec{G}(\vec{r}) = (G_x(x;y;z);\ G_y(x;y;z);\ \cancel{G_z(x;y;z)}) = (2;\ 3x)$$

$\dot{x}(t) = 2$ | VYŘEŠÍME PRVNÍ Z NICH A DOSADÍME

$\dot{y}(t) = 3x(t)$ | DO DRUHÉ. ZINTEGRUJEME:

ZÁVISLÉ NA t

$x(t) = 2t + c$ A DOSADÍME ZA $\dot{y}(t)$

$$\dot{y}(t) = 3(t\cdot 2 + c) = 6t + 3c$$

$$y(t) = 3t^2 + 3ct + D = \underline{3t^2 + c'\cdot t + D}$$

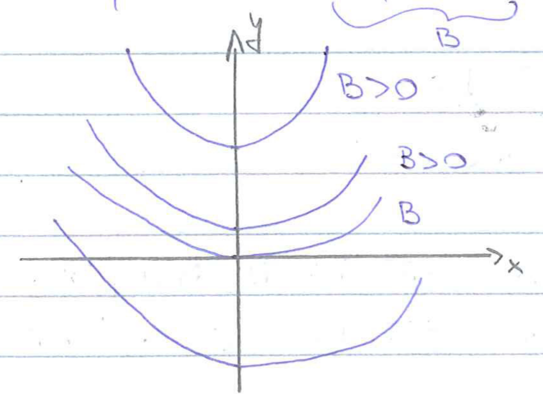
PARAMETRICKÉ ROVNICE SILOČAR:

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= 2t + c \\ y(t) &= 3t^2 + c'\cdot t + D \end{aligned}} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x(t) - c}{2}, \quad c' = 3c$$

$$y(t) = \frac{3\cdot(x^2(t) - 2x(t)\cdot c + c^2)}{4} + \frac{3c\cdot x(t) - 3c^2}{2} + D = \frac{3x^2(t)}{4} - \frac{6x(t)\cdot c}{4} + \frac{3c^2}{4} + \frac{3c\,x(t)}{2} -$$

$$- \frac{3c^2}{2} + D = \frac{3\cdot x^2(t)}{4} + \underbrace{\frac{-6\cdot c\cdot x(t) + 6\cdot c\cdot x(t)}{4}}_{0} + \frac{3c^2 - 6c^2}{4} + D =$$

$$= \frac{3}{4}x^2(t) - \underbrace{\frac{3}{4}c^2 + D}_{B} = \underline{\frac{3}{4}x^2(t) - B} = y(t)$$

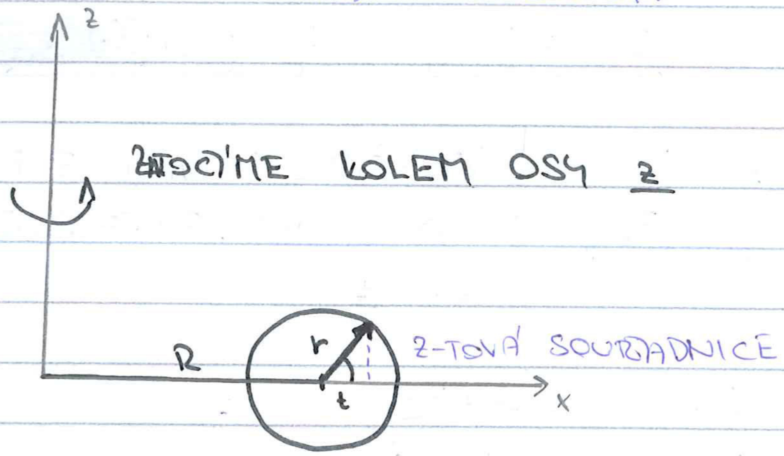


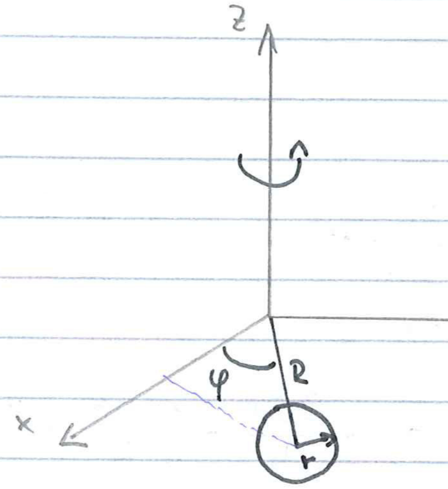
5) PRAKTICKÉ VÝPOČTY PLOŠNÝCH INTEGRÁLŮ

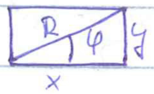
PŘÍKLAD: SPOČÍTEJTE MOMENT SETRVAČNOSTI POVRCHU HOMOGENNÍHO ANULOIDU VZHLEDEM K OSE z.

ANULOID = PNEUMATIKA

PŘEDPOKLÁDÁME STANDARDNÍ UMÍSTĚNÍ.







SOUŘADNICE

$z = r\cdot\sin t$

$y = (r\cdot\cos t + R)\cdot\sin\varphi$

$x = (r\cdot\cos t + R)\cdot\cos\varphi$

r A R JSOU TU KONSTANTY, MĚNÍ SE φ A t OBĚ V INTERVALU $t\in[0;2\pi]$, $\varphi\in[0;2\pi]$

BUDEME POČÍTAT MOMENT SETRVAČNOSTI VZHLEDEM K OSE z.

$$J_z = \iint_S (x^2+y^2)\cdot\sigma\cdot dS = \sigma\cdot\iint(x^2+y^2)\,dS$$

σ=KONST. PROTOŽE HOMOGENNÍ

URČITĚ BUDEME POTŘEBOVAT PARAMETRIZACI, URČITĚ BUDEME DOSAZOVAT ZA dS, STRANOU VYPOČÍTÁM VEKTORY $\vec{e}_t$ A $\vec{e}_\varphi$.

$$\vec{e}_t = \left(\frac{\partial x}{\partial t}; \frac{\partial y}{\partial t}; \frac{\partial z}{\partial t}\right) = (-r\cdot\cos t\cdot\cos\varphi; -r\sin t\cdot\sin\varphi; r\cdot\cos t)$$

$$\vec{e}_\varphi = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}; \frac{\partial y}{\partial \varphi}; \frac{\partial z}{\partial \varphi}\right) = ((R+r\cdot\cos t)\cdot(-\sin\varphi); (R+r\cos t)\cdot\cos\varphi; 0)$$

(17)

$$\vec{e}_t \cdot \vec{e}_t = r^2 \cdot \sin^2 t \cdot \cos^2\varphi + r^2 \cdot \sin^2 t \cdot \sin^2\varphi + r^2\cos^2 t =$$
$$= r^2 \cdot \sin^2 t \underbrace{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}_{1} + r^2\cos^2 t = r^2 \underbrace{(\sin^2 t + \cos^2 t)}_{1} = \underline{\underline{r^2}}$$

$$\vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_t = 0$$

$$\vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi = (R + r\cos t)^2 \cdot \sin^2\varphi + (R + r\cos t)^2 \cdot \cos^2\varphi = \underline{(R + r \cdot \cos t)^2}$$

$$\det G = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & (R + r \cdot \cos t)^2 \end{pmatrix} = r^2 \cdot (R + r\cos t)^2$$

$$\sqrt{\det G} = r \cdot (R + r\cos t)$$

$$J_z = \sigma \cdot \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \underbrace{((R + r \cdot \cos t)^2)}_{x^2+y^2} \cdot r(R + r\cos t)\, dt\, d\varphi = 2\pi \cdot \sigma \cdot r \int_0^{2\pi} (R + r\cos t)^3 dt =$$

$$= 2 \cdot \pi \cdot \sigma \cdot r \int_0^{2\pi} (R^3 + \underbrace{\cancel{3R^2\cos t}}_{0} + 3R \cdot r^2 \cdot \cos^2 t + r^3 \cdot \cos^3 t)\, dt = *$$

0 PROTOŽE INTEGRUJI OD 0 DO 2π A NAVZÁJEM SE TO POKRÁTÍ.

ROZDĚLÍM A STRANOU SPOČÍTÁM INTEGRÁLY PRO $\cos^2 t$ A $\cos^3 t$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt = \left| \begin{array}{l} \cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t = \cos^2 t - 1 + \cos^2 t = 2\cos^2 t - 1 \\ \frac{\cos 2t + 1}{2} = \cos^2 t \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2t + 1}{2}\, dt = \tfrac{1}{2} \cdot 2\pi = \underline{\underline{\pi}}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^3 t\, dt = \left| \begin{array}{l} \sin t = x \\ \cos t\, dt = dx \\ dt = \frac{dx}{\cos t} \end{array} \right| = \int_0^{2\pi} \cos^{\cancel{3}2} t \frac{dx}{\cancel{\cos t}} = \int_0^{2\pi} (1 - \underbrace{\sin^2 t}_{x^2})\, dx =$$

$$= \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_0^{2\pi} = \left[\cancel{\sin t} - \frac{\sin^3 t}{3} \right]_0^{2\pi}$$

INTEGRÁL OD NULY DO 2π VYRUŠÍ SE A VYJDE NULA

$$* = 2 \cdot \pi \cdot \sigma \cdot r \left([R^3 \cdot t]_0^{2\pi} + 3 \cdot R \cdot r^3 \cdot \pi + r^3 \cdot \left[-\frac{\sin^3 t}{3} \right]_0^{2\pi} \right) = \longrightarrow$$

$$= 2\pi \cdot \sigma \cdot r\,(2\pi R^3 + 3R \cdot r^2 \pi) = 2\pi^2 \cdot \sigma \cdot r \cdot R \cdot (2R^2 + 3r^2) = *$$

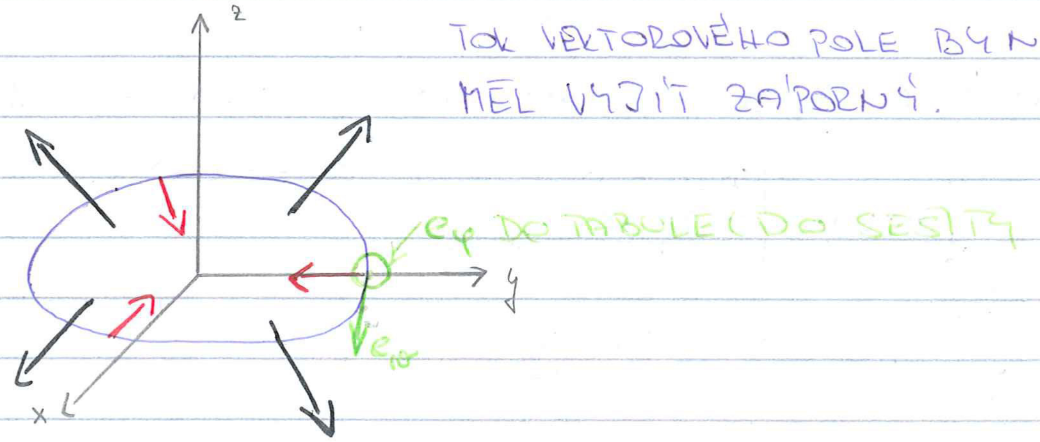
ZA σ MOHU DOSADIT Z TOHOTO VZTAHU:

$$\sigma = \frac{m}{S} = \frac{m}{\iint_S dS} = \frac{m}{\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} r \cdot (R + r\cos t)\,dt\,d\varphi} = \frac{m}{2\pi r \int_0^{2\pi} (R + r\cos t)\,dt} =$$

$$= \frac{m}{2\pi r \cdot 2\pi R}$$

$$* = \frac{\cancel{2\pi^2} \cdot \cancel{r} \cdot \cancel{R}\,(2R^2 + 3r^2) \cdot m}{2 \cdot \cancel{4\pi^2} \cdot \cancel{r} \cdot \cancel{R}} = \frac{m}{2}\,(2R^2 + 3r^2)$$

PŘÍKLAD: MÁME VEKTOROVÉ POLE ZADANÉ JAKO $\vec{G}(\vec{r}) = (x; y; z)$, MÁME POČÍTAT TOK UZAVŘENOU PLOCHOU $\left(\frac{x^2}{a^2}\right) + \left(\frac{y^2}{b^2}\right) + \left(\frac{z^2}{c^2}\right) = 1$ (POVRCH ELIPSOIDU) ORIENTOVANOU VNITŘNÍ NORMÁLOU.



TOK VEKTOROVÉHO POLE BY NÁM MĚL VYJÍT ZÁPORNÝ.

BUDEME ŘEŠIT INTEGRÁL:

$$\Phi = \iint_S (\vec{G} \cdot \vec{S})\,dS =$$

ZOBECNĚNÉ SFÉRICKÉ SOUŘADNICE
$x = a \cdot \cos\varphi \sin\vartheta$
$y = b \cdot \sin\varphi \cdot \sin\vartheta$
$z = c \cdot \cos\vartheta$
$\varphi \in [0; 2\pi]$; $\vartheta \in [0; \pi]$

$= *$ ⟶

MUSÍME ROZHODNOUT ZDA JE PRO NÁS RELEVANTNÍ POŘADÍ $(\varphi; \vartheta)$ NEBO $(\vartheta; \varphi)$

PODLE PRAVIDLA PRAVÉ RUKY Z OBRÁZKU.

$$* = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\Bigg(\underbrace{a\cdot\cos\varphi\cdot\sin\vartheta}_{G_x}\begin{vmatrix}\frac{\partial y}{\partial\varphi} & \frac{\partial z}{\partial\varphi}\\ \frac{\partial y}{\partial\vartheta} & \frac{\partial z}{\partial\vartheta}\end{vmatrix} + \underbrace{b\cdot\sin\varphi\sin\vartheta}_{G_y}\begin{vmatrix}\frac{\partial z}{\partial\varphi} & \frac{\partial x}{\partial\varphi}\\ \frac{\partial z}{\partial\vartheta} & \frac{\partial x}{\partial\vartheta}\end{vmatrix} +$$

$$+ c\cdot\cos\vartheta\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial\varphi} & \frac{\partial y}{\partial\varphi}\\ \frac{\partial x}{\partial\vartheta} & \frac{\partial y}{\partial\vartheta}\end{vmatrix}\Bigg)\,d\vartheta\,d\varphi =$$

VYPOČÍTAM ČLENY TECH MATÍC!

$$\frac{\partial y}{\partial\varphi} = b\cdot\cos\varphi\cdot\sin\vartheta \qquad \frac{\partial x}{\partial\varphi} = -a\cdot\sin\varphi\cdot\sin\vartheta \qquad \frac{\partial z}{\partial\varphi} = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial\vartheta} = b\cdot\sin\varphi\cos\vartheta \qquad \frac{\partial x}{\partial\vartheta} = a\cdot\cos\varphi\cdot\cos\vartheta \qquad \frac{\partial z}{\partial\vartheta} = -c\cdot\sin\vartheta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\Bigg(a\cdot\cos\varphi\cdot\sin\vartheta\begin{vmatrix}b\cdot\cos\varphi\sin\vartheta & 0\\ b\cdot\sin\varphi\cos\vartheta & -c\cdot\sin\vartheta\end{vmatrix} + b\sin\varphi\sin\vartheta\begin{vmatrix}0 & -a\cdot\sin\varphi\sin\vartheta\\ -c\cdot\sin\vartheta & a\cos\varphi\cos\vartheta\end{vmatrix}$$

$$+ c\cdot\cos\vartheta\begin{vmatrix}-a\sin\varphi\sin\vartheta & b\cdot\cos\varphi\sin\vartheta\\ a\cdot\cos\varphi\cos\vartheta & b\cdot\sin\varphi\cos\vartheta\end{vmatrix}\Bigg)\,d\varphi\,d\vartheta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\Big[a\cdot\cos\varphi\sin\vartheta(-b\cdot c\cdot\cos\varphi\cdot\sin^2\vartheta) + b\cdot\sin\varphi\sin\vartheta\cdot(-ac\sin\varphi\cdot\sin^2\vartheta) +$$
$$+ c\cdot\cos\vartheta(-ab\sin^2\varphi\sin\vartheta\cdot\cos\vartheta - ab\cos^2\varphi\cdot\cos\vartheta\cdot\sin\vartheta)\Big]\,d\varphi\,d\vartheta =$$

$$= -abc\Big[\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\underbrace{\cos^2\varphi\sin^3\vartheta + \sin^2\varphi\cdot\sin^3\vartheta}_{\sin^3\vartheta\cdot(1)} + \underbrace{\sin^2\varphi\sin\vartheta\cdot\cos^2\vartheta + \cos^2\varphi\cdot\cos^2\vartheta\cdot\sin\vartheta}_{\cos^2\vartheta\cdot\sin\vartheta\,\underbrace{(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)}_{1}}\;d\varphi\,d\vartheta\Big]$$

$$= -abc\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(\sin^3\vartheta + \cos^2\vartheta\cdot\sin\vartheta)\,d\varphi\,d\vartheta =$$

$$= -abc\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin\vartheta(\sin^2\vartheta+\cos^2\vartheta)\,d\varphi\,d\vartheta = -2\pi abc\int_0^{\pi}\sin\vartheta\,d\vartheta =$$

$$= -2\pi abc\big[-\cos\vartheta\big]_0^{\pi} = -2\pi abc\,[+1+1] = \underline{\underline{-4\pi abc}}$$

POŘÁDEK V TERMYNOLOGII

BUDEME SE BAVIT O TOKU VEKTOROVÉHO POLE UZAVŘENOU PLOCHOU.

$$\Phi = \oiint \vec{F}\, d\vec{S} = \begin{cases} > 0 \\ = 0 \\ < 0 \end{cases}$$

UZAVŘENOST PLOCHY

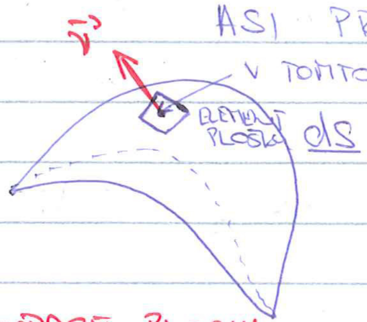
$\boxed{>0}$ - TOK JE VĚTŠÍ NEŽ NULA, ŘÍKÁME, ŽE V OBJEMU, KTERÝ JE OHRANIČEN UZAVŘENOU PLOCHOU $\underline{S}$, JSOU ZŘÍDLA VEKTOROVÉHO POLE (NÁBOJ BUDÍ KOLEM SEBE ELEKTROSTATICKÉ POLE).

$\boxed{<0}$ - TOK JE MENŠÍ NEŽ NULA, ŘÍKÁME, ŽE V OBJEMU, KTERÝ JE OHRANIČEN UZAVŘENOU PLOCHOU $\underline{S}$ JSOU PROPADY VEKTOROVÉHO POLE.

$\boxed{=0}$ - TOK JE ROVEN NULE, ŘÍKÁME, ŽE V OBJEMU, KTERÝ JE OHRANIČEN UZAVŘENOU PLOCHOU $\underline{S}$ NEJSOU ZŘÍDLA ANI PROPADY.

PŘÍKLAD: VYPOČTĚTE CELKOVOU TLAKOVOU SÍLU, KTERÁ PŮSOBÍ NA PLOCHU $\underline{S}$ V IDEÁLNÍ KAPALINĚ, KAPALINA JE V KLIDU.

- OPĚT TO BUDE PLOŠNÝ INTEGRÁL, TENTOKRÁT ASI PRVNÍHO.



ELEMENTÁRNÍ SÍLA PŮSOBÍCÍ NA PLOŠKU dS -

$$d\vec{F} = \vec{\nu} \cdot p\,dS = \vec{\nu}(x;y;z) \cdot p(x;y;z)\,dS$$

VEKTOROVÁ FUNKCE (u $\vec{\nu}$), SKALÁRNÍ FUNKCE (u p)

ORIENTACE PLOCHY DÁNA NORMÁLOU $\vec{\nu}$.

TEĎ TO MŮŽEME ROZEPSAT V JEDNOTLIVÝCH SLOŽKÁCH:

$$F_x = \iint_S \nu_x(x;y;z) \cdot p(x;y;z)\,dS = \iint_S p(x;y;z)\,dy\,dz$$

$$F_y = \iint_S \nu_y(x;y;z) \cdot p(x;y;z)\,dS = \iint_S p(x;y;z)\,dz\,dx$$

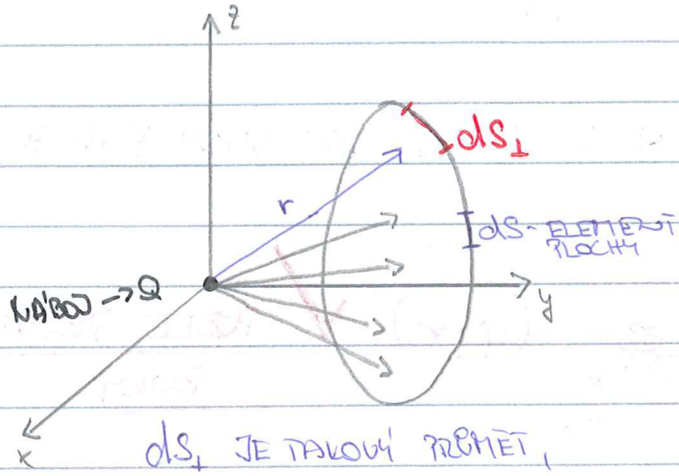
$$F_z = \iint_S \nu_z(x;y;z) \cdot p(x;y;z)\,dS = \iint_S p(x;y;z)\,dx\,dy$$

INFORMACE O PLOŠE $\underline{S}$

19)

KDYBYCHOM CHTĚLI DÁL POČÍTAT, TAK BY NÁM NĚKDO MUSEL ŘÍCT JAK TA PLOCHA VYPADÁ!

PŘÍKLAD: URČETE TOK VEKTORU INTENZITY ELEKTROSTATICKÉHO POLE BUZENÉHO BODOVÝM NÁBOJEM Q, UMÍSTĚNÝM V POČÁTKU SOUŘADNIC, LIBOVOLNOU UZAVŘENOU PLOCHOU S



$$\vec{E} = \frac{Q}{r^3}\cdot\vec{r}\cdot k \qquad \vec{r}\,dS_\perp$$

$$\Phi = \oiint_S \vec{E}\,d\vec{S} = \iint_S k\cdot\frac{Q}{r^3}\,\vec{r}\,d\vec{S} =$$

$$= k\cdot Q \oiint_S \frac{r}{r^{3}{}_{2}}\,dS_\perp = k\cdot Q \oiint_S \frac{dS}{r^2} =^*$$

ODPOVÍDÁ ELEMENTU PROSTOROVÉHO ÚHLU $d\Omega$ (INTEGRUJEME PŘES CELÝ PROST. ÚHEL)

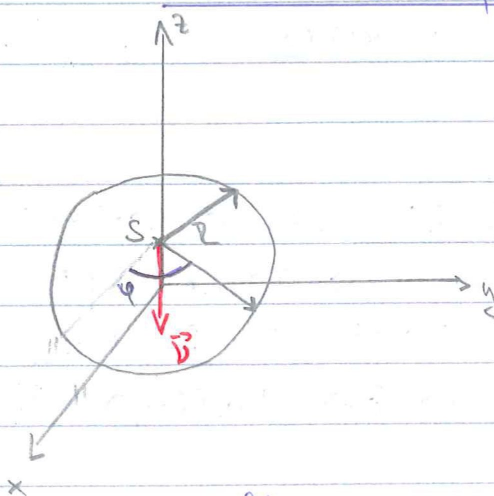
$dS_\perp$ JE TAKOVÝ PRŮMĚT, ŽE JE NA NĚJ r KOLMÝ

$\left[Q = \iiint_V \rho\, dV \right]$

$$^* = k\cdot Q\cdot 4\pi = \frac{1}{\cancel{4\pi}\varepsilon_0}\cdot Q\cdot\cancel{4\pi} = \frac{Q}{\varepsilon_0} =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\iiint_V \rho\, dV$$

PŘÍKLAD: URČETE TOK VEKTOROVÉHO POLE $\vec{F} = (x^2; y^2; z^2)$ KRUHEM O POLOMĚRU R, LEŽÍCÍM V ROVINĚ $z=1$, STŘED MÁ SOUŘADNICE $S = [0; 0; 1]$ PLOCHA KRUHU JE ORIENTOVANÁ NORMÁLOU $\vec{\nu}$, $\vec{\nu} = (0; 0; -1)$



$\Phi = \iint \vec{F}\cdot\vec{\nu}\, dS =$ EXISTUJÍ DVA ZPŮSOBY JAK NA TO JÍT = ...

1) PRVNÍ: KONSTANTNÍ POLE NORMÁLY (NORMÁLA JE KONSTANTNÍ).

PROVEDEME NÁSOBENÍ SKALÁREM

$$= \iint_S (x^2\cdot 0 + y^2\cdot 0 + z^2(-1))\, dS = \iint_S -z^2\, dS = \left| \begin{array}{l} x = r\cdot\cos\varphi \\ y = r\cdot\sin\varphi \\ z = 1;\ \varphi\in[0; 2\pi] \\ r\in[0; R] \end{array} \right| = -\int_0^{2\pi}\!\!\int 1\, dS = \pi R^2(-1)$$

$$= -\pi R^2$$

POLÁRNÍ SOUŘADNICE

PRACHSPROSTÝ PLOŠNÝ INTEGRÁL 1. TYPU

~~NÁSLEDNÁ KOMPATIBILITA~~

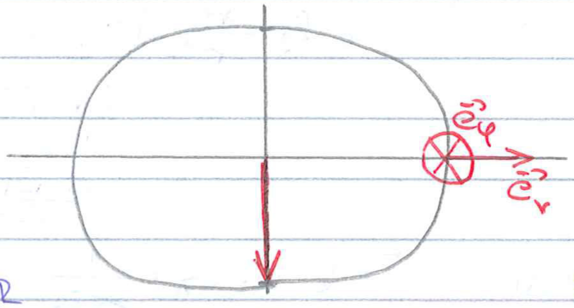
MINUS JE TAM KVŮLI ORIENTACI NORMÁLY DOLŮ.

NYNÍ OBECNÝ ZPŮSOB POMOCÍ DETERMINANTŮ:

$$\Phi = \iint_S \vec F\, d\vec S = \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^R \left((r\cdot\cos\varphi)^2 \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi}=0 \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r}=0 \end{vmatrix} + (r\cdot\sin\varphi)^2 \overbrace{\begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial \varphi}=0 & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r}=0 & \frac{\partial x}{\partial r} \end{vmatrix}}^{z=\text{konst.}} + \right.$$

$$\left. + (1)^2 \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \end{vmatrix} \right) dr\, d\varphi = \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^R 1 \begin{vmatrix} -r\sin\varphi & r\cos\varphi \\ \cos\varphi & \sin\varphi \end{vmatrix} dr\, d\varphi = *$$

TADY UŽ MUSÍM DÁVAT POZOR JESTLI PRVNĚ DERIVUJI PODLE φ ČI r, ZJISTÍM Z OBRÁZKU:



$(\varphi; r)$ ✓ PODLE PRAVÉ RUKY

$$* = \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^R (-r^2\sin^2\varphi - r\cos^2\varphi)\, dr\, d\varphi = -\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^R r\, dr\, d\varphi = 2\pi\int_0^R r\, dr = -2\pi\frac{R^2}{2} = \underline{\underline{-\pi R^2}}$$

6.) INTEGRÁLNÍ VĚTY

A) GAUSSOVA VĚTA (GAUSSOVA-OSTROGRADSKÉHO VĚTA)

- ŘÍKÁ ŽE INTEGRÁL PŘES UZAVŘENOU PLOCHU

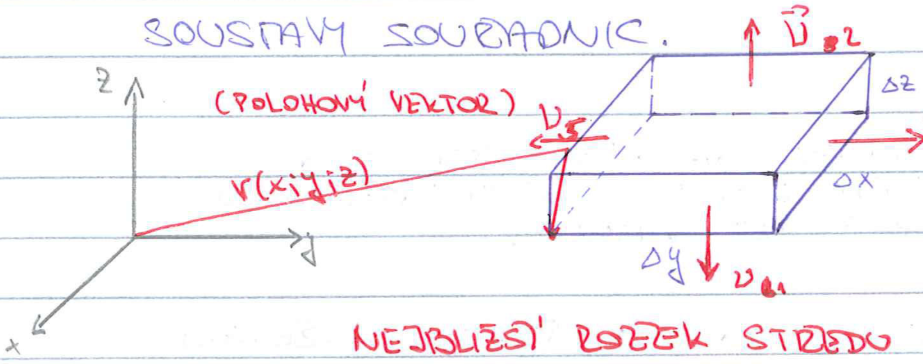
$$\oint\!\!\!\oint_{S=\partial V} F\cdot d\vec S = \iiint_V \operatorname{div} \vec F\, dV$$

NĚKDY SE PÍŠE, ŽE TA PLOCHA $\underline{S}$ JE HRANICÍ OBJEMU $\underline{\partial V}$, PODSTATNÉ JE ABY TA PLOCHA BYLA ORIENTOVANÁ VNĚJŠÍ NORMÁLOU. TUTO INFORMACI JE POTŘEBA PŘIDAT NA LEVOU STRANU, ABYCHOM SE POTKALI NALEVO I NAPRAVO S PŘÍSLUŠNÝM ZNAMÉNKEM.

20.)

GEOMETRICKÁ PŘEDSTAVA (NÁZNAK DŮKAZU)

- VEZMEME SI SOUSTAVU SOUŘADNIC A DO NÍ SI DOSADÍME MALÝ KVÁDR, KTERÝ BUDE MÍT TU VLASTNOST, ŽE JEDNOTLIVÉ HRANY BUDOU ROVNOBĚŽNÉ S OSAMI SOUSTAVY SOUŘADNIC.



NEJBLIŽŠÍ ROŽEK STŘEDU SOUSTAVY SOUŘADNIC

MŮŽEME SPOČÍTAT TOK VEKTOROVÉHO POLE, KDYŽ ŘEKNEME JAKOU BUDE MÍT TATO PLOCHA ORIENTACI. PLOCHA BUDE ORIENTOVANÁ JEDNOTKOVÝMI VEKTORY VNĚJŠÍ NORMÁLY $\uparrow \vec{\nu} \to \downarrow \ldots$

ROZEPÍŠEME PŘES JEDNOTLIVÉ PLOCHY

$$\Phi = \oiint \vec{F} d\vec{S} = \underbrace{\iint_{S_1} \vec{F}\cdot\vec{\nu}_1 \, dS}_{\Phi_1 \text{ PŘEDNÍ PLOCHA}} + \underbrace{\iint_{S_2} \vec{F}\cdot\vec{\nu}_2 \, dS}_{\Phi_2 \text{ ZADNÍ PLOCHA}} + \underbrace{\iint_{S_3} \vec{F}\cdot\vec{\nu}_3 \, dS}_{\Phi_3 \text{ HORNÍ PLOCHA}} + \underbrace{\iint_{S_4} \vec{F}\cdot\vec{\nu}_4 \, dS}_{\Phi_4 \text{ DOLNÍ PLOCHA}} + \underbrace{\iint_{S_5} \vec{F}\,\nu_5 \, dS}_{\Phi_5 \text{ LEVÁ PLOCHA}} + \underbrace{\iint_{S_6} \vec{F}\,\nu_6 \, dS}_{\Phi_6 \text{ PRAVÁ PLOCHA}}$$

$\nu_1 = (1;0;0)$ $\qquad$ $\nu_2 = (-1;0;0)$

NEMUSÍME POČÍTAT VŠECHNY, STAČÍ VYPOČÍTAT PRVNÍ DVA A UVIDÍME JAK DOPADNOU ZBÝVAJÍCÍ.

$$\Phi_1 + \Phi_2 \doteq \iint_{S_1} F_x(x+\Delta x;y;z)\,dS - \iint_{S_2} F_x(x;y;z)\,dS = \iint_S \underbrace{(F_x(x+\Delta x;y;z) - F_x(x;y;z))}_{\doteq \frac{\partial F_x}{\partial x}\Delta x \text{ PODLE DEF. DERIVACE}}\,dS \doteq$$

$$\doteq \iint \frac{\partial F_x}{\partial x}\Delta x \, dS \doteq \frac{\partial F}{\partial x}\underbrace{\Delta x \Delta y \Delta z}_{\Delta V} = \underline{\underline{\frac{\partial F}{\partial x}\overbrace{\Delta V}^{\text{ELEMENTÁRNÍ OBJEM}}}}$$

PŘEDPOKLÁDÁM ŽE TY PLOŠKY JSOU TAK MALÉ, ŽE TO POLE JE NA NICH ZHRUBA KONSTANTNÍ. PRO DALŠÍ: Φ_3, Φ_4 A Φ_5, Φ_6 BY TO VYŠLO PODOBNĚ JE BY SE LIŠIL INDEX

$$\Phi = \oiint_S \vec{F} d\vec{S} = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4 + \Phi_5 + \Phi_6 \doteq \underbrace{\left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\right)}_{\operatorname{div} \vec{F}} \Delta x \Delta y \Delta z =$$

$$\doteq \iiint \operatorname{div} \vec{F} \, dV$$

$$\boxed{\oiint \vec{F} d\vec{S} = \iiint \operatorname{div} \vec{F} \, dV}$$

$$\operatorname{div} \vec{F} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta V}$$

ZMĚNA TOKU VEKTOROVÉHO POLE PŘIPADAJÍCÍHO NA PŘÍSLUŠNÝ ELEMENT OBJEMU, Z PŘEDPOKLADU ŽE ELEMENT BĚŽÍ K NULE.

POKUD JE TOK VEKTOROVÉHO POLE PŘES UZAVŘENOU PLOCHU NULOVÝ, TAK CO DO OBJEMU VTEČE TO Z NĚJ I VYTEČE $\operatorname{div} \vec{F} = 0$ TAKOVÉ POLE JE NEZŘÍDLOVÉ.

PŘÍKLAD: $\vec{G} = (x; y; z)$ (VEKT. POLE) $\rho: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

TOK VEKTOROVÉHO POLE POVRCHEM ELIPSOIDU, KTERÝ JE ORIENTOVANÝ JEDNOTKOVOU VNITŘNÍ NORMÁLOU.

TOK Φ VYPOČÍTÁME POMOCÍ GAUSSOVY-OSTROGRADSKÉHO VĚTY.

OBJEM ELIPSOIDU $V = 4/3 \pi abc$

$$\Phi = \oiint \vec{G} d\vec{S} = -\iiint_V \operatorname{div} \vec{G} \, dV = -\iiint_V \Big(\underbrace{\frac{\partial G_x}{\partial x}}_{1} + \underbrace{\frac{\partial G_y}{\partial y}}_{1} + \underbrace{\frac{\partial G_z}{\partial z}}_{1}\Big) dV = -3 \iiint_V dV = -4\pi abc$$

GAUSSOVA-OSTROGRADSKÉHO VĚTA PLATÍ ZA PŘEDPOKLADU, ŽE MÁME ORIENTACI VNĚJŠÍ NORMÁLOU, ABY TO PLATILO TAK DO INTEGRÁLU DÁME MÍNUS.

PŘÍKLAD: MÁME VYPOČÍTAT OBJEM VÁLCE O POLOMĚRU R A VÝŠCE H, POMOCÍ GAUSSOVY-OSTROGRADSKÉHO VĚTY.

KDYŽ BYCHOM MĚLI SPOČÍTAT OBJEM NĚJAKÉHO TĚLESA, TAK NA TO PŮJDEME PŘES OBJEMOVÝ INTEGRÁL:

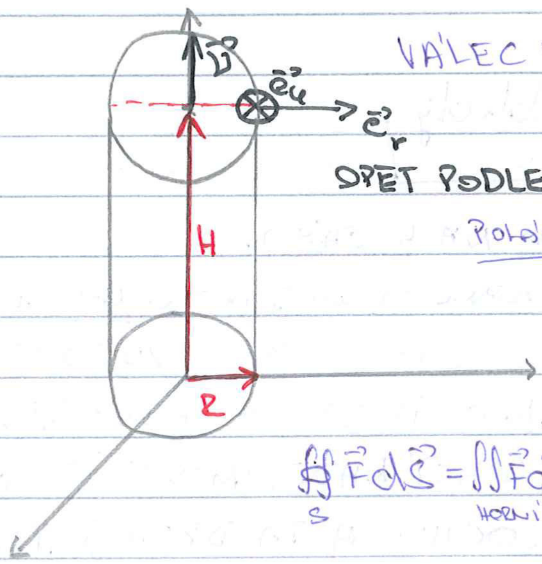
$$V = \iiint_V 1 \, dx dy dz \overset{\text{G-O VĚTA}}{=} \oiint_S \vec{F} d\vec{S}$$

VEKTOROVÉ POLE $\vec{F}$ MÁ SLOŽKY $\vec{F}=(F_x; F_y; F_z)$ A MY VÍME, ŽE DIVERGENCE TOHO VEKTOROVÉHO POLE MÁ BÝT ROVNA 1.

$$\operatorname{div}\vec{F} = 1 = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = 1$$

NAŠÍM ÚKOLEM JE, ŘÍCT JAK TO VEKTOROVÉ POLE BUDE VYPADAT, TAKOVÝCH MOŽNOSTÍ BUDE NEKONEČNĚ MNOHO NAPŘÍKLAD:

$\vec{F}=(0;0;z)$; $\vec{F}=(0;y;0)$; $\vec{F}=(x;0;0)$; $\vec{F}=\frac{1}{3}(x;y;z)$ ...



VÁLEC BUDE SEDĚT VE STŘEDU SOUSTAVY SOUŘADNIC.

OPĚT PODLE PRAVÉ RUKY VYBEREME KOMBINACI $(r;\varphi)$

POLÁRNÍ SOUŘADNICE: $x = r\cdot\cos\varphi$, $y = r\cdot\sin\varphi$, $z = H$

$\vec{F}=(0;0;z)$ VYBEREME LEHČÍ VARIANTU

$$\oiint_S \vec{F}\,d\vec{S} = \iint_{\text{HORNÍ}} \vec{F}\,d\vec{S} + \underbrace{\iint_{\text{DOLNÍ}} \vec{F}\,d\vec{S}}_{0} + \underbrace{\iint_{\text{PLÁŠŤ}} \vec{F}\,d\vec{S}}_{0} = *$$

ŽÁDNÁ SILOČÁRA NEPROTÍNÁ PLÁŠŤ

DOLNÍ $z=0$

$$* \iint_{\text{HORNÍ}} \vec{F}\,d\vec{S} = \int_0^{2\pi}\int_0^R z \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} dr\,d\varphi = H \cdot \int_0^{2\pi}\int_0^R \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} dr\,d\varphi =$$

$$= H\int_0^{2\pi}\int_0^R \underbrace{(r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi)}_{\text{GONIOMETRICKÁ JEDNIČKA}}\,dr\,d\varphi = H\int_0^{2\pi}\int_0^R r\,dr\,d\varphi = 2\pi H\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R = \cancel{2}\pi H\frac{R^2}{\cancel{2}} = \underline{\underline{\pi H R^2}}$$

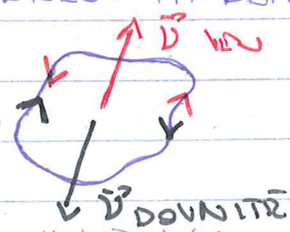
B) STOKESOVA VĚTA

INTEGRÁL PŘES PLOCHU KTEROU TA KŘIVKA OBEPÍNÁ

$$\oint_{c=\partial S} \vec{F}\,d\vec{l} = \iint_S \operatorname{rot}\vec{F}\,d\vec{S}$$

INTEGRÁL PO UZAVŘENÉ KŘIVCE

KŘIVKA C



ZÁLEŽÍ JAKÝM ZPŮSOBEM ORIENTUJEME PLOCHU A KŘIVKU.

PRAVOTOČIVĚ INDUKOVANÁ ORIENTACE KŘIVKY.

GEOMETRICKÁ PŘEDSTAVA - NÁZNAK DŮKAZU

$$\oint_{C} \vec{F}\, d\vec{l} = \oint_{C} (F_x dx + F_y dy + F_z dz) = \iint_{S} \mathrm{rot}\, \vec{F}\, d\vec{S} = \iint_{S} \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) dy\, dz +$$

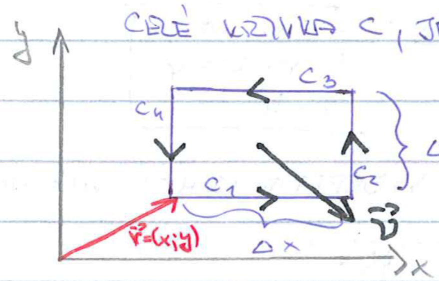
KŘIVKA (C) — PLOCHA (S)

$$+ \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) dz\, dx + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) dx\, dy$$

ZAVEDEME SI ZJEDNODUŠUJÍCÍ PŘEDPOKLAD ŽE V $z=0$.
POTOM POČÍTÁME:

$$\boxed{\oint_{C} F_x dx + F_y dy = \iint \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) dx\, dy}$$

CELÉ KŘIVKA C, JEN ROZDĚLENÁ NA 4 ČÁSTI.



OPĚT PODOBNÉ TRIKY JAKO U G-O VĚTY. NEJBLIŽŠÍ BOD OD POČÁTKU SOUSTAVY SOUŘADNIC MÍŘÍ POLOHOVÝ VEKTOR $\vec{r}=(x;y)$. STAČÍ NADEFINOVAT ORIENTACI KŘIVKY NEBO PLOCHY A TA DRUHÁ MUSÍ POSLECHNOUT.

$$\oint_{C} F_x dx + F_y dy = \int_{c_1} F_x dx + \int_{c_2} F_y dy + \int_{c_3} F_x dx + \int_{c_4} F_y dy =$$

$$= \underbrace{\int_{x}^{x+\Delta x} F_x(x;y)\, dx}_{c_1} + \underbrace{\int_{y}^{y+\Delta x} F_y(x+\Delta x;y)\, dy}_{c_2} + \underbrace{\int_{x+\Delta x}^{x} F_x(x+\Delta x;y+\Delta y)\, dx}_{c_3} + \underbrace{\int_{y+\Delta y}^{y} F_y(x;y)\, dy}_{c_4} =$$

= NYNÍ DÁM DOHROMADY INTEGRÁLY PŘES x A y =

$$= \underbrace{\int_{x}^{x+\Delta x} (F_x(x;y) - F_x(x;y+\Delta y))\, dx}_{\doteq -\frac{\partial F}{\partial y}\Delta y} + \underbrace{\int_{y}^{y+\Delta y} (F_y(x+\Delta x;y) - F_y(x;y))\, dy}_{\doteq \frac{\partial F}{\partial x}\Delta x} =*$$

MÍNUS KVŮLI OTOČENÍ MEZÍ

OPĚT KVŮLI OTOČENÍ MEZÍ

POUŽIJEME TAYLORŮV ROZVOJ FCÍ DVOU PROMĚNNÝCH

$$* \doteq -\int_{x}^{x+\Delta x} \frac{\partial F_x}{\partial y} \Delta y\, dx + \int_{y}^{y+\Delta y} \frac{\partial F_y}{\partial x} \Delta x\, dy = -\frac{\partial F_x}{\partial y} \Delta y \Delta x + \frac{\partial F_y}{\partial \Delta x} \Delta x \Delta y = * \longrightarrow$$

PŘEDPOKLÁDÁME, ŽE JSME NA MALÝCH ÚSECÍCH A MŮŽEME TYTO FUNKCE ZHRUBA POVAŽOVAT ZA PŘIBLIŽNĚ KONSTANTNÍ A DÁME VEN PŘED INTEGRÁL.

(22)

$$= \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) \Delta x \, \Delta y \doteq \iint_S \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) dx\, dy$$

GEOMETRICKÝ VÝZNAM ROTACE VEKTOROVÉHO POLE:

$$\underbrace{\oint \vec{F} d\vec{l}}_{\Delta W} = \iint_S \operatorname{rot} \vec{F} d\vec{S} = \iint_S (\operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{\nu}) \, dS$$

$$\operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{\nu} = \frac{\Delta W}{\Delta S}$$ ΔW - PRÁCE SÍLY

PRÁCE SÍLY - POLE JE KONZERVATIVNÍ - JE TAKOVÉ POLE PRO NÍŽ JE PRÁCE PO LIBOVOLNÉ UZAVŘENÉ KŘIVCE ROVNA NULE.

- MEZI DVĚMA LIBOVOLNÝMI BODY NEZÁVISÍ PRÁCE POLE NA KŘIVCE

$$0 = \oint_C \vec{F} d\vec{l} \underset{\text{STOKESOVA VĚTA}}{=} \iint_S \operatorname{rot} \vec{F} d\vec{S} = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{F} = 0$$

PODÍVÁME SE ZNOVU NA STOKESOVU VĚTU, NA LEVÉ STRANĚ MÁME INTEGRÁL PŘES UZAVŘENOU KŘIVKU, NA PRAVÉ STRANĚ JE INTEGRÁL PŘES PLOCHU A OTÁZKOU JE JESTLI VŠECHNY TY INTEGRÁLY NA PRAVÉ STRANĚ MUSEJÍ BÝT STEJNÉ - URČITĚ ANO, PROČ TOMU ALE TAK JE?

$$\oint_C \vec{F} d\vec{l} = \iint_{S_1} \operatorname{rot} \vec{F} d\vec{S} = \iint_{S_2} \operatorname{rot} \vec{F} d\vec{S} = \iint_{S_n} \operatorname{rot} \vec{F} d\vec{S}$$

SPOČÍTÁME SI INTEGRÁLY:

$$\iint_{S_1} \operatorname{rot} \vec{F} d\vec{S} - \iint_{S_2} \operatorname{rot} \vec{F} d\vec{S}$$ ... PLOCHY S_1 A S_2 TVOŘÍ NĚJAKÝ OBJEM.

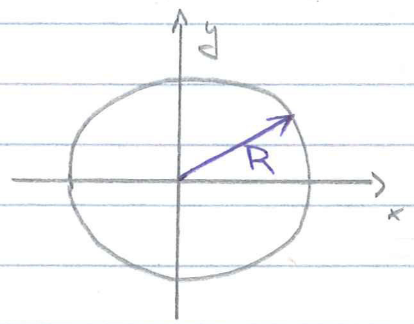
$$\iint_{S = S_1 + S_2} \operatorname{rot} \vec{F} d\vec{S} = \iiint_V \underbrace{\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{F}}_{0} dV = \underline{\underline{0}}$$

V - OBJEM OHRANIČENÝ PLOCHAMI S1 A S_2

$$\iint_S \operatorname{rot}\vec F\, d\vec S = \iint_{S_1} \operatorname{rot}\vec F\, d\vec S + \iint_{S_2} \operatorname{rot}\vec F\, d\vec S = 0$$

LIŠÍ SE NÁM ZNAMÉNKA, KDE JSME UDĚLALI CHYBU?
MUSÍME VYSVĚTLIT JAKÝ JE ROZDÍL MEZI ZNAMÉNKY.
VYSVĚTLENÍM JE ORIENTACE VNĚJŠÍ NORMÁLY.
EXISTUJE JEŠTĚ GREENOVA VĚTA A TA JE SPECIÁLNÍ PŘÍPAD STOKESOVY VĚTY
~~PŘÍPAD~~: COŽ JE VLASTNĚ STOKESOVA VĚTA REDUKOVANÁ NA ROVINNÝ PŘÍPAD.

PŘÍKLAD: UŽITÍM STOKESOVY VĚTY VYPOČTĚTE OBSAH KRUHU O POLOMĚRU R.



$$S = \iint_S 1\, dx\, dy = \oint \vec F\, d\vec l$$

↑ STOKESOVA VĚTA

ROTACE VEKTOROVÉHO POLE $\vec F = (0;0;1)$, OPĚT HLEDÁME VEKTOROVÉ POLE TAKOVÉ, ŽE JEHO ROTACE BUDE $(0;0;1)$ NAPŘ: $\vec F = (0;x;0)$

$$\oint_C \vec F\, d\vec l = \oint (\underbrace{F_x dx}_{0} + F_y dy + \underbrace{F_z dz}_{0}) = \int x\, dy = \left| \begin{matrix} x = R\cdot\cos\varphi \\ y = R\cdot\sin\varphi \end{matrix} \right| = \left| dy = R\cdot\cos\varphi\, d\varphi \right| =$$

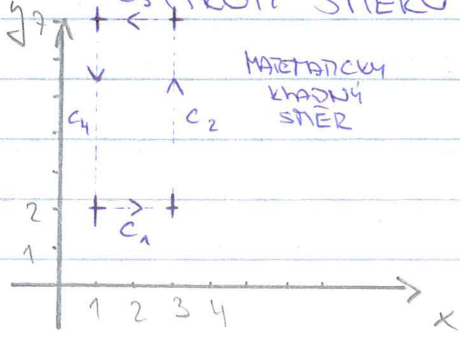
POLÁRNÍ SOUŘADNICE

$$= \oint_0^{2\pi} R^2\cos^2\varphi\, d\varphi = R^2\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\, d\varphi = R^2\int_0^{2\pi}\frac{1+\cancel{\cos 2\varphi}}{2}\, d\varphi = R^2\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\, d\varphi = \underline{\underline{\pi R^2}}$$

0, PŘ DO 2π

PŘÍKLAD: PRÁCE SÍLY PO UZAVŘENÉ KŘIVCE, SILOVÉ POLE $\vec F = (x^2; 6y^6; z^4 - xy^3)$, PO UZAVŘENÉ KŘIVCE c (OBDÉLNÍK) $[1;3]\times[2;7]$, ORIENTOVANÝ V KLADNÉM MATEMATICKÉM SMYSLU. (PROTI SMĚRU HODINOVÝCH RUČIČEK). $W_F = ?$

a)



a) PŘÍMÝ VÝPOČET
b) STOKESOVA VĚTA

23.)

ROZDĚLENÍ KVŮLI HRANÁM

a) $W_{\vec{F}} = \int_C \vec{F} d\vec{l} = \int_C (F_x dx + F_y dy) = \underbrace{\int_{C_1} F_x dx + \int_{C_2} F_y dy + \int_{C_3} F_x dx + \int_{C_4} F_y dy}_{\text{ROZDĚLENÍ KVŮLI HRANÁM}} =$

PARAMETRIZACE

$$= \left| \begin{array}{ll} C_1: x = t & C_3: x = t \\ \quad y = 2 ; t \in [1;3] & \quad y = 7 ; t \in [3;1] \\ C_2: x = 3 & C_4: x = 1 \\ \quad y = t ; t \in [2;7] & \quad y = t ; t \in [7;2] \end{array} \right| = \int_1^3 t^2 dt + \int_2^7 6t^6 dt + \int_3^1 t^2 dt +$$

$$+ \int_7^2 6t^6 dt = \left[\frac{t^3}{3} \right]_1^3 + \left[\frac{6t^7}{7} \right]_2^7 + \left[\frac{t^3}{3} \right]_3^1 + \left[\frac{6t^7}{7} \right]_7^2 = \underline{\underline{0}}$$

TO ŽE JE TO NULA JE ZÁSLUHA KŘIVKY NEBO POLE?

UDĚLÁME ROTACI POLE $\vec{F}$. : $\underbrace{\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}}_{\text{ANO}} ; \underbrace{\frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z}}_{\text{NE}} ; \underbrace{\frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}}_{\text{NE}}$

MUSÍ PLATIT VŠECHNY 3 ;

ABY BYLO POLE KONZERVATIVNÍ,

NEPLATÍ POLE TEDY NENÍ KONZERVATIVNÍ.

b) POMOCÍ STOKESOVY VĚTY

$$\iint \text{rot}\vec{F} d\vec{S} \overset{\text{ROVINNÝ PROBLÉM } (x;y)}{=} \iint (\text{rot} F)_z \, dx dy = \iint \underbrace{\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right)}_{0} dx dy = \underline{\underline{0}}$$

7.) APLIKACE INTEGRÁLNÍCH VĚT V MECHANICE KONTINUA

KONTINUUM - FYZIKÁLNÍ MODEL (NĚKDY SE HODÍ, JINDY ZASE NE), V TOMTO MODELU UVAŽUJEME O HMOTNÝCH ELEMENTECH V KAŽDÉM BODĚ KONTINUA HMOTNÉMU BODU PŘIŘAZUJEME INFORMACI O ROZLOŽENÍ HMOTNOSTI A INFORMACI O OKAMŽITÉ RYCHLOSTI :

$$dm(x;y;z;t) = \rho(x;y;z;t) dV$$

$$\vec{v}(\vec{r};t) = \vec{v}(x;y;z;t)$$

ROZLOŽENÍ HMOTNOSTI CHARAKTERIZUJE $\rho(x;y;z;t)$

O ρ BUDEME UVAŽOVAT ŽE JE SPOJITÁ. BUDEME UVAŽOVAT UZAVŘENÝ OBJEM KONTINUA, OHRANIČENÝ UZAVŘENOU PLOCHOU $\underline{S}$ (ORIENTOVANÝ VNĚJŠÍ NORMÁLOU).

ROVNICE KONTINUITY

1) BUDEME ZKOUMAT HMOTNOST, KTERÁ ZA JEDNOTKU ČASU VYTEČE UZAVŘENOU PLOCHOU $\underline{S}$.:

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \oiint_S \rho\cdot\vec{v}\,d\vec{S}$$

JAK NA TOTO DOJÍT?

KAPALINA PROUDÍ POTRUBÍM RYCHLOSTÍ $\underline{v}$. V OKAMŽIKU $t+\Delta t$ BUDE KAPALINA O KOUSEK DÁL.

OBJEM KAPALINY KTERÁ PROTEČE TÍMTO PRŮŘEZEM $\underline{S}$ ZA DOBU $\underline{\Delta t}$ JE ROVEN: $\Delta V = S\cdot\Delta t\cdot v$

HMOTNOST KAPALINY (ZA Δt) $\Delta m = \rho\cdot\Delta V = \rho\cdot S\cdot\Delta t\cdot v \Rightarrow \frac{\partial m}{\partial t} = \rho\cdot S\cdot v$

JE TO ZJEDNODUŠENÝ MODEL, PŘEDPOKLÁDALI JSME, ŽE MÁME ROVINNÝ PRŮŘEZ A ŽE RYCHLOST KAPALINY JE VE VŠECH MÍSTECH PRŮŘEZU STEJNÁ.

2) MŮŽEME MLUVIT O ČASOVÉM ÚBYTKU HMOTNOSTI V OBJEMU $\underline{V}$

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \underbrace{-}_{\text{ÚBYTEK PROTO MINUS}}\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\iiint_V \rho\cdot dV}_{\text{HMOTNOST OBSAŽENÁ V OBJEMU}}$$

TEĎ 1) & 2) SPOJÍME DOHROMADY.

$$\oiint \rho\cdot\vec{v}\,d\vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho\cdot dV$$

$$\underbrace{\oiint \rho\cdot\vec{v}\,d\vec{S}}_{\text{POUŽIJI G-O VĚTU}} + \frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\iiint_V \rho\, dV}_{\text{NACPU DOVNITŘ}} = 0$$

24)

POZN.

GAUSSOVA - OSTROGRADSKÉHO VĚTA

$$\oiint \rho \cdot \vec{v}\, d\vec{S} = \iiint_V \mathrm{div}\,(\rho \cdot \vec{v})\, dV$$

$$\iiint_V \mathrm{div}\,(\rho \cdot \vec{v})\, dV + \iiint_V \frac{\partial}{\partial t} \rho\, dV = 0 \qquad \text{(SLOUČÍME)}$$

$$\boxed{\iiint_V \left(\mathrm{div}\,(\rho \cdot \vec{v}) + \frac{\partial}{\partial t} \rho \right) dV = 0}$$

TOTO JE ROVNICE KONTINUITY V INTEGRÁLNÍM TVARU

OBJEM JSME ZVOLILI LIBOVOLNĚ, INTEGROVANÁ FUNKCE V ZÁVORCE MUSÍ BÝT ROVNA NULE:

$$\boxed{\mathrm{div}\,(\rho \cdot \vec{v}) + \frac{\partial}{\partial t} \rho = 0}$$

TOTO JE ROVNICE KONTINUITY V DIFERENCIÁLNÍM TVARU

DIFERENCIÁLNÍ TVAR SE HODÍ V ELEKTŘINĚ A MAGNETIZMU, KDE MÁME KONTINUUM TVOŘENÉ PROUDÍCÍMI NÁBOJI:

HUSTOTA PROUDU: $\vec{j} = \rho \cdot \vec{v}$ — HUSTOTA NÁBOJE (ρ)

$i = \iint \vec{j}\, d\vec{S}$ — PROUD

TOTO DOSADÍME DO DIFERENCIÁLNÍHO TVARU ROVNICE KONTINUITY:

$$\boxed{\mathrm{div}\,\vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} \rho = 0}$$ VHODNÉ PRO ELMAG.

JINÝ TVAR ROVNICE KONTINUITY

VĚTA O DERIVACI SOUČINU FCÍ

$\rho(x;y;z;t)$
$v(x;y;z;t)$

a)
$$\mathrm{div}\,(\rho \cdot \vec{v}) = \frac{\partial(\rho \cdot v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot v_z)}{\partial z} = \frac{\partial \rho}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} \rho + \frac{\partial \rho}{\partial y} v_y +$$

$$+ \frac{\partial v_y}{\partial y} \rho + \frac{\partial \rho}{\partial z} v_z + \frac{\partial v_z}{\partial z} \rho = \rho \cdot \underbrace{\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)}_{\mathrm{div}\,\vec{v}} + \frac{\partial \rho}{\partial x} v_x +$$

$$+ \frac{\partial \rho}{\partial y} v_y + \frac{\partial \rho}{\partial z} v_z = *$$

$\vec{v} \cdot \mathrm{grad}\,\rho$

$$* = \rho \cdot \mathrm{div}\,\vec{v} + \vec{v} \cdot \mathrm{grad}\,\rho$$

grad ρ

b) $\frac{d}{dt}\rho$: DERIVACE SLOŽENÉ FUNKCE VÍCE PROMĚNNÝCH $= \frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial\rho}{\partial t} =$

$\vec{v}$

MENŠÍ ZMĚNA, BUDEME POČÍTAT TOTÁLNÍ DERIVACI ρ.
FUNKCE $\rho(x(t); y(t); z(t); t)$

$$= \vec{v}\cdot \mathrm{grad}\,\rho + \frac{\partial\rho}{\partial t}$$

$$\frac{d}{dt}\rho = \vec{v}\cdot \mathrm{grad}\,\rho + \frac{\partial\rho}{\partial t}$$

$$\frac{d}{dt}\rho - \vec{v}\cdot \mathrm{grad}\,\rho = \frac{\partial\rho}{\partial t}$$

SPOJÍM a) i b) DOHROMADY A DOSTANU

$$\rho\cdot \mathrm{div}\,\vec{v} + \cancel{\vec{v}\,\mathrm{grad}\,\rho} + \frac{d}{dt}\rho - \cancel{\vec{v}\cdot\mathrm{grad}\,\rho} = 0$$

$$\boxed{\rho\cdot \mathrm{div}\,\vec{v} + \frac{d}{dt}\rho = 0}$$

VHODNÉ PRO PROUDĚNÍ KAPALINY.

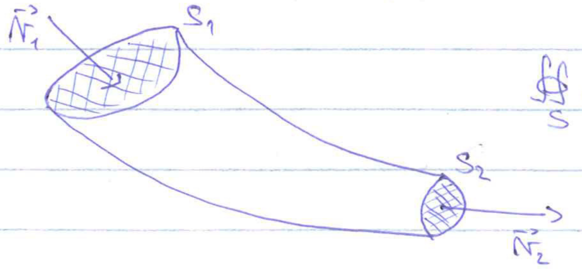
APLIKACE ZELENÉ ROVNICE: PROUDĚNÍ NESTLAČITELNÉ KAPALINY ρ=konst.

PRO KONSTANTNÍ HUSTOTU $\frac{d\rho}{dt} = 0$ Z ROVNICE KONTINUITY

MI PAK ZŮSTANE $\rho\cdot\mathrm{div}\,\vec{v} = 0$, KDE $\mathrm{div}\,\vec{v}$ JE ROVNA NULE (ρ=konst).
TOK VEKTOROVÉHO POLE RYCHLOSTI $\vec{v}$ NĚJAKOU UZAVŘENOU PLOCHOU:

$$\oint\!\!\oint_S \vec{v}\, d\vec{S} \overset{\text{GAUSS-OSTRO VĚTA}}{=} \iiint_V \underbrace{\mathrm{div}\,\vec{v}}_{0}\, dV = 0$$

LEVOU STRANU TROCHU ROZEPÍŠEME PRO PŘÍPAD PROUDĚNÍ IDEÁLNÍ KAPALINY V PROUDOVÉM VLÁKNĚ, BUDEME PŘEDPOKLÁDAT, ŽE RYCHLOST JE V KAŽDÉM MÍSTĚ PRŮŘEZU S_1 STEJNÁ.



$$\oint\!\!\oint_S \vec{v}\, d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{v}\, d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{v}\, d\vec{S} + \underbrace{\iint_{\text{PLÁŠŤ}} \vec{v}\, d\vec{S}}_{0} = 0$$

PŘES PLÁŠŤ NETEČE NIC

25.)

ZŮSTANE NÁM:

$$\iint_{S_1} \vec{r}\, d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{r}\, d\vec{S} = 0$$

$$r_1 S_1 + r_2 S_2 = 0 \Rightarrow r_1 S_1 = r_2 S_2$$

8.) APLIKACE INTEGRÁLNÍCH VĚT V ELEKTŘINĚ A MAGNETIZMU, MAXWELLOVY ROVNICE

1) ELEKTROSTATICKÉ POLE - GAUSSOVA VĚTA ELEKTROSTATIKY

NÁBOJ (DÁ SE SPOČÍTAT POMOCÍ OBJEMOVÉHO INTEGRÁLU)

$$\oiint_S \vec{E}\, d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon} = \iiint_V \frac{\rho}{\varepsilon}\, dV$$ ρ ... HUSTOTA NÁBOJE Q

ε ... PERMITIVITA PROSTŘEDÍ

Z COULOMBOVA ZÁKONA VÍME, ŽE ZNÁME-LI ROZLOŽENÍ HUSTOTY NÁBOJE ρ TAK DOKÁŽEME SPOČÍTAT INTENZITU ELEKTROSTATICKÉHO POLE $\vec{E}$. ZE ZNALOSTI $\vec{E}$ DOKÁŽEME VYPOČÍTAT ρ.
NYNÍ POUŽIJEME GAUSSOVU-OSTROGRADSKÉHO VĚTU NA PLOŠNÝ INTEGRÁL VLEVO A DOSTANEME:

$$\iiint_V \mathrm{div}\, \vec{E}\, dV = \iiint_V \rho/\varepsilon\, dV \Rightarrow \iiint_V \underbrace{\left(\mathrm{div}\, \vec{E} - \frac{\rho}{\varepsilon}\right)}_{0} dV = 0$$

PLATÍ PRO LIBOVOLNÝ OBJEM

DIFERENCIÁLNÍ TVAR $\boxed{\mathrm{div}\, \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}}$ INTEGRÁLNÍ TVAR $\boxed{\oiint_S \vec{E}\, d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon}}$

ZOBECNĚNÍ: $\mathrm{div}\, \vec{D} = \frac{\rho_{volný}}{\varepsilon}$ TADY MÁME POUZE VOLNÝ NÁBOJ, PŘEDTÍM JSME PRACOVALI S LIBOVOLNÝM NÁBOJEM (VÁZANÝM/VOLNÝM)

$\vec{D}$ ... VEKTOR ELEKTRICKÉ INDUKCE

2) MAGNETICKÁ INDUKCE

- UKAZUJE SE, ŽE INTEGRÁL

$$\oiint \vec{B}\, d\vec{S} = 0$$

- TENTO INTEGRÁL ZNAMENÁ MIMO JINÉ, ŽE NEEXISTUJE MAGNETICKÝ NÁBOJ, MAGNETICKÉ INDUKČNÍ ČÁRY JSOU UZAVŘENÉ KŘIVKY

POUŽIJEME TEDY GAUSSOVU VĚTU A DOSTANEME:

$$\oiint_S \vec{B}\,d\vec{S} = \iiint_V \underbrace{\operatorname{div}\vec{B}}_{0}\,dV = 0 \Rightarrow \operatorname{div}\vec{B} = 0$$

DIFERENCIÁLNÍ TVAR $\boxed{\operatorname{div}\vec{B} = 0}$ INTEGRÁLNÍ TVAR $\boxed{\oiint \vec{B}\,d\vec{S} = 0}$

3) FARADAYŮV INDUKČNÍ ZÁKON

NAPĚTÍ INDUKOVANÉ $U_{ind} = -\underbrace{\frac{\partial \Phi}{\partial t}}_{\text{ZMĚNA MAGNET. INDUKČNÍHO TOKU}} = \frac{d}{dt}\iint_S \vec{B}\,d\vec{S} = -\iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\,d\vec{S}$

S ČASOVÝM FAKTOREM MŮŽEME VLÉZT ZA INTEGRAČNÍ ZNAK, POKUD JE INTEGROVANÁ PLOCHA KONSTANTNÍ.

INDUKOVANÉ NAPĚTÍ NA KONCÍCH NĚJAKÉHO ZÁVITU JE ROVNO:

$$U_{ind} = \oint E\,d\vec{l}$$

UZAVŘENÁ KŘIVKA

TYTO DVĚ VĚCI SPOJÍME DOHROMADY:

$$-\iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\,d\vec{S} = \oint_C \vec{E}\,d\vec{l}$$

NA LEVÝ KŘIVKOVÝ INTEGRÁL APLIKUJEME STOKESOVU VĚTU:

$$\oint E\,d\vec{l} = \iint \operatorname{rot}\vec{E}\,d\vec{S}$$

TENTO INTEGRÁL PLATÍ PRO VŠECHNY PLOCHY S

$$\iint_S \underbrace{\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \operatorname{rot}\vec{E}\right)}_{0} d\vec{S} = 0$$

DIFERENCIÁLNÍ TVAR $\boxed{\operatorname{rot}\vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0}$ INTEGRÁLNÍ TVAR $\boxed{-\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\,d\vec{S} = \oint_C \vec{E}\,d\vec{l}}$

4) AMPÉRŮV ZÁKON

- Z ELEKTŘINY A MAGNETIZMU SE UKAZUJE, ŽE INTEGRÁL $\vec{H}$ ⟶ MAGNETICKÉ INTENZITY JE ROVEN:

$$\oint \vec{H}\,d\vec{l} = i_{volný}$$

UZAVŘENÁ KŘIVKA

VOLNÝ PROUD

VOLNÝ PROUD PROTÉKÁ PLOCHOU, ~~KŘIVKOU~~ KTERÁ JE OMEZENÁ KŘIVKOU.

$$i_{volný} = \iint_S \vec{j}\, d\vec{S}$$

↑ HUSTOTA PROUDU

OBĚ INFORMACE OPĚT SLOUČÍME DOHROMADY:

$$\oint_C \vec{H} d\vec{l} = \iint_S \vec{j}\, d\vec{S} \qquad \oint_C \vec{H} d\vec{l} = \iint_S \mathrm{rot}\,\vec{H}\, d\vec{S}$$

A NA INTEGRÁL NA PRAVÉ STRANĚ POUŽIJEME STOKESOVU VĚTU

OPĚT PLATÍ PRO JAKÉKOLIV POLE S

$$\iint_S \underbrace{(-\vec{j} + \mathrm{rot}\,\vec{H})}_{0} d\vec{S} = 0$$

DIFERENCIÁLNÍ TVAR $\boxed{-\vec{j} + \mathrm{rot}\,\vec{H} = 0}$ INTEGRÁLNÍ TVAR $\boxed{\oint_C \vec{H} d\vec{l} = \iint_S \vec{j}\, d\vec{S}}$

NA OBĚ STRANY ROVNICE V DIFERENCIÁLNÍM TVARU APLIKUJEME OPERÁTOR DIVERGENCE.

$$\underbrace{\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\vec{H}}_{0} = \underbrace{\mathrm{div}\,\vec{j}}$$

TOHLE BY MĚLA BÝT TAKY NULA, ALE NENÍ JE TO ROVNO $-\frac{\partial \rho}{\partial t}$ Z ROVNICE KONTINUITY.

NAD TÍMTO PROBLÉMEM SE ZAMYSLEL MAXWELL, KTERÝ POSTULOVAL TAK ZVANÝ "POSUVNÝ PROUD".

j ... CELKOVÁ HUSTOTA PROUDU

$$\boxed{\vec{j} = \vec{j}_K + \vec{j}_P}$$

HUSTOTA

$\vec{j}_K$ - KONVENČNÍHO PROUDU (PŘENOS NÁBOJE) (POHYB NÁBOJE) (VOLNÉ NOSIČE NÁBOJE)

$\vec{j}_P$ - POSUVNÝ PROUD (SOUVISÍ S POLARIZACÍ DIELEKTRIKA A NEUSTÁLÝM PŘEPÓLOVÁVÁNÍM.

$$\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\vec{H} = \mathrm{div}\,\vec{j}$$

$$0 = \underbrace{\mathrm{div}\,\vec{j}_K}_{-\frac{\partial \rho_{volný}}{\partial t}} + \mathrm{div}\,\vec{j}_P$$

$$0 = \underbrace{-\frac{\partial \rho_{volný}}{\partial t}}_{\text{DOSADÍM Z 1. MAXWELLOVY ROVNICE}} + \mathrm{div}\,\vec{j}_P = -\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\,\vec{D} + \mathrm{div}\,\vec{j}_P$$

$$0 = -\operatorname{div}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j}_P = +\operatorname{div}\Big(\underbrace{\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}_P}_{0}\Big)$$

$$\boxed{\vec{j}_P = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}$$ TAKTO JE DEFINOVÁN POSUVNÝ PROUD

$\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{j}$ $\vec{H}$ ... VEKTOR MAGNETICKÉ INTENZITY

$\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{j}_k + \vec{j}_P$

DIFEREN. TVAR $\boxed{\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{j}_k + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}$ INTEGRÁLNÍ TVAR $\boxed{\oint_C \vec{H}\,d\vec{l} = \iint_S \vec{j}\,d\vec{S}}$

9) ŘADY FUNKCÍ: TAYLOROVA ŘADA, APLIKACE

OBECNÝ ZÁPIS

BUDEME MÍT FUNKCI f Z $\mathbb{R}^n$ DO $\mathbb{R}^m$ A JE TO TAKOVÁ FUNKCE ŽE $f(x^1; x^2; \dots x^n) = (f^1(x^1; \dots x^n); f^2(x^1; \dots x^n); \dots f^m$

$$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad f(x^1; x^2; \dots x^n) = (f^1(\underbrace{x^1; \dots x^n}); f^2(\underbrace{x^1; \dots x^n}); \dots f^m(\underbrace{x^1; \dots x^n}_{\text{SLOŽKY FUNKCE}}))$$

POLÁRNÍ SOUŘADNICE

$$f(r;\varphi) = (\underbrace{x(r;\varphi)}_{f^1}; \underbrace{y(r;\varphi)}_{f^2}) = (\underbrace{r\cos\varphi}_{x(r;\varphi)}; \underbrace{r\sin\varphi}_{y(r;\varphi)})$$

DEFINICE: ŘEKNEME, ŽE FUNKCE f JE V NĚJAKÉM BODĚ $(a^1; \dots; a^n) = a \in \mathbb{R}^n$ DIFERENCOVATELNÁ JESTLIŽE EXISTUJE LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ λ Z $\mathbb{R}^n$ DO $\mathbb{R}^m$ TAK ŽE LIMITA $h \to 0$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{|f(a+h) - f(a) - \lambda(h)|}{|h|} = 0$$

f V $(a^1; a^2; \dots a^n) = a \in \mathbb{R}^n$ JESTLIŽE EXISTUJE $\lambda: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

27

$h \to 0$ ZNAMENÁ ŽE VŠECHNY h^i JDOU K NULE.
ZOBRAZENÍ λ SE DÁ ODVODIT, ŽE JE SLOŽENO:

$$\lambda(h) = (h^1; \dots h^n) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \frac{\partial f^2}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial f^m}{\partial x^1} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f^1}{\partial x^n} & \frac{\partial f^2}{\partial x^n} & \dots & \frac{\partial f^m}{\partial x^n} \end{pmatrix}$$

1) DIFERENCIÁL PRO FUNKCI 1 REÁLNÉ PROMĚNNÉ:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x+h) \doteq f(x) + \underbrace{f'(x) \cdot h}_{\text{DIFERENCIÁL}}$$

(DIFERENCIÁL)

MŮŽEME TO VIDĚT V RŮZNÝCH OBMĚNNÁCH, NAPŘÍKLAD:

$$\underbrace{f(x+h) - f(x)}_{df(x)} \doteq f(x) \cdot h \implies \Delta f(x) \doteq f'(x) \cdot \Delta x$$

$$df(x) = f'(x) dx$$

d ZNAČÍME OO MALÉ ZMĚNY VELIČIN

2) DIFERENCIÁL PRO SKALÁRNÍ FUNKCI VÍCE PROMĚNNÝCH:

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$f(x+h) \doteq f(x) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_1} h^1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} h^2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}\Big|_x \cdot h^m}_{\text{DIFERENCIÁL}}$$

MYSLÍ SE $x = (x^1; \dots; x^n)$

MYSLÍ SE $h = (h^1; \dots; h^n)$

$$f(x+h) - f(x) \doteq \frac{\partial f}{\partial x^1} h^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2} h^2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^m} h^m$$

$$\Delta f(x) \doteq \frac{\partial f}{\partial x^1} \Delta x^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2} \Delta x^2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^m} \Delta x^m$$

$$df(x) = \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2} dx^2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^n} dx^n$$

$$f(x+h) - f(x) \doteq \lambda(h) = \underbrace{(h^1 \dots h^n) \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial f^n}{\partial x^1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f^1}{\partial x^n} & & \frac{\partial f^n}{\partial x^n} \end{pmatrix}}_{\text{DIFERENCIÁL}}$$

NYNÍ MÁME DOKÁZAT:

$$(1+x)^n \doteq 1 + n \cdot x \qquad |x| \ll 1$$

PŮJDEME NA TO PŘES DIFERENCIÁLY:

$$f(a+h) \doteq f(a) + f'(a) \cdot h$$

V NAŠEM PŘÍPADĚ BUDE FUNKCE $f(x) = (1+x)^n$

$a = 1$; $h = x$

BOD VE KTERÉM URČUJEME FUNKČNÍ HODNOTU JE $\underline{a}$, $\underline{h}$ JE PARAMETR, KTERÝ PŘIČÍTÁME K FUNKČNÍ HODNOTĚ

$$f'(x) = n \cdot (1+x)^{n-1}$$

$$f(a+h) = f(x) = (1+x)^n \doteq 1 + n \cdot x$$

$$f(a) = (1+0)^n = 1$$

$$f'(a) = f'(0) = n \cdot (1+0)^{n-1} = n$$

$$f(a) + f'(a) \cdot h = \underline{1 + n \cdot h} = f(a+h)$$ TAKŽE JSME TO DOKÁZALI

<u>PŘÍKLAD</u>: <u>UŽITÍM OBECNÉHO RELATIVISTICKÉHO VZORCE ODVOĎTE VZTAH PRO KINETICKOU ENERGII "KLASICKÉ ČÁSTICE".</u>

$$\underbrace{E}_{\text{KINETICKÁ ENERGIE}} = \underbrace{E_c}_{\text{CELKOVÁ RELATIVISTICKÁ ENERGIE}} - \underbrace{E_0}_{\text{KLIDOVÁ RELATIVISTICKÁ ENERGIE}} = \overset{\text{RELATIVISTICKÁ HMOTNOST}}{m}c^2 - m_0c^2 = \frac{m_0 \cdot c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_0c^2 = \underbrace{m_0 \cdot c^2\left[\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} - 1\right]}_{\text{PLATÍ OBECNĚ}} \overset{v \ll c}{\doteq} *$$

↑ PŘEDPOKLAD PRO KLASICKOU FYZIKU

RELATIVISTICKOU HMOTNOST SPOČÍTÁM TAKTO $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

* POUŽIJU VZTAH $(1+x)^n \doteq 1 + n \cdot x$ $= m_0c^2 \cdot \left[1 + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{v^2}{c^2}\right) - 1\right] = m_0 \cancel{c^2} \cdot \left(\frac{1}{2}\frac{v^2}{\cancel{c^2}}\right) =$

$$\underline{\underline{= \frac{1}{2} m v^2}}$$

VZOREC $f(a+h) \doteq f(a) + f'(a) \cdot h$ LZE PŘEPSAT $f(a+h) - f(a) \doteq \underbrace{f'(a) \cdot h}_{\text{TOMUTO SE ŘÍKÁ DIFERENCIÁL FUNKCE}} + ?$

OTÁZKOU ALE JE, JAK MOC PLATÍ ZNAMÉNKO $\doteq$ PŘIBLIŽNOST, 28,

A JESTLI ZA $f'(a)\cdot h$ NEJSOU JEŠTĚ DALŠÍ ČLENY.
DO ? SE SCHOVAJÍ DALŠÍ ČLENY, KTERÉ POVEDOU K ~~PŘESNĚJ~~Í PŘESNĚJŠÍ NÁHRADĚ, NEBO CHYBA, JÍŽ SE NÁHRADOU DOPUSTÍME (OTÁZKOU JE JAK TY DALŠÍ ČLENY VYPADAJÍ, NEBO JAK VYPADÁ TA CHYBA).
NA OBĚ OTÁZKY ODPOVÍ TAYLOROVA VĚTA.

TAYLOROVA VĚTA PRO FUNKCE 1 REÁLNÉ PROMĚNNÉ

- NECHŤ MÁ NĚJAKÁ FUNKCE f V NĚJAKÉM BODĚ a A JEHO OKOLÍ SPOJITÉ DERIVACE AŽ DO ŘÁDU $n+1$ VČETNĚ! POTOM PRO VŠECHNA x Z TOHOTO OKOLÍ PLATÍ:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\underbrace{R_{n+1}(x)}_{\text{CHYBA JÍŽ SE DOPUSTÍME}}$$

MŮŽEME TO NĚKDE USEKNOUT, ALE MÍSTO = TAM BUDE ≐
CHYBU $R_{n+1}(x)$ NELZE PŘESNĚ STANOVIT ALE DÁ SE ODHADNOUT.
NEJČASTĚJI SE UDÁVÁ V LAGRANGEOVĚ TVARU:

$$R_{n+1}(x)=\frac{\overset{\text{DERIVACE}}{f^{(n+1)}}(c)}{(n+1)}(x-a)^{n+1}$$

C - JE BOD, KTERÝ LEŽÍ V INTERVALU a AŽ x $c\in(a;x)$

POZNÁMKY K TERMINOLOGII

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots\ \infty$$

TOMUTO ZÁPISU SE ŘÍKÁ TAYLOROVA ŘADA (ROZVOJ) FUNKCE f V BODĚ $x=a$, POKUD $a=0$, TEDY $x=0$ PAK SE TOMU ŘÍKÁ MACLAURINOVA ŘADA.

TEĎ KDYŽ TO V NĚJAKÉM KONKRÉTNÍM BODĚ USEKNEME ... ≐

$$f(x)\doteq f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

TAKOVÉMU ZÁPISU SE ŘÍKÁ TAYLORŮV POLYNOM STUPNĚ n FUNKCE f V BODĚ a ($a=0$ MACLAURINŮV POLYNOM).

PŘÍKLAD VYPOČTĚTE EULEROVO ČÍSLO e S CHYBOU $< 10^{-3}$

POUŽIJEME TAYLOROVU ŘADU:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots + \frac{f^{n}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}(x)$$

$f(x)$ V NAŠEM PŘÍPADĚ e^x .. $f(x) = e^x$,
$e=?$ (TO CHCEME POČÍTAT), $x=1$, BUDEME POČÍTAT V BODĚ $a=0$

1) KROK NAPÍŠEME TAYLORŮV ROZVOJ $f(x)=e^x$ V BODĚ $a=0$

$$f(x) = 1 + \underset{1}{\overset{e^0}{e^x}} \cdot 1 + \tfrac{1}{2} e^x \cdot 1 + \tfrac{1}{6} \cdot e^x \cdot 1 + \dots = 1 + 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{6} + \dots$$

$$f^{n}(x) = e^x \; ; \; f^{(n)}(0) = 1$$

$$e^x = 1 + 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{24} + \dots + R_{n+1}(x)$$

VÝPOČET CHYBY CHCEME JIMIT MENŠÍ NEŽ 10^{-3}

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \qquad c \in (a;x)$$

$$R_{n+1}(1) = \frac{e^c}{(n+1)!}(1-0)^{n+1} = \frac{e^c}{(n+1)!} \qquad c \in (0;1)$$

JEDNIČKA, PROTOŽE POČÍTÁME PRO $e = e^1$

MOHU DÁT 1 4 NEBO 5 — ZE ZADÁNÍ

$$\frac{e^c}{(n+1)!} \leq \frac{e^1}{(n+1)!} \leq \frac{3}{(n+1)!} < 10^{-3}$$ (HRUBÝ ODHAD)

BUDEME ZKOUŠET DOSAZOVAT ZA n A NAKONEC NÁM VYJDE $n > 6$. POTOM TEDY TEN TAYLOR BUDE VYPADAT TAKTO

$$x=1 \quad e = 1 + \frac{1}{1!} \cdot 1 + \frac{1}{2!} \cdot 1 + \frac{1}{3!} \cdot 1 + \frac{1}{4!} 1 + \frac{1}{5!} 1 + \frac{1}{6!} \cdot 1 + \frac{1}{7!} 1 + \dots$$

29.

PŘÍKLAD | SPOČÍTEJTE NA 4 DESETINNÁ MÍSTA PŘESNĚ $\sin 18°$.

- NEJDŘÍVE MUSÍME PŘEVÉST 18° NA RADIÁNY

$$\frac{\cancel{18}\cdot\pi}{\cancel{180}_{10}} = \frac{\pi}{10} = x \qquad a = 0, \quad f(x) = \sin x$$

└ BLÍZKÝ BOD, VE KTERÉM SE TA FUNKCE DOBŘE POČÍTÁ

$\sin 0 \quad \cos 0 \quad -\sin 0 \quad -\cos 0$

$f(0) = 0;\ f'(0) = 1;\ f''(0) = 0;\ f'''(0) = 1$

$$f(x) = 0 + 1\cdot\left(\frac{\pi}{10}\right)^1 - \overbrace{\cancel{1}}^{1\cdot\frac{1}{3!}}\cdot\left(\frac{\pi}{10}\right)^3 + 1\cdot\left(\frac{\pi}{10}\right)^5\cdot\frac{1}{5!} - \frac{1}{7!}\cdot 1\cdot\left(\frac{\pi}{10}\right)^7 + \frac{1}{9!}\cdot 1\cdot\left(\frac{\pi}{10}\right)^9 + \dots + \frac{x^{(2m-1)}\cdot(-1)^{m-1}}{(2m-1)!}$$

$m=2 \quad m=3 \quad m=4 \quad m=5$

MŮŽE BÝT I MÍNUS ZÁLEŽÍ NA FÁZI

$$R_{m+1}(x) = \left|\frac{\cos c}{(2(m+1)-1)!}\cdot x^{2(m+1)-1}\right| \qquad c \in \left(0; \frac{\pi}{10}\right)$$

PRO JAKÁ m TO PLATÍ

$$\frac{\cos c}{(2m+1)!}\,x^{2m+1} \leq \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} = \frac{\left(\frac{\pi}{10}\right)^{2m+1}}{(2m+1)!} \leq 10^{-5}$$

MOHU OMEZIT ZHORA ČÍSLEM 10^5

$$m \geq 3$$

$$\sin\frac{\pi}{10} \doteq \frac{\pi}{10} - \left(\frac{\pi}{10}\right)^3\cdot\frac{1}{3!} + \left(\frac{\pi}{10}\right)^5\cdot\frac{1}{5!} \qquad \text{(VÝSLEDEK)}$$

TAYLOROVA VĚTA PRO FUNKCE DVOU PROMĚNNÝCH

SKRAHOVÁNÍ PRO 2 PROM. LEŽÍCÍ

- NECHŤ MÁ FUNKCE $f(x^1; x^2) \in \mathbb{R}$ V BODĚ $a = (a^1; a^2)$ A NĚJAKÉM JEHO OKOLÍ SPOJITÉ PARCIÁLNÍ DERIVACE AŽ DO ŘÁDU $n+1$ VČETNĚ. POTOM PRO VŠECHNA x Z TOHOTO OKOLÍ PLATÍ:

$$f(x^1; x^2) = f(a^1; a^2) + \frac{f'_{x^1}(a^1; a^2)}{1!}(x^1 - a^1) + \frac{f'_{x^2}(a^1; a^2)}{1!}(x^2 - a^2) +$$

$$+ \frac{1}{2!}\left[f''_{x^1x^1}(a^1; a^2)\cdot(x^1 - a^1)^2 + 2\cdot f''_{x^1x^2}(a^1; a^2)\cdot(x^1 - a^1)\cdot(x^2 - a^2) + f''_{x^2x^2}(a^1; a^2)\cdot(x^2 - a^2)^2\right] +$$

$$+ \dots + R_{m+1}(x^1; x^2)$$

ZBYTEK OPĚT V LAGRANGEOVĚ TVARU

$$R_{m+1}(x^1; x^2) = \frac{1}{(m+1)!}\left[(x^1 - a^1)\frac{\partial}{\partial x^1} + (x^2 - a^2)\frac{\partial}{\partial x^2}\right]^{m+1}\cdot \underbrace{f(c^1; c^2)}_{\text{FUNKCE VYJÁDŘENÁ V BODECH } c^1; c^2}$$

$a^1 < c^1 < x^1$

$a^2 < c^2 < x^2$

PŘÍKLAD: POMOCÍ TAYLOROVA POLYNOMU 2. STUPNĚ MÁME PŘIBLIŽNĚ VYPOČÍTAT $\sqrt{(1{,}98)^2+(3{,}01)^2}$

- ZÁKLADEM JE, ROZEBRAT SI CO JE x A y $(a_x; a_y)$, DÁT SI PŘEDPIS PRO FUNKCI, POJMENOVAT SI CO JE a_1 A a_2 (TO JSOU BODY VE KTERÝCH POČÍTÁME).

$a_x = 2$

$f(x;y) = \sqrt{x^2+y^2}$

$a_y = 3$

$f(a_x; a_y) = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$

MUSÍME PROPOČÍTAT JEDNOTLIVÉ DERIVACE:

$$f'_x(a_x;a_y) = \frac{1}{2}\underbrace{(x^2+y^2)^{-1/2}\cdot 2x}_{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

$$f'_y(a_x;a_y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

$x - a_x = -0{,}02$

$y - a_y = 0{,}01$

$$f''_{xx}(a_x,a_y) = \frac{\partial x\cdot(x^2+y^2)^{-1/2}}{\partial x} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\frac{\partial}{\partial x} = \frac{(x^2+y^2)^{1/2} - x\cdot(x\cdot(x^2+y^2)^{-1/2})}{(x^2+y^2)} =$$

$$= \frac{\sqrt{13} - 2\cdot(2\cdot\frac{1}{\sqrt{13}})}{13} = \frac{\sqrt{13}-\frac{4}{\sqrt{13}}}{13}$$ DOSADÍM ZA x & y

PŘÍKLAD: NECHŤ $f(x)$ JE POLYNOM 4. STUPNĚ, VÍME O NĚM, ŽE $f(2)=-1$; $f'(2)=0$; $f''(2)=2$; $f'''(2)=-12$; $f''''(2)=24$ A MÁME URČIT $f(-1)$; $f'(0)$; $f''(1)$.

1) ZPŮSOB: NAPÍŠEME SI OBECNÝ POLYNOM 4. STUPNĚ.

$$f(x) = ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$$

2) ZPŮSOB: $$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \frac{f''''}{4!}(x-a)^4$$

TAYLORŮV POLYNOM m-TÉHO STUPNĚ PRO POLYNOM STUPNĚ m JE TEN POLYNOM SAMOTNÝ.

30.)

$$f(x) = \underset{f(2)}{-1} + \underset{\frac{f'(2)}{1!}}{0} + \underset{\frac{f''(2)}{2!}}{\frac{2}{2}}(x-2)^2 + \frac{-12}{6}(x-2)^3 + \frac{24}{24}(x-2)^4$$

$$\boxed{f(x) = -1 + (x-2)^2 - 2(x-2)^3 + (x-2)^4}$$ TOTO JE TEN HLEDANÝ POLYNOM

$$f(-1) = -1 + (-1-2)^2 - 2(-1-2)^3 + (-1-2)^4 = -1 + 9 + 54 + 81 = \underline{\underline{143}}$$

DERIVUJI POLYNOM

$$f'(x) = 2\cdot(x-2) - 3(x-2)^2 + 4(x-2)^3$$

⇓ DOSADÍM

$$f'(0) = -4 - 12 - 32 = \underline{\underline{-48}}$$

OPĚT DERIVACE POLYNOMU

$$f''(x) = 2 - 6(x-2) + 12(x-2)^2$$

⇓ DOSADÍM

$$f''(1) = 2 + 6 + 12 = \underline{\underline{20}}$$

BONUSOVÁ KAPITOLA: KOMPLEXNÍ ČÍSLA

- ZAVÁDĚJÍ SE KVANTOVKA, ODMOCŇOVÁNÍ ZÁPORNÝCH ČÍSEL

UZAVŘENOST MNOŽINY M VZHLEDEM K OPERACI ⊛

- ZNAMENÁ TO, ŽE KDYŽ VEZMU LIBOVOLNÉ DVA PRVKY Z MNOŽINY APLIKUJI NA NĚ OPERACI ⊛ TAK DOSTANU TŘETÍ PRVEK, KTERÝ TAKY PATŘÍ DO MNOŽINY M.

$$a \circledast b \in M \quad \text{PRO } \forall\, a, b \in M$$

MNOŽINA PŘIROZENÝCH ČÍSEL "ℕ" - NENÍ UZAVŘENÁ ~~K~~ VZHLEDEM K OPERACI "−".

MNOŽINA CELÝCH ČÍSEL "ℤ" - NENÍ UZAVŘENÁ VZHLEDEM K OPERACI ":".

MNOŽINA REÁLNÝCH ČÍSEL "ℝ" - NENÍ UZAVŘENÁ VZHLEDEM K OPERACI "$\sqrt{\ }$"

POZN.: CARDANOVY VZORCE – HODÍ SE PRO NALEZENÍ KOŘENŮ KUBICKÝCH ROVNIC. OBČAS TAM MŮŽE BÝT $\sqrt{-1}$, KOŘENY ALE MOHOU BÝT REÁLNÉ.

ZAVEDENÍ KOMPLEXNÍCH ČÍSEL A OPERACÍ NAD NIMI

DEFINICE: MNOŽINU USPOŘÁDANÝCH DVOJIC $[x;y] \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ NAZVEME MNOŽINOU KOMPLEXNÍCH ČÍSEL A ZNAČÍME $\mathbb{C}$.

NADEFINUJEME SI SČÍTÁNÍ A NÁSOBENÍ KOMPLEXNÍCH ČÍSEL.

SČÍTÁNÍ: $[x_1;y_1]+[x_2;y_2] \overset{\text{DEFINICE}}{=} [x_1+x_2;y_1+y_2]$

NÁSOBENÍ: $[x_1;y_1]\cdot[x_2;y_2] \underset{\text{DEFINICE}}{=} [x_1\cdot x_2 - y_1y_2; x_1y_2+x_2y_1]$

DŮLEŽITÁ KOMPLEXNÍ ČÍSLA (VIP)

- $[0;0]=0$ PLATÍ: $0+\overset{\text{LIBOVOLNÉ KOMPLEXNÍ ČÍSLO}}{z}=z+0=z$ PRO $\forall\, z=[x;y]\in\mathbb{C}$
- $[1;0]=1$ PLATÍ: $1\cdot z=z\cdot 1=z$ PRO $\forall\, z=[x;y]\in\mathbb{C}$
- $[0;1]=i$ PLATÍ: $i^2=[0;1]\cdot[0;1]=[-1;0]=-1$
- $[a;0]=a$ PLATÍ: $a+b=[a;0]+[b;0]=[a+b;0]$
  $a\cdot b=[a;0]\cdot[b;0]=[a\cdot b;0]$

OPAČNÝM PRVKEM K $z=[x;y]$ JE PRVEK $-z=[-x;-y]$

INVERZNÍM PRVKEM K $z=[x;y]\neq 0$ JE PRVEK $z^{-1}=\left[\frac{x}{x^2+y^2};\frac{y}{x^2+y^2}\right]$

31)

ZÁPIS KOMPLEXNÍCH ČÍSEL V ALGEBRAICKÉM TVARU:

$$z=[x;y]=[x;0]+[0;y]=\underbrace{[x;0]}_{x}+\underbrace{[0;1]}_{i}\cdot\underbrace{[y;0]}_{y}=x+iy$$

KOMPLEXNÍ (IMAGINÁRNÍ) JEDNOTKA

x ... REÁLNÁ ČÁST KOMPLEXNÍHO ČÍSLA z

y ... IMAGINÁRNÍ ——— " ———

i ... KOMPLEXNÍ JEDNOTKA

SEČÍTÁNÍ A NÁSOBENÍ KOMPLEX. ČÍSEL V ALGEBRAICKÉM TVARU

$$z_1+z_2=(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)=[\overbrace{x_1+x_2}^{\text{REÁLNÁ}};\overbrace{y_1+y_2}^{\text{IMAGINÁRNÍ}}]$$

$$z_1\cdot z_2=(x_1+iy_1)\cdot(x_2+iy_2)=x_1x_2+ix_2y_1+ix_1y_2+\underbrace{i^2}_{-1}y_1\cdot y_2=$$

$$=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_2y_1+x_1y_2)=[x_1x_2-y_1y_2;x_2y_1+x_1y_2]$$

$i^1=i;\ i^2=-1;\ i^3=-i;\ i^4=1;\ i^5=i\ .....$

$$\frac{z_1}{z_2}=\underbrace{\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}\cdot\frac{x_2-iy_2}{x_2-iy_2}}_{\text{TAKTO PŘEVEDU DO ALGEBRAICKÉHO TVARU}}=\frac{x_1x_2-ix_1y_2+ix_2y_1-i^2y_1y_2}{(x_2+iy_2)\cdot(x_2-iy_2)}=$$

$$=\frac{x_1x_2+y_1y_2+i(x_2y_1-x_1y_2)}{x_2^2-i\cancel{x_2y_2}+i\cancel{x_2y_2}-i^2y_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+i(x_2y_1-x_1y_2)}{x_2^2+y_2^2}$$

$\mathrm{Re}\,\frac{z_1}{z_2}$ $\quad$ $\mathrm{Im}\,\frac{z_1}{z_2}$

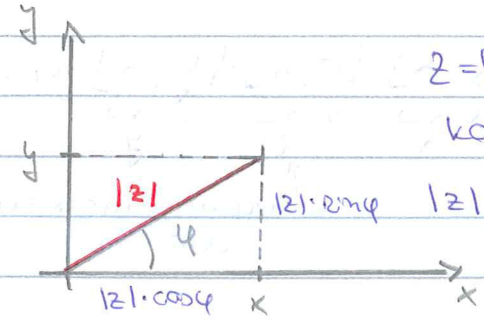
MÁME TAK CELÝ ZLOMEK ROZSEPAROVANÝ NA 2 ČÁSTI.

GONIOMETRICKÝ TVAR KOMPLEXNÍCH ČÍSEL

NA ZAČÁTKU JSME MĚLI KOMPLEXNÍ ČÍSLO $z=[x;y]\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, ŘEKLI JSME ŽE DVOJICE ČÍSEL x & y PATŘÍ DO KARTÉZSKÉHO SOUČINU REÁLNÝCH ČÍSEL.

KAŽDÉ KOMPLEXNÍ ČÍSLO LZE ZNÁZORNIT V ROVNĚ $\mathbb{R}^2$.

$$z = x + iy = |z|\cdot\cos\varphi + i|z|\cdot\sin\varphi = |z|\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$



$O=[0;0]$

$z=[x;y] \neq 0 \Rightarrow$ POUZE TEHDY JE-LI NENULOVÉ KOMPLEXNÍ ČÍSLO, MOHU VYZNAČIT ÚHEL φ.

$|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ (Z PYTHAGOROVY VĚTY), ABSOLUTNÍ HODNOTA KOMPLEXNÍHO ČÍSLA z.
(NĚKDY SE TOMU ŘÍKÁ MODUL KOMPLEX. ČÍSLA z)

$z = |z|\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ TOTO JE TZV. GONIOMETRICKÝ TVAR NENULOVÉHO KOMPLEXNÍHO ČÍSLA z. φ JE HLAVNÍ HODNOTA ARGUMENTU KOMPLEXNÍHO ČÍSLA z.

$\varphi \in [0; 2\pi]$

! NEMUSÍ TO TAKTO DOPADNOUT

DEFINICE: KOMPLEXNĚ SDRUŽENÝM ČÍSLEM K ČÍSLU $z = x + iy$ ROZUMÍME KOMPLEXNÍ ČÍSLO $\bar{z} = z^* = x - iy$.

PRO KOMPLEXNÍ ČÍSLA PLATÍ:

- $z = z^* \iff z \in \mathbb{R}$
- $\overline{z_1 \pm z_2} = z_1^* \pm z_2^*$
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = z_1^* \cdot z_2^*$
- $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = \frac{z_1^*}{z_2^*}$! $z_2 \neq 0$

- $|z|^2 = z\cdot z^* = z\cdot\bar{z}$
- $|z_1+z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ DŮKAZ: MINKOWSKÉHO NEROVNOSTI
- $|z_1\cdot z_2| = |z_1|\cdot|z_2|$

NÁSOBENÍ KOMPLEX ČÍSEL — NÁSOBENÍ REÁLNÝCH ČÍSEL

- $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ PRO $z_2 \neq 0$

BUDEME PŘEDPOKLÁDAT ŽE MÁME DVĚ NENULOVÁ KOMPLEXNÍ ČÍSLA ZAPSANÁ V GONIOMETRICKÉM TVARU.

$z_1 \neq 0$; $z_2 \neq 0$

$$z_1 = |z_1|\cdot(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$$
$$z_2 = |z_2|\cdot(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

$$z_1\cdot z_2 = |z_1|\cdot|z_2|\cdot(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\cdot(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2))$$

32)

MOIVREOVA VĚTA:

$$z = |z| \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi) \quad \ldots \; z \neq 0$$

PLATÍ:

$$z^n = |z|^n \cdot (\cos n\varphi + i \cdot \sin n\varphi) \quad n \in N \text{ (PŘIROZENÉ ČÍSLO)}$$

GONIOMETRICKÝ TVAR KOMPLEXNÍHO ČÍSLA SE HODNĚ HODÍ PRO MOCNINY KOMPLEX. ČÍSEL

DŮKAZ: $|z|^2 = ?$ (LEVÁ STRANA)

Z SI MUSÍME NAPSAT ROZUME A MOŽNÁ ANI NE V GONIOMETRICKÉM TVARU. $z = x + iy$; VÍME $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ ... $|z|^2 = x^2 + y^2$

TAKTO VYJDE LEVÁ STRANA TOHOTO TVRZENÍ.

$z \cdot z^* = ?$ (PRAVÁ STRANA)

$z \cdot z^* = (x+iy)(x-iy) = x^2 - i^2y^2 = x^2 + y^2$ PRAVÁ STRANA TVRZENÍ, OBĚ STRANY SEDÍ TAKŽE POHODA :).

DŮKAZ: $z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$

LEVÁ STRANA: $z_1 \cdot z_2 = \left[|z_1| \cdot (\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1)\right] \cdot \left[|z_2| \cdot (\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2)\right] =$

$= |z_1||z_2| \cdot (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot (\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2) =$

$= |z_1||z_2| \cdot (\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2 \cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 + \underbrace{i^2}_{-1} \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) =$

$= |z_1| \cdot |z_2| \left[\underbrace{(\cos\varphi_2 \cdot \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2)}_{\cos(\varphi_1+\varphi_2)} + i \underbrace{(\sin\varphi_2 \cos\varphi_1 + \sin\varphi_1 \cos\varphi_2)}_{\sin(\varphi_1+\varphi_2)}\right]$

OPĚT SEDÍ S PRAVOU STRANOU :).

ODMOCNINY Z KOMPLEXNÍHO ČÍSLA

- DEFINUJE SE PRO LIBOVOLNÉ KOMPLEXNÍ ČÍSLO I PRO NULU.

DEFINICE: N-TOU ODMOCNINOU Z KOMPLEXNÍHO ČÍSLA z ROZUMÍME VŠECHNA TAKOVÁ KOMPLEXNÍ ČÍSLA a PRO NĚŽ PLATÍ $a^n = z$

PLATÍ $z = 0$ PAK $\sqrt[n]{z} = 0$

$z \neq 0$ PAK $z = |z| \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$ MOHU TOTO NAPSAT

$a = \sqrt[n]{z} \Rightarrow \sqrt[n]{|z|} \cdot \left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)$

k - JE CELÉ ČÍSLO, BĚŽÍ OD NULY DO $n-1$.

$k = 0; 1; \ldots n-1$

N-TÉ ODMOCNINY Z KOMPLEXNÍHO ČÍSLA NENULOVÉHO TVOŘÍ V KOMPLEXNÍ ROVINĚ PRAVIDELNÝ N-ÚHELNÍK.

DŮKAZ: $z = 0$ ... TVRZENÍ ZŘEJMÉ

$z \neq 0$ — $z = |z| \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$

HLEDÁME ČÍSLO a, KTERÉ KDYŽ UMOCNÍME NA N-TOU DOSTANEME ČÍSLO z.

$a = |a| \cdot (\cos\alpha + i\sin\alpha)$ TAK ŽE $a^n = z$

POČÍTÁME $a^n = |a|^n \cdot (\cos n\alpha + i\sin n\alpha) =$

$= z = |z| \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$

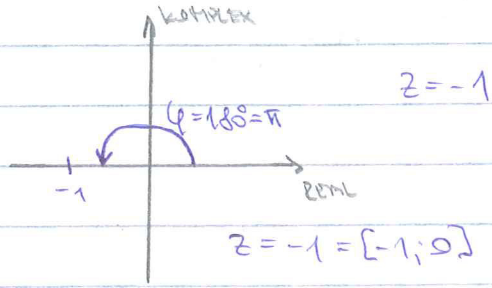
POROVNÁME: $|z| = |a|^n \Rightarrow |a| = \sqrt[n]{|z|}$

$n\alpha = \varphi + 2k\pi \Rightarrow \alpha = \frac{\varphi+2k\pi}{n}$

SPOJÍM DOHROMADY:

$a = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\cdot\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)$

PŘÍKLAD: VYPOČTĚTE $\sqrt{-1}$



$z = -1 = [-1; 0]$

$\sqrt{(1)^2} = 1$

$z = -1 \Rightarrow z = |z| \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi) = 1 \cdot (\cos\pi + i\sin\pi)$

$a = \sqrt[2]{z} = \sqrt[2]{|z|} \cdot \left(\cos\frac{\varphi+2\pi\cdot k}{2} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{2}\right) =$

$= \sqrt{1} \cdot \left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{2} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{2}\right) = \longrightarrow$

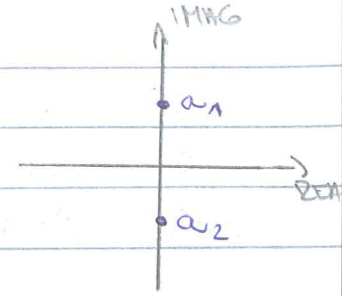
$k = 0; 1$

$n-1 = 1 = 2-1$

33.

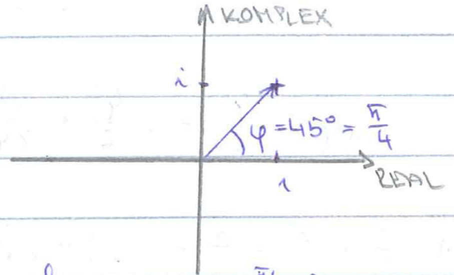
1) $k=0$: $a_1 = \underbrace{\cos\frac{\pi+0}{2}}_{0} + i\underbrace{\sin\frac{\pi+0}{2}}_{1} = \underline{\underline{i}}$

2) $k=1$: $a_2 = \underbrace{\cos\frac{\pi+2\pi}{2}}_{0} + i\underbrace{\sin\frac{\pi+2\pi}{2}}_{-1} = \underline{\underline{-i}}$



PŘÍKLAD: VYPOČÍTEJTE $\sqrt[4]{1+i}$

$z = 1+i = [1;1]$



$|z|$

$z = \sqrt{1+1}\cdot(\cos 45° + i\sin 45°)$

$a = \sqrt[4]{|z|}\cdot\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{4}\right) = \sqrt[8]{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi/4+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi/4+2k\pi}{4}\right) =$

$\Rightarrow \quad k = 0;1;2;3$

$k_1=0 \ldots a_1 = \sqrt[8]{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{16} + i\sin\frac{\pi}{16}\right)$

$k_2=1 \ldots a_2 = \sqrt[8]{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi/4+2\pi}{4} + i\sin\frac{\pi/4+2\pi}{4}\right) = \sqrt[8]{2}\cdot\left(\cos\frac{9}{16}\pi + i\sin\frac{9}{16}\pi\right)$

$k_3=2 \ldots a_3 = \sqrt[8]{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi/4+4\pi}{4} + i\sin\frac{\pi/4+4\pi}{4}\right) = \sqrt[8]{2}\cdot\left(\cos\frac{17}{16}\pi + i\sin\frac{17}{16}\pi\right)$

$k_4=3 \ldots a_4 = \sqrt[8]{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi/4+6\pi}{4} + i\sin\frac{\pi/4\cdot 6\pi}{4}\right) = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{25}{16}\pi + i\sin\frac{25}{16}\pi\right)$

EXPONENCIÁLNÍ TVAR KOMPLEXNÍHO ČÍSLA

- OPĚT BUDEME MÍT KOMPLEXNÍ ČÍSLO V GONIOMETRICKÉM TVARU (VEKTOROVÉ).

$z = |z|\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

- NÁSOBENÍ KOMPLEX. ČÍSEL SČÍTAJÍ / ODEČÍTAJÍ ARGUMENTY:

$z_1\cdot z_2 = |z_1|\cdot|z_2|\cdot(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\cdot(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)) \quad z_2 \neq 0$

- A EXPONENCIÁLNÍ TVAR KOMPLEXNÍHO ČÍSLA VYPADÁ TAKTO $\underline{\underline{z = |z|\cdot e^{i\varphi}}}$

TEĎ ROZEBEREME $e^{i\varphi}$, PŮJDEME NA TO PŘES TAYLORŮV ROZVOJ:

$x \in \mathbb{R}$ $\quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \dots$

DEFINICE: POMOCÍ NEKONEČNÉ ŘADY

$$e^{i\varphi} = 1 + (i\varphi) + \frac{(i\varphi)^2}{2!} + \frac{(i\varphi)^3}{3!} + \frac{(i\varphi)^4}{4!} + \frac{(i\varphi)^5}{5!} + \frac{(i\varphi)^6}{6!} + \frac{(i\varphi)^7}{7!} + \dots =$$

$$= 1 + i\varphi - \frac{\varphi^2}{2} - i\frac{\varphi^3}{6} + \frac{\varphi^4}{24} + \frac{i\varphi^5}{120} - \frac{\varphi^6}{720} - i\frac{\varphi^7}{7!} + \dots =$$

$$= \underbrace{\left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \dots\right)}_{\cos\varphi} + i\underbrace{\left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} + \dots\right)}_{\sin\varphi} = \text{EULEROVA IDENTITA} =$$

TADY JE POTŘEBA STANOVIT PODMÍNKY KONVERGENCE ABYCH TO MOHL PŘEHÁZET

$$= \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi$$

PLATÍ: $z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) = |z_1| \cdot |z_2| \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot \left(\text{———— — ————} \quad '' \quad \text{—} \right) = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

FYZIKA – STŘÍDAVÝ PROUD, KVANTOVÁ MECHANIKA, KMITAVÝ POHYB,

10.) FOURIEROVA ANALÝZA (ŘADA), APLIKACE

- SPOČÍVÁ V TOM, ŽE DOSTANEME PERIODICKÝ SIGNÁL A ÚKOLEM JE HO ROZLOŽIT DO JEDNOTLIVÝCH HARMONICKÝCH SIGNÁLŮ VYBRANÝCH FREKVENCÍ. VYTÁHNE JAK MOC JSOU DANÉ FREKVENCE V TOMTO SIGNÁLU SILNÉ.
- PERIODICKÉ DĚJE (VE FYZICE) – KYVADLO (KMITAVÉ POHYBY), USPOŘÁDÁNÍ ATOMŮ V KRYSTALICKÉ MŘÍŽCE, VÝCHOD/ZÁPAD SLUNCE (S NEMĚNNOU PERIODOU), PŘEDNÁŠKA ...

PERIODOU BUDEME VŽDY MYSLET TU NEJKRATŠÍ PERIODU.

PŘÍKLAD: MÁME DVA KMITAVÉ HARMONICKÉ POHYBY:

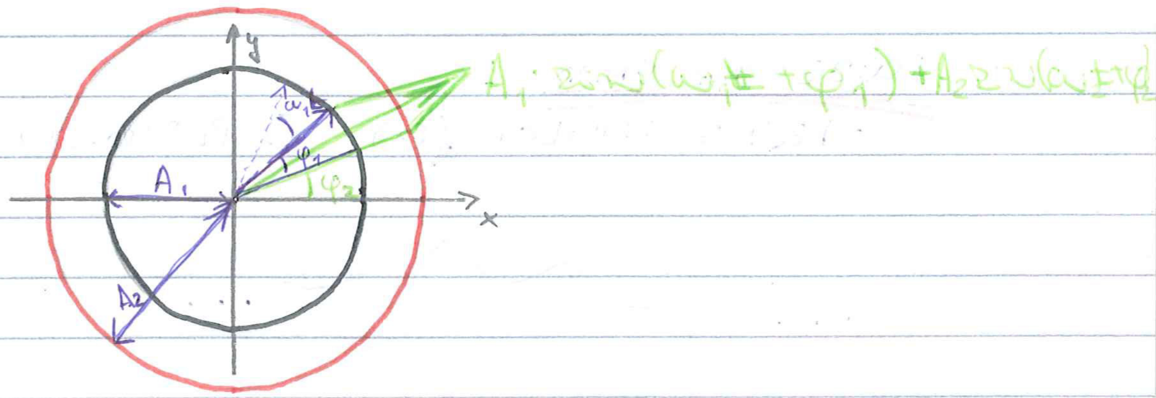
$$x_1(t) = A_1 \cdot \sin(\omega_1 \cdot t + \varphi_1)$$
$$x_2(t) = A_2 \cdot \sin(\omega_2 \cdot t + \varphi_2)$$

TEĎ SE PTÁME KDY JE VÝSLEDNÝ POHYB PERIODICKÝ?

$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$? KDY BUDE PERIODICKÝ?

$$x(t) = A_1 \cdot \sin(\omega_1 \cdot t + \varphi_1) + A_2 \cdot \sin(\omega_2 \cdot t + \varphi_2)$$

TATO FUNKCE NEJDE OBECNĚ VYŘEŠIT, ALE VE SPECIÁLNÍM PŘÍPADĚ $\omega_1 = \omega_2$ ANO. PAK TO PŮJDE SEČÍST ANALYTICKY (FÁZOVÝ DIAGRAM)



DRUHÝ SPECIÁLNÍ PŘÍPAD, KTERÝ BY NÁM S VÝPOČTEM POMOHL VYPADÁ NÁSLEDOVNĚ $A_1 = A_2 = A$

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega_1 \cdot t + \varphi_1) + A \cdot \sin(\omega_2 t + \varphi_2) = A \cdot (\sin(\dots) + \sin(\dots))$$

KDY BUDE VÝSLEDNÝ POHYB PERIODICKÝ?

- VYZKOUŠÍME, ZA JAKÝCH OKOLNOSTÍ JE $x(t+T) = x(t)$, CO VŠECHNO MUSÍ BÝT SPLNĚNO?

$$\overbrace{A_1 \cdot \sin(\omega_1 t + \omega_1 \cdot T + \varphi_1) + A_2 \cdot \sin(\omega_2 t + \omega_2 T + \varphi_2)}^{x(t+T)} =$$

$$= \underbrace{A_1 \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2)}_{x(t)}$$

V TOHOTO VÝRAZU PLATÍ:

POKUD $\omega_1 T = 2k\pi$, $\omega_2 T = 2\cdot l\cdot \pi$ $\Rightarrow$ PAK JE VÝSLEDNÝ POHYB PERIODICKÝ.

k; l JSOU CELÁ ČÍSLA

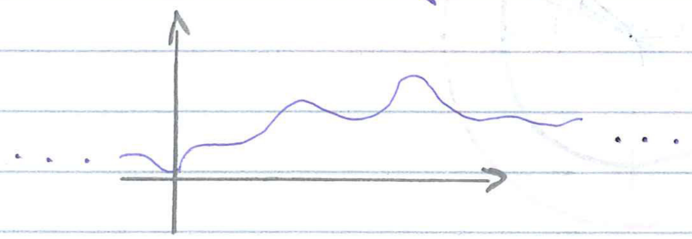
$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{k}{l}$ A KDYŽ DOSADÍM ZA $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$ A ZA $\omega_2 = \frac{2\pi}{T_2}$

DOSTANU VÝRAZ: $\boxed{\frac{T_2}{T_1} = \frac{k}{l}}$ k a l JSOU LIBOVOLNÁ CELÁ ČÍSLA.

!! JESTLI JSOU PERIODY V POMĚRU MALÝCH CELÝCH ČÍSEL PAK JE VÝSLEDNÝ POHYB PERIODICKÝ. !!

FOURIEROVA ŘADA

- MĚJME FUNKCI $f(x)$ S PERIODOU T



ZKUSME PROVÉST ZÁPIS TÉTO FUNKCE:

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

T... PERIODA FUNKCE $f(x)$

$$\boxed{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cdot \cos(k\cdot\omega_0\cdot x) + b_k \cdot \sin(k\cdot\omega_0\cdot x)\right)}$$

JAKÉ JSOU JEDNOTLIVÉ KOEFICIENTY?

JAKÝ TO MÁ VÝZNAM?

JE TO TAK VŽDYCKY? NE (MUSÍ PRO TO BÝT SPLNĚNA URČITÁ PRAVIDLA)

VÝZNAM – DOSTANEME PERIODICKOU FUNKCI S PERIODOU T, A PTÁME SE JAK DALECE SE V NÍ VYSKYTUJÍ JEDNOTLIVÉ SIGNÁLY, KTERÉ MAJÍ PERIODU T; 2T; 3T ... mT

35)

SIGNÁLY S NÁSOBKEM PERIOD A MÍRU JAK JSOU TYTO SIGNÁLY ZASTOUPENY URČUJÍ PRÁVĚ KOEFICIENTY a_k & b_k.

BUDEME CHTÍT VYPOČÍTAT JEDNOTLIVÉ KOEFICIENTY $a_0; a_k$ a b_k. K TOMU BUDEME POTŘEBOVAT POMOCNÉ VÝPOČTY: $(m; n \in N)$ [PŘEDPOKLAD]

- $\int_0^T (\cos(m \cdot \omega_0 \cdot x))\,dx = \underline{0}$
- $\int_0^T (\sin(m \cdot \omega_0 \cdot x))\,dx = \underline{0}$
- $\int_0^T \cos(m \cdot \omega_0 \cdot x)\,dx \cdot \int_0^T \sin(n \cdot \omega_0 \cdot x)\,dx =$

$$= \int_0^T (\cos(m \cdot \omega_0 \cdot x) \cdot \sin(n \cdot \omega_0 \cdot x))\,dx = \underbrace{\left| \begin{array}{l} 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\beta = \\ = \sin(\alpha+\beta) + \\ + \sin(\alpha-\beta) \end{array} \right|}_{\text{VZOREC Z GEOMETRIE}} =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^T [\underbrace{\sin((m+n)\,\omega_0 \cdot x)}_{0} + \sin((m-n)\,\omega_0 \cdot x)]\,dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^T [\sin(\widetilde{(m-n)} \cdot \omega_0 \cdot x]\,dx = \underline{0}$$

BUĎ $m-n = \sigma \in N \Rightarrow$ ROVNÁ SE NULE

NEBO $m-n=0 \Rightarrow$ —— " —— $\sin 0 = 0$

- $\int_0^T (\cos(m \cdot \omega_0 \cdot x) \cdot \cos(n \cdot \omega_0 \cdot x))\,dx = \left| \begin{array}{l} 2 \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta = \\ = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) \end{array} \right| =$

$$= \frac{1}{2} \int_0^T (\underbrace{\cos((m+n) \cdot \omega_0 \cdot x)}_{0} + \cos((m-n) \cdot \omega_0 \cdot x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^T \cos((m-n) \cdot \omega_0 \cdot x)\,dx = \begin{cases} m = n \Rightarrow \frac{1}{2} \int_0^T \overbrace{\cos 0}^{1}\,dx = \frac{T}{2} \\ m \neq n \Rightarrow \text{ROVNÁ SE NULE} \end{cases}$$

OBA VÝSLEDKY LZE SLOUČIT POMOCÍ KRONEKEROVA DELTA $\underline{\delta_{m,n}}$

$$\bullet \int_0^T [\sin(m \cdot \omega_0 \cdot x) \cdot \sin(n \cdot \omega_0 \cdot x)]\, dx = \left| \begin{array}{l} 2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta = \\ = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta) \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^T [\cos((m-n) \cdot \omega_0 \cdot x) - \underbrace{\cos((m+n) \cdot \omega_0 \cdot x)}_{0}]\, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^T \cos((m-n) \cdot \omega_0 \cdot x)\, dx = \begin{cases} m = n \\ m \neq n \end{cases} = \frac{1}{2} \cdot T \cdot \delta_{mn}$$

KONEC POMOCNÝCH VÝPOČTŮ ... NÁVRAT K FUNKCI NA ZAČÁTKU.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cdot \cos(k \cdot \omega_0 \cdot x) + b_k \cdot \sin(k \cdot \omega_0 \cdot x))$$

KDE $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ A T JE PERIODA FUNKCE, JEŠTĚ ALE NEZNÁME KOEFICIENTY a_0; a_k; b_k.
V PRVNÍM KROKU ZINTEGRUJEME PRAVOU I LEVOU STRANU PŘES CELOU PERIODU T.

1) KROK

$$\int_0^T f(x)\, dx = \int_0^T \frac{a_0}{2}\, dx + \int_0^T \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}}_{\text{OBČAS NEMUSÍ BÝT KOŠER}} (a_k \cos(k \cdot \omega_0 \cdot x) + b_k \cdot \sin(k \cdot \omega_0 \cdot x))\, dx =$$

$$= \frac{a_0}{2} T + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \int_0^T \underbrace{\cos(k \cdot \omega_0 \cdot x)}_{0} + b_k \int_0^T \underbrace{\sin(k \cdot \omega_0 \cdot x)\, dx}_{0} \right] = \frac{a_0}{2} T$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(x)\, dx$$

VE DRUHÉM KROKU VYNÁSOBÍME OBĚ STRANY $\cos(m \cdot \omega_0 \cdot x)$ A ZINTEGRUJEME PŘES CELOU PERIODU.

2) KROK

$$\int_0^T f(x) \cdot \cos(m \cdot \omega_0 \cdot x)\, dx = \int_0^T \frac{a_0}{2} \cos(m \cdot \omega_0 \cdot x)\, dx + \int_0^T \Big[\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}}_{\text{VEZU DO SUMY}} (a_k \cdot \cos$$

$$(k \cdot \omega_0 \cdot x) + b_k \cdot \sin(\omega_0 \cdot k \cdot x)) \Big] \cdot \underbrace{\cos(m \cdot \omega_0 \cdot x)}_{\text{VLEZU DO SUMY}}\, dx =$$

36.

$$= \int_0^T \underbrace{\frac{a_0}{2} \cos(m \cdot \omega_0 \cdot x)}_{0} dx + \sum_{k=1}^{\infty} \Big[a_k \cdot \int_0^T \underbrace{\cos(k \cdot \omega_0 \cdot x) \cdot \cos(m \cdot \omega_0 \cdot x)}_{T/2 \cdot \delta_{km}} dx +$$

$$+ \int_0^T \underbrace{b_k \cdot \sin(k \cdot \omega_0 \cdot x) \cdot \cos(m \cdot \omega_0 \cdot x)}_{0} dx \Big] =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \frac{T}{2} \delta_{km} = \frac{T}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{a_k \delta_{km}}_{} = \frac{T}{2} \cdot a_m$$

$m \in \mathbb{N}$

TOTO SE ROVNÁ a_m, PROTOŽE JEN TEHDY KDYŽ $m=k$ DÁ δ_{km} JEDNIČKU (JINAK NULA), TAKŽE $k=m$ A $a_m = a_{k=m} \Rightarrow a_m$ JE VÝSLEDEK SUMY KDE m JE PŘIROZENÉ ČÍSLO.

$$a_m = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cdot \cos(m \cdot \omega_0 \cdot x) dx$$

VE TŘETÍM KROKU VYNÁSOBÍME OBĚ STRANY VÝRAZEM $\sin(\omega_0 \cdot x \cdot m)$ A ZINTEGRUJEME PŘES CELOU PERIODU T.

3) KROK

$$\int_0^T f(x) \sin(m \cdot \omega_0 \cdot x) = \int_0^T \overbrace{\frac{a_0}{2} \sin(m \cdot \omega_0 \cdot x)}^{0} dx + \int_0^T \Big[\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cdot \cos(k \cdot \omega_0 \cdot x) +$$

OPĚT VLEZU DO SUMY

$$+ b_k \cdot \sin(\omega_0 \cdot k \cdot x)) \Big] \cdot \sin(\omega_0 \cdot x \cdot m) =$$

OPĚT S TÍM VLEZU DO SUMY

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\int_0^T \overbrace{a_k \cdot \cos(k \cdot \omega_0 \cdot x) \cdot \sin(\omega_0 \cdot x \cdot m)}^{0} dx + b_k \int_0^T \underbrace{(\sin(\omega_0 \cdot k \cdot x) \cdot}_{b_k \cdot \frac{T}{2} \delta_{mk}}$$

$$\cdot \sin(\omega_0 \cdot \cancel{k} x \cdot m)) dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot \frac{T}{2} \delta_{km} = \frac{T}{2} \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot \delta_{km} = \frac{T}{2} b_m$$

$$b_m = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cdot \sin(m \cdot \omega_0 \cdot x) dx$$

FOURIEROVA RADA

KDE $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ $\quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cdot \cos(k \cdot \omega_0 \cdot x) + b_k(k \cdot \omega_0 \cdot x)$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(x)\, dx$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cdot \cos(k \cdot \omega_0 \cdot x)\, dx \qquad \text{KDE } k = 1; 2; 3 \ldots$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cdot \sin(k \cdot \omega_0 \cdot x)\, dx \qquad \text{KDE } k = 1; 2; 3 \ldots$$

MŮŽETE ZMENIT POZADÍ INTEGRACE A NAPSAT $\int_0^T \to \int_0^{T+t}$

KDYŽ BUDE $f(x)$ SUDÁ PAK BUDE $b_k = 0$,
KDYŽ BUDE $f(x)$ LICHÁ FUNKCE $a_k = 0$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cdot \cos(k \cdot \omega_0 \cdot x) + b_k \cdot \sin(k \cdot \omega_0 \cdot x))$$

TOTO JE BĚŽNÝ ZÁPIS FUNKCE $f(x)$ PRO FOURIERŮV ROZVOJ.
EXISTUJE EKVIVALENTNÍ ZÁPIS:

DÁ SE ROZEPSAT

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{ik \cdot \omega_0 \cdot x} = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k \cdot e^{ik\omega_0 x} + \underbrace{c_{(-k)} \cdot e^{-ik \cdot \omega_0 \cdot x}}_{\text{BYLI JSME V ZÁPORNÝCH ČÍSLECH DÍKY } k=-\infty \text{ A TADY JSME TA ZÁPORNÁ ČÍSLA NECHALI}})$$

DÁ SE DOKÁZAT: $c_k = \frac{1}{T} \int_0^T e^{-ik \cdot \omega_0 \cdot x}\, dx$

NA i V INTEGRÁLU KOUKÁME JAKO NA KONSTANTU.

JAKÝ JE VZTAH MEZI $a_0; a_k; b_k$ NA JEDNÉ STRANĚ A VELIČINAMI $c_0; c_k; c_{-k}$ NA STRANĚ DRUHÉ.
PRVNÍ INFORMACE, KTEROU MÁME JE $c_k = c_{(-k)}^*$.

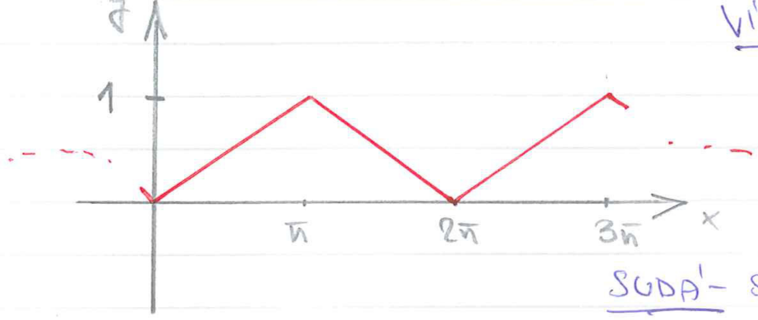
37.)

$$f(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(c_k \cdot e^{ik\omega_0 x} + c_{(-k)} \cdot e^{-ik\omega_0 x}\right) \overset{\text{EULEROVA IDENTITA}}{=} c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(c_k \cdot (\cos k\cdot\omega_0\cdot x + \right.$$

$$\left. + i \sin(k\cdot\omega_0\cdot x)\right) + c_k^* \left(\cos(k\cdot\omega_0\cdot x) - i\sin(k\cdot\omega_0\cdot x)\right) =$$

$$= \underbrace{c_0}_{\frac{a_0}{2}} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\underbrace{(c_k + c_k^*)}_{a_k} \cdot \cos(k\cdot\omega_0\cdot x) + \underbrace{i(c_k - c_k^*)}_{b_k} \cdot \sin(k\cdot\omega_0\cdot x) \right]$$

PŘÍKLAD| URČETE KOEFICIENTY a_k & b_k VE FOURIEROVĚ ŘADĚ FUNKCE $f(x)$. TATO FUNKCE MÁ PERIODU 2π, NA INTERVALU $[0;\pi]$ LINEÁRNĚ ROSTE A TO Z BODU $(0;0)$ DO BODU $(\pi;1)$ NA INTERVALU $[\pi;2\pi]$ LINEÁRNĚ KLESÁ.



VÍME:
$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi} = \underline{1}$$

SUDÁ FUNKCE TEDY b_k JE NULA

SUDÁ – SYMETRICKÁ PODLE OSY y, KDYBY BYLA LICHÁ BYLA BY SYMETRICKÁ PODLE POČÁTKU SOUŘADNIC.

FUNKCE JE ZADANÁ TAKTO:
$x \in [0;\pi]$ | $x \in [\pi;2\pi]$

(LINEÁRNÍ PILA)

ŘEKNEME ŽE FUNKCE $y = ax + b$ A LEŽÍ V INTERVALU $(0;0)$ & $(\pi;1)$:

$$0 = a\cdot 0 + b = 0 + b = 0 \Rightarrow \underline{b = 0}$$
$$1 = a\cdot\pi + b \Rightarrow \underline{a = \frac{1}{\pi}}$$

$$\underline{y = \frac{1}{\pi}x} \quad x[0;\pi]$$

A DALŠÍ INTERVAL OD $(\pi;1)$ & $(2\pi;0)$:

$$-\begin{cases} 1 = a\cdot\pi + b & \Rightarrow 1 = -\pi a \Rightarrow a = -\frac{1}{\pi} \\ 0 = a\cdot 2\pi + b & \Rightarrow b = -2\pi a = \underline{2} \end{cases}$$

$$\underline{y = -\frac{x}{\pi} + 2} \quad x \in [\pi;2\pi]$$

38.)

KOEFICIENTY BUDEME POČÍTAT ZVLÁŠŤ:

a_0: $a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)dx = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx =$

$= \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi}\frac{x}{\pi}dx + \int_{\pi}^{2\pi}\left(-\frac{x}{\pi}+2\right)dx\right) = \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{x^2}{2\pi}\right]_0^{\pi} +\right.$

$\left.+\left[-\frac{x^2}{2\pi}+2x\right]_{\pi}^{2\pi}\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{2\pi} + \left(-\frac{4\pi^2}{2\pi}+4\pi -\right.\right.$

$\left.\left.-\left(-\frac{\pi^2}{2\pi}+2\pi\right)\right)\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} + \left(-2\pi + 4\pi + \frac{\pi}{2} - 2\pi\right)\right) = \underline{\underline{1}}$

a_k: $a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cdot\cos(k\cdot \overset{1}{\overset{\parallel}{\omega_0}}\cdot x)dx = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cdot\cos(k\cdot x)dx =$

$= \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi}\frac{x}{\pi}\cdot\cos(k\cdot x)dx + \int_{\pi}^{2\pi}\left(-\frac{x}{\pi}+2\right)\cdot\cos(k\cdot x)dx\right) =$

= ODBOČKA

$\int x\cos(k\cdot x)dx = \left| \begin{matrix} u = x & u' = 1 \\ v' = \cos(kx) & v = \frac{\sin kx}{k} \end{matrix} \right| = \frac{\sin kx}{k}\cdot x -$

$- \int\frac{\sin kx}{k}dx = \frac{x\cdot\sin(k\cdot x)}{k} - \frac{1}{k}\int\sin(k\cdot x)dx =$

$= \frac{x\cdot\sin(kx)}{k} + \frac{1}{k^2}\cdot\cos kx$

POČÍTÁM URČITÉ INTEGRÁLY TAK INTEGRAČNÍ KONSTANTA JE ZBYTEČNÁ!

$\text{KONEC ODBOČKY} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{\pi}\left[x\cdot\underbrace{\frac{\sin(kx)}{k}}_{0 \text{ KVŮLI MEZÍM}} + \frac{1}{k^2}\cos kx\right]_0^{\pi} - \frac{1}{\pi}\cdot\right[$

$\cdot\left[x\cdot\underbrace{\frac{\sin kx}{k}}_{0 \text{ KVŮLI MEZÍM}} + \frac{1}{k^2}\cdot\cos kx\right]_{\pi}^{2\pi} + 2\underbrace{\left[\frac{1}{k}\sin kx\right]_{\pi}^{2\pi}}_{0 \text{ KVŮLI MEZÍM}} =$

$= \frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{1}{k^2}\left(\left[\cos kx\right]_0^{\pi} - \left[\cos kx\right]_{\pi}^{2\pi}\right) =$

$$= \frac{1}{k^2\pi^2} \cdot (\cos k\pi - \underbrace{\cos 0}_{1} - \underbrace{\cos 2k\pi}_{1} + \cos k\pi) =$$

$$= \frac{1}{k^2\pi^2}(2\cos k\pi - 2) = \frac{2}{k^2\pi^2}(\cos k\pi - 1) =$$

$$= \frac{2}{k^2 \cdot \pi^2}((-1)^k - 1)) = $$

SUDÉ $k \Rightarrow$ CELKOVĚ $0 = 1-1$

LICHÉ $k \Rightarrow$ CELKOVĚ $-\frac{4}{k^2\pi^2}$

$\cos k\pi = (-1)^k$

POKUD JE k - SUDÉ DOSTANU JEDNIČKU, POKUD LICHÉ, DOSTANU -1.

$b_k = 0$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \cos(kx) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}(\cos x + \frac{1}{9} \cdot \cos 3x + $$

$$+ \frac{1}{25}\cos 5x + \ldots)$$

11.) ZÁKLADY TENZOROVÉ ALGEBRY

11.1 ÚVOD

$\vec{M}_{\parallel} = J \cdot \vec{\varepsilon}$ $\quad L_{\parallel} = J \cdot \vec{\omega}$ $\quad$ J... MOMENT SETRVAČNOSTI VZHLEDEM K OSE OTÁČENÍ

$\vec{\omega}$ ... ÚHLOVÁ RYCHLOST OTÁČENÍ

ε... ÚHLOVÉ ZRYCHLENÍ

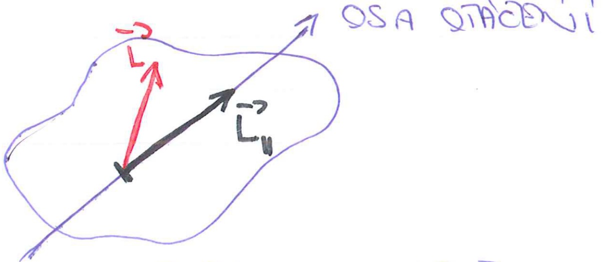
$L_{\parallel}$... PRŮMĚT VEKTORŮ MOM. HYB. DO OSY OTÁČENÍ

$\parallel$ ROVNOBĚŽNÉ

$M_{\parallel}$... PRŮMĚT MOMENTU VNĚJŠÍCH SIL DO OSY OTÁČENÍ

PROBLÉM NASTANE, KDYŽ NEBUDEME OTÁČET KOLEM NĚJAKÉ OSY OSO VE SYMETRICKÉ TĚLESO, ALE NĚJAKOU BRAMBORU

$\vec{L}$ - OBECNÝ MOM. HYBNOSTI



POTŘEBUJEME VĚDĚT JAK JE TO S OTÁČENÍM TUHÉHO TĚLESA KOLEM PEVNÉ OSY OBECNĚ?

40|

MOMENT HYBNOSTI BYL DEFINOVÁN JAKO:

TUHÉ TĚLESO SE OTÁČÍ ÚHLOVOU RYCHLOSTÍ ω VŠECHNY BODY (NA BRAMBOŘE) SE OTÁČÍ STEJNOU ÚHLOVOU RYCHLOSTÍ

$$\vec{L} = \iiint_V \rho \cdot (\vec{r} \times \dot{\vec{r}})\, dV = \iiint_V \rho \cdot (\vec{r} \times \underbrace{(\vec{\omega} \times \vec{r})}_{\dot{\vec{r}}})\, dV =^{*}$$

$\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$

NA ZÁVORKU EXISTUJE VZOREC $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A}\vec{C})\vec{B} - (\vec{A}\vec{B})\vec{C}$

$$^{*}= \iiint_V \rho \cdot ((\vec{r} \cdot \vec{r}) \cdot \vec{\omega} - (\vec{r} \cdot \vec{\omega})\vec{r})\, dV = \text{PO ROZEPSÁNÍ DO SLOŽEK} =$$

PRO SLOŽKY $\vec{\omega}$ & $\vec{r}$ PLATÍ: $\quad \boxed{= J_{ji} \cdot \omega_j = L_i}$

$1 \leq i \leq 3$ $\quad \vec{r} = (x_1; x_2; x_3) = (x_i)$

$\vec{\omega} = (\omega_1; \omega_2; \omega_3) = (\omega_i)$

NYNÍ TEN VZTAH ROZEPÍŠEME DO SLOŽEK:

SČÍTÁME PŘES j

$$L_i = \sum_j J_{ji} \cdot \omega_j = J_{1i} \cdot \omega_1 + J_{2i} \cdot \omega_2 + J_{3i} \cdot \omega_3$$

PRO $i=1$ $\quad L_1 = J_{11} \cdot \omega_1 + J_{21} \cdot \omega_2 + J_{31} \cdot \omega_3$

$i=2$ $\quad L_2 = J_{12} \cdot \omega_1 + J_{22} \cdot \omega_2 + J_{32} \cdot \omega_2$

$i=3$ $\quad L_3 = J_{13}\, \omega_1 + J_{23} \cdot \omega_3 + J_{33} \cdot \omega_3$

LZE TO NAPSAT MATICOVĚ:

$$(L_1 \;\; L_2 \;\; L_3) = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{21} & J_{31} \\ J_{12} & J_{22} & J_{32} \\ J_{13} & J_{23} & J_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

ZKRÁCENÝ ZÁPIS: $\quad (L) = (\omega) \cdot J$

J_{ij} ZNAMENÁ:

MOMENTY SETR. OTÁČ. TĚLESA VZHLEDEM K SOUŘ. OSÁM

$$J_{11} = \iiint_V \rho \cdot (z^2 + y^2)\, dV$$

$$J_{22} = \iiint_V \rho \cdot (x^2 + z^2)\, dV$$

$$J_{33} = \iiint_V \rho \cdot (x^2 + y^2)\, dV$$

SMÍŠENÉ (DEVIAČNÍ) MOMENTY

$$J_{21} = J_{12} = -\iiint_V (\rho \cdot x \cdot y)\, dV$$

$$J_{13} = J_{31} = -\iiint_V (\rho \cdot x \cdot z)\, dV$$

$$J_{23} = J_{32} = -\iiint_V (\rho \cdot y \cdot z)\, dV$$

J_{ij} SOUVISÍ S GEOM. CHARAKTERISTIKAMI TOHO OTÁČENÍ TOHO TĚLESA

$$\vec{L}=\iiint_V \rho\cdot\Big(\big(\underbrace{((x_1;x_2;x_3)\cdot(x_1;x_2;x_3))}_{\text{ČÍSLO}}\big)\cdot(\omega_1;\omega_2;\omega_3)-\big(\underbrace{(x_1;x_2;x_3)\cdot(\omega_1;\omega_2;\omega_3)}_{\text{ČÍSLO}}\big)\cdot(x_1;x_2;x_3)\Big)\,dV=$$

$$\Big(\big((\vec{r}\cdot\vec{r})\cdot\vec{\omega}\big)\quad\big((\vec{r}\cdot\vec{\omega})\cdot\vec{r}\big)\Big)$$

= TAM KDE MŮŽEME PROVEDEME SKALÁRNÍ SOUČINY (JSME ORTONORM BÁZI) =

$$=\iiint_V \rho\cdot\Big(\underbrace{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)}_{\text{ČÍSLO}}\cdot\underbrace{(\omega_1;\omega_2;\omega_3)}_{\text{VEKTOR}}-\underbrace{(x_1\omega_1+x_2\omega_2+x_3\omega_3)}_{\text{ČÍSLO}}\cdot\underbrace{(x_1;x_2;x_3)}_{\text{VEKTOR}}\Big)\,dV=$$

NYNÍ BUDEME POROVNÁVAT JEDNOTLIVÉ SLOŽKY VEKTORŮ:

$$L_1=\iiint_V \rho\big((\underline{x_1^2}+x_2^2+x_3^2)\underline{\omega_1}-(\underline{x_1\omega_1}+x_2\omega_2+x_3\omega_3)\underline{x_1}\big)\,dV=$$

ODEČTE SE

$$=\iiint_V \rho\big((x_2^2+x_3^2)\omega_1-(x_2\omega_2+x_3\omega_3)x_1\big)\,dV$$

$\omega_1;\omega_2;\omega_3$ JSOU PRO NÁS KONSTANTY, VZHLEDEM K INTEGRÁLŮM, MŮŽU JE TEDY VYHODIT PŘED INTEGRÁL.

$$L_1=\omega_1\cdot\underbrace{\iiint_V \rho(x_2^2+x_3^2)\,dV}_{J_{11}}+\omega_2\underbrace{\Big(-\iiint_V \rho(x_1x_2)\,dV\Big)}_{J_{12}=J_{21}}+\omega_3\underbrace{\Big(-\iiint_V \rho(x_1x_3)\,dV\Big)}_{J_{13}=J_{31}}$$

L_2 A L_3 OBDOBNĚ ...

J_{ij} JSOU SLOŽKY TENZORU SETRVAČNOSTI VZHLEDEM K OSE OTÁČENÍ:

$$J=\begin{pmatrix}J_{11}&J_{12}&J_{13}\\J_{21}&J_{22}&J_{23}\\J_{31}&J_{32}&J_{33}\end{pmatrix}$$

TENZOR SETRVAČNOSTI TĚLESA

41.1

ELEKTŘINA A MAGNETIZMUS:

$$D_i = \varepsilon_{ji} \cdot E_j$$

TENZOR PERMITIVITY PROSTŘEDÍ
E ... ELEKTRICKÁ INTENZITA
D ... —— II —— INDUKCE

MATICOVÝ ZÁPIS $(L) = (\omega) \cdot J$

V PRVNÍM SEMESTRU JSME MĚLI TRANSFORMAČNÍ VZTAHY MEZI SLOŽKAMI VEKTORU $\vec{V}$, COŽ BYLY TRANSFORM. VZTAHY TÉHOŽ VEKTORU V RŮZNÝCH BÁZÍCH A MATICE T JE MATICE PŘECHODU OD NEČÁRKOVANÉ K ČÁRKOVANÝM.

$$(L')\cdot T = (\omega')\cdot T \cdot J \quad / \cdot T^{-1}$$

$$L' = (\omega') \cdot \underbrace{T \cdot J \cdot T^{-1}}_{J' = T \cdot J \cdot T^{-1}}$$

T - JE REGULÁRNÍ MATICE => EXISTUJE T^{-1}

$(a) = (a') \cdot T$ ← TRANSFORMAČNÍ VZTAHY MEZI SLOŽKAMI VEKTORU
$(\omega) = (\omega') \cdot T$ $\quad$ $\vec{a}$ V ČÁRKOVANÉ A NEČÁRKOVANÉ BÁZI
$(L) = (L') \cdot T$ $\quad$ $\langle \vec{e}_1\,'; \vec{e}_2\,'; \vec{e}_3\,' \rangle, \langle \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3 \rangle$ (BÁZE)

$$\vec{e}_i\,' = T_{ij}\, \vec{e}_j$$

V ORTONORMÁLNÍ BÁZI PLATÍ $T^{-1} = T^T$ A MOHU PAK NAPSAT

$$J' = T \cdot J \cdot T^T$$

VYJÁDŘÍME SI TO VE SLOŽKÁCH V ORTONORMÁLNÍ BÁZI

$$J'_{ij} = \underbrace{T_{ik} \cdot J_{kl}}_{O_{il}} \cdot T_{jl} = T^T_{lj}$$

← TOTO JE PRVEK SOUČINU SE SLOŽKAMI i & l

T; J - JSOU ČTVERCOVÉ MATICE 3×3 NEMUSÍM SE STARAT O SLOUPCE A ŘÁDKY.

11.2 DEFINICE TENZORŮ VE FYZIKÁLNÍ LITERATUŘE - S UŽITÍM TRANSFORMAČNÍCH PRAVIDEL

TRANSFORMACE:

SKALÁR - ČÍSLO STEJNÉ VE VŠECH SOUSTAVÁCH SOUŘADNIC

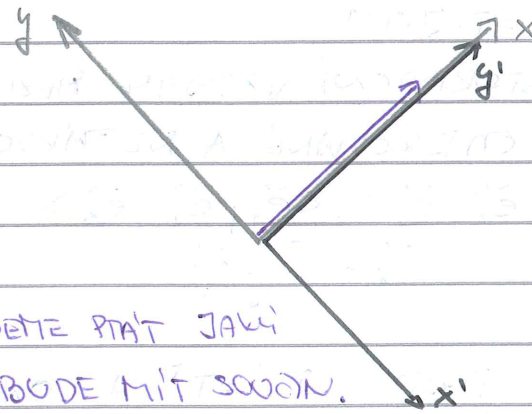
VEKTOR - $(a) = (a')\,T$

TENZOR - TENZOREM DRUHÉHO ŘÁDU NAZÝVÁME SOUBOR VELIČIN T_{ij}, KTERÉ SE PŘI TRANSFORMACI SOUŘADNIC $[x_i' = a_{ik} \cdot x_k]$ TRANSFORMUJÍ JAKO SOUČINY KOMPONENTŮ DVOU VEKTORŮ

tj. $T_{ij}' = a_{ik} \cdot a_{jl} \cdot T_{kl}$ T … TENZOR 2. ŘÁDU, a … MATICE TRANSF.

- PRO TENZOR 3. ŘÁDU: $T_{ijk}' = a_{im} \cdot a_{jn} \cdot a_{ks} \cdot T_{mns}$

ROZBOR: - ZAČNEME VEKTOREM (V ROVINĚ)



VEKTOR $\vec{r} = (r; 0)$ „NEČÁRKOVANÉ"
$\vec{r} = (0; r)$ „ČÁRKOVANÉ"
SOUSTAVĚ SOUŘ.
(SLOŽKY)

A TEĎ SE BUDEME PTÁT JAKÝ TEN VEKTOR BUDE MÍT SOUČIN.

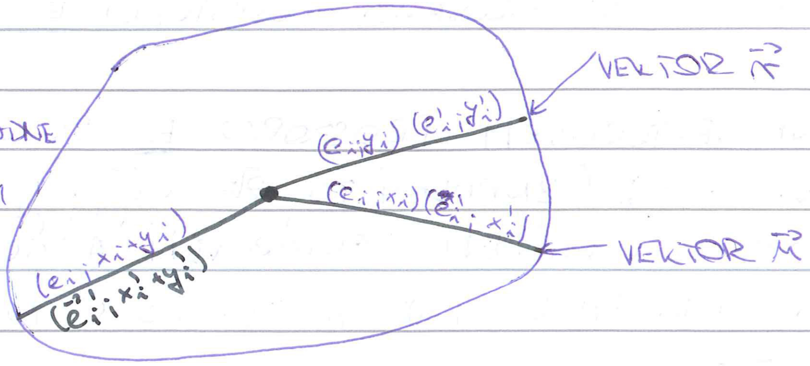
ŘEKNEME, ŽE DVOJICE $(\vec{e}_i; x_i)$, $(\vec{e}_i'; x_i')$ JSOU EKVIVALENTNÍ JESTLIŽE EXISTUJE REGULÁRNÍ MATICE $T = (\tau_{ij})$ TAK ŽE PLATÍ:

$\vec{e}_i' = \tau_{ij}\, \vec{e}_j \qquad x_i' = \tau_{ij} \cdot x_j$ V ORTONORM. BÁZI

TAKTO JE MOŽNÉ DEFINOVAT VEKTOR, JAKO MNOŽINU (TŘÍDU), ~~POZE~~ VŠECH TĚCHTO DVOJIC, KTERÉ SPOLU JSOU VZÁJEMNĚ EKVIVALENTNÍ!

42.1

SOUČET DOPADNE DO STEJNÉ TŘÍDY JAKO VEKTORY $\vec{u}+\vec{v}$



SEČÍTÁNÍ VEKTORŮ A NÁSOBENÍ ČÍSLEM, MÁME DVA VEKTORY $\vec{u}$; $\vec{v}$.

PRVNÍ SLOŽKA VYJADŘUJE PŘÍSLUŠNOST K BÁZI

SEČÍTÁNÍ: $\vec{u}=(\vec{e}_i; x_i)$

$\vec{v}=(\vec{e}_i; y_i)$

$\vec{u}+\vec{v}=(\vec{e}_i; x_i+y_i)$

NÁSOBENÍ ČÍSLEM: $k\cdot\vec{u}=(\vec{e}_i; k\cdot x_i)$

VEKTOR ~~e~~ $\vec{u}$ JE V BÁZI e_i VYJÁDŘEN SLOŽKAMI x_i,
A -||- $\vec{v}$ ——————||—————— SLOŽKAMI y_i.

11.3 TENZORY JAKO MULTILINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ A OPERACE S NIMI

u: VEKTOROVÝ PROSTOR $A \xrightarrow{\text{ZOBRAZENÍ}} B$ (REÁLNÁ ČÍSLA)

u JE LINEÁRNÍ

1) $u(a_1+a_2)=u(a_1)+u(a_2) \quad \forall\, a_1; a_2 \in A$

2) $k\cdot u(a)=u(k\cdot a) \quad \forall\, a\in A, \forall k \in \mathbb{R}$

1) A 2)

$$u(k\cdot a_1+l\cdot a_2)=k\cdot u(a_1)+l\cdot u(a_2) \quad \forall a_1; a_2 \in A \quad \forall k; l \in \mathbb{R}$$

DEFINICE TENZORU:

NECHŤ E JE VEKTOROVÝ PROSTOR (ČASTO PLATÍ, ŽE $E=\mathbb{R}^n$), $\dim E = n$. POLOŽME $E^k=\underbrace{E\times E\times\ldots\times E\times E}_{k\text{-KRÁT}}$ k-TÁ

KARTÉZSKÁ MOCNINA VEKTOROVÉHO PROSTORU $\underline{E}$.

k-TENZOREM NA VEKTOROVÉM PROSTORU $\underline{E}$ ROZUMÍME ZOBRAZENÍ $u: E^k \longrightarrow \mathbb{R}$ (ZNAMENÁ TO, ŽE $u(\xi_1; \xi_2; \dots \xi_k) \in \mathbb{R}$), KTERÉ JE LINEÁRNÍ V KAŽDÉM VEKTOROVÉM ARGUMENTU $\xi_i \in E$, $1 \leq i \leq n$. MNOŽINU VŠECH TENZORŮ NA $\underline{E}$ OZNAČUJEME $T^k E$.

ČÍSLUJE SLOŽKU i-TÉHO VEKTORU

$$\xi_i = (\xi_1^{(1)}; \xi_i^{(2)}; \dots; \xi_i^{(n)}) = (\xi_i^j) \qquad 1 \leq j \leq n \quad 1 \leq i \leq k$$

ČÍSLUJE VEKTOR

ROZEPSÁNÍ "MULTILINEARITA" PRO k-TENZOR u

1) $u(k \cdot \xi_1 + l\eta_1; \xi_2; \dots; \xi_i; \dots \xi_k) = k \cdot u(\xi_1; \xi_2; \dots; \xi_i; \dots \xi_k) +$

$+ l \cdot u(\eta_1; \xi_2; \dots; \xi_i; \dots; \xi_k)$

PRO $\forall \eta_1 \in E$ a $\xi_1; \dots \xi_k \in E$ a $l; k \in \mathbb{R}$

2) $u(\xi_1; k \cdot \xi_2 + l \cdot \eta_2; \xi_3; \dots; \xi_i; \dots \xi_k) = k \cdot u(\xi_1; \xi_2; \dots; \xi_k) +$

$+ l \cdot u(\xi_1; \eta_2; \xi_3; \dots; \xi_k)$

PRO $\forall \eta_2 \in E$ a $\xi_1; \dots \xi_k \in E$ a $k; l \in \mathbb{R}$

⋮

i)

⋮

k)

DEFINICE SČÍTÁNÍ TENZORŮ A NÁSOBENÍ TENZORU ČÍSLEM

"SČÍTÁNÍ": NECHŤ $u \in T^k E$, $v \in T^k E$

42 b, (POMOCÍ SČÍTÁNÍ V $\mathbb{R}$)

$$(\mu+\nu)(\xi_1,\dots,\xi_k) \underset{\text{VIZ DEFINICE}}{=} \mu(\xi_1,\dots,\xi_k)+\nu(\xi_1,\dots,\xi_k)$$

"NÁSOBENÍ REÁLNÝM ČÍSLEM"

(NÁSOBENÍ POMOCÍ REÁLNÝCH ČÍSEL)

$$(k\cdot\mu)(\xi_1,\dots,\xi_k) \underset{\text{VIZ DEFINICE}}{=} k\cdot\mu(\xi_1,\dots,\xi_k)$$

PLATÍ: SOUČET DVOU k-TENZORŮ JE k-TENZOREM NA E
NÁSOBEK k-TENZORŮ A REÁLNÁ ČÍSLA JE k-TENZOREM NA E

DŮKAZ:

→ PRO SOUČET DVOU 2-TENZORŮ, DOKAZUJEME:

1) $(\mu+\nu)(k\xi_1+l\eta_1,\xi_2)=k(\mu+\nu)(\xi_1,\xi_2)+l(\mu+\nu)(\eta_1,\xi_2)$

2) $(\mu+\nu)(\xi_1,k\cdot\xi_2+l\eta_2)=k(\mu+\nu)(\xi_1,\xi_2)+l(\mu+\nu)(\xi_1,\eta_2)$

ad 1) LEVÁ STRANA: $(\mu+\nu)(k\cdot\xi_1+l\eta_1,\xi_2) \underset{\text{DEFINICE SOUČTU}}{=} \mu(k\xi_1+l\eta_1,\xi_2)+\nu(k\xi_1+$

$+l\eta_1,\xi_2)=k\cdot\mu(\xi_1,\xi_2)+l\cdot\mu(\eta_1,\xi_2)+k\cdot\nu(\xi_1,\xi_2)+l\nu(\eta_1,\xi_2)$

PRAVÁ STRANA: $k\cdot(\mu+\nu)(\xi_1,\xi_2)+l(\mu+\nu)(\eta_1,\xi_2) \underset{\text{DEFINICE SOUČTU TENZORŮ}}{=}$

$=k\cdot[\mu(\xi_1,\xi_2)+\nu(\xi_1,\xi_2)]+l[\mu(\eta_1,\xi_2)+\nu(\eta_1,\xi_2)]=$

$=k\cdot\mu(\xi_1,\xi_2)+k\cdot\nu(\xi_1,\xi_2)+l\cdot\mu(\eta_1,\xi_2)+l\cdot\nu(\eta_1,\xi_2)$

ad 2) ANALOGICKY, PRO k-TENZOR ANALOGICKY

43.

TENZORY JSME ZAVÁDĚLI JAKO LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ, MĚLI JSME VEKTOROVÝ PROSTOR E S DIMENZÍ n KAŽDÝ VEKTOR JE URČEN USPOŘÁDANOU n-TICÍ ZADANOU BÁZÍ.

$$\underbrace{E \times E \times \dots \times E}_{k\text{-krát}} = E^k$$

VLASTNÍ TENZOR JSME OZNAČILI JAKO ZOBRAZENÍ u, KTERÉ BĚŽÍ Z E^k DO $\mathbb{R}$, u POŽÍRÁ k-TICI VEKTORŮ

$$\boxed{u : E^k \longrightarrow \mathbb{R}}$$

A VÝSLEDKEM BYLO REÁLNÉ ČÍSLO. ZOBRAZENÍ u JE PODLE DEFINICE LINEÁRNÍ Z VEKTOROVÝCH ARGUMENTŮ.

SOUČET TENZORŮ SE DEFINUJE POUZE JAKO SOUČET k-TENZORŮ, OPERACE SOUČET MUSÍ POŽÍRAT STEJNÝ POČET ARGUMENTŮ.

$(T^k \cdot E)$ … MNOŽINA VŠECH k-TENZORŮ NA E, SPOLU S OPERACEMI $+$ A $\cdot$ TVOŘÍ VEKTOROVÝ PROSTOR NAD MNOŽINOU REÁLNÝCH ČÍSEL.

SOUČET DVOU TENZORŮ JE TAKY TENZOR. NÁSOBENÍ REÁLNÉHO ČÍSLA TENZOREM JE TAKY TENZOR.

POKRAČOVÁNÍ TEORIE

(JEDNO HLAVÁ PŘÍŠERA)

DEFINICE: 1-TENZOR NA E NAZÝVÁME LINEÁRNÍ FORMOU. PROSTOR VŠECH LINEÁRNÍCH FOREM, TO JEST PROSTOR $T^1 \cdot E$ SE ZKRÁCENĚ OZNAČUJE E^* A NAZÝVÁ SE DUÁLNÍM PROSTOREM K PROSTORU E.

ŘEKNEME, ŽE MÁME VEKTOROVÝ PROSTOR $\underline{E}$ $\dim E = n$
MÁME DÁNU JEHO BÁZI $\langle e_1; e_2; \ldots e_n \rangle$ (JAKÁKOLIV BÁZE)

NEJAKÝ VEKTOR $\underline{\xi}$ BUDE MÍT V TÉTO BÁZI SLOŽKY
$(\xi^1; \xi^2; \ldots \xi^n) = \xi^1 e_1 + \xi^2 e_2 + \ldots + \xi^n e_n = \xi^i e_i$

DEFINICE: POLOŽÍME $\boxed{e^i(\xi) = \xi^i}$
$1 \leq i \leq n$

TAKTO JE DEFINOVÁNA LINEÁRNÍ FORMA e^i

PŘÍKLAD: ŘEKNEME ŽE $\underline{E}$ JE VEKTOROVÝ PROSTOR $E \in \mathbb{R}^5$, BÁZE $\langle e_1; e_2; e_3; e_4; e_5 \rangle$

ZADANÉ VEKTORY: $\xi = (-6; 7; 1; 4; 26)$
$\eta = (-14; 3; 0; 12; 13)$

$e^1(\xi) = -6$ $\quad e^1(e_4) = 0$ $\quad e^i(e_j) = \delta_{ij}$
$e^4(\eta) = 12$ $\quad e^2(e_2) = 1$

DŮKAZ: ŽE ZOBRAZENÍ e^i JE LINEÁRNÍ, KDYŽ DOKAZUJEME LINEARITU ZOBRAZENÍ JE POTŘEBA DOKÁZAT 2 POJMY:

1) $e^i(\xi + \eta) = e^i(\xi) + e^i(\eta)$
2) $e^i(k \cdot \xi) = k \cdot e^i(\xi)$

ad/1, ZAČNEME OD LEVÉ STRANY

$$e^i(\xi + \eta) = \underbrace{(\xi + \eta)^i}_{i\text{-TÁ SLOŽKA VEKTORU } \xi + \eta} = \xi^i + \eta^i$$

VYUŽILI JSME DEFINICI ZOBRAZENÍ: KDYŽ NAKRMÍME ZOBRAZENÍ e^i VEKTOREM $(\xi + \eta)$ TAK MÁME NAPSAT i-TOU SLOŽKU TOHOTO VEKTORU.

PRAVÁ STRANA $\quad e^i(\xi) + e^i(\eta) = \xi^i + \eta^i$
OPĚT VYCHÁZÍME Z DEFINICE

|LEVÁ = PRAVÁ|

44.1

ad 2, LEVÁ STRANA

$$e^i(k\cdot\xi) \underset{\uparrow}{=} (k\cdot\xi)^i = k\cdot\xi^i$$

DEFINICE — KONSTANTA NEMÁ SLOŽKY

PRAVÁ STRANA

$$k\cdot e^i(\xi) = k\cdot\xi^i$$

DEFINICE

| LEVÁ = PRAVÁ |

VĚTA: OPĚT ŘEKNEME, ŽE E JE VEKTOROVÝ PROSTOR $\dim E = m$, S BÁZÍ $\langle e_1; \dots; e_m\rangle$. POTOM $\langle e^1; e^2; \dots; e^m\rangle$ TVOŘÍ BÁZI VEKTOROVÉHO PROSTORU E^*. TÉTO BÁZI $\langle e^1; e^2; \dots; e^m\rangle$ ŘÍKÁME DUÁLNÍ BÁZE K $\langle e_1; e_2; \dots e_m\rangle$, E^* JE VEKT. PROSTOR.

DŮKAZ: MUSÍME DOKÁZAT ŽE $\langle e^1; \dots; e^m\rangle$ JE BÁZÍ PROSTORU E^*, TO ŽE JDE O BÁZI DOKÁŽETE VE DVOU KROCÍCH.

1 KROK UKÁŽEME, ŽE LIBOVOLNOU (LINEÁRNÍ) FORMU ω MŮŽEME VYJÁDŘIT JAKO $\omega = \omega_1 e^1 + \omega_2 e^2 + \dots + \omega_m e^m$, KDE $\omega_1; \omega_2; \dots \omega_m$ JSOU REÁLNÁ ČÍSLA (A SLOŽKY VEKTORU)

POČÍTEJME $\omega(\xi) = \omega(\xi^1 e_1 + \xi^2 e_2 + \dots + \xi^m e_m) =$ (NAKRMENO)

= TADY VYUŽIJEME LINEARITY $= \xi^1\omega(e_1) + \xi^2\omega(e_2) + \dots$

$\dots + \xi^m\omega(e_m) = *$

ω_1 JE ČÍSLO $\mathbb{R}$ JE TO VYJÁDŘENÍ VEKTORU ω VYČÍSLENÉHO NA e_1 ... $\omega(e_1)$. TO STEJNÉ I PRO ω_2 ... $\omega(e_2) \in \mathbb{R}$.

$* = \omega_1 e^1(\xi) + \omega_2 e^2(\xi) + \dots + \omega_m \cdot e^m(\xi) =$ VYUŽIJEME DEFINICI →

PRO SEČÍTÁNÍ TENZORŮ (1. TENZORŮ) $= (\omega_1 e^1 + \omega_2 e^2 + \dots + \omega_m e^m)(\xi) = \omega(\xi)$

$$\omega = (\omega_1 e^1 + \omega_2 e^2 + \dots + \omega_m e^m) \qquad \omega_1 = \omega(e_1) \in \mathbb{R}$$
$$\omega_m = \omega(e_m) \in \mathbb{R}$$

SHRNUTÍ: V PRVNÍM KROKU JSME DOKAZOVALI, ŽE LIBOVOLNOU LINEÁRNÍ FORMU, ČILI ZOBRAZENÍ, KTERÉ ŽERE JEDINÝ VEKTOR A VÝSLEDKEM JE ČÍSLO, TAK LIBOVOLNOU FORMU LZE VYJÁDŘIT JAKO LINEÁRNÍ KOMBINACI BÁZOVÝCH VEKTORŮ. ~~[illegible]~~ LIBOVOLNOU FORMU ω LZE ZAPSAT JAKO LINEÁRNÍ KOMBINACI BÁZOVÝCH FOREM e^1 AŽ e^m (S INDEXY NAHOŘE).

2. KROK: DOKÁŽEME, ŽE VYJÁDŘENÍ $\omega = \omega_1 e^1 + \omega_2 e^2 + \dots \omega_m e^m = \omega_i e^i$ JE JEDNOZNAČNÉ. JEDNOZNAČNOST SE VĚTŠINOU DOKAZUJE SPOREM.

SPOR: PŘEDPOKLÁDEJME, ŽE EXISTUJÍ DVĚ RŮZNÁ VYJÁDŘENÍ:

OBĚ STRANY VYNÁSOBÍM

$$\omega = \omega_1 e^1 + \omega_2 e^2 + \dots \omega_m e^m = \bar{\omega}_1 e^1 + \dots + \bar{\omega}_m e^m \qquad / \cdot e_1$$

NAKRMÍM $-e_1$: $\quad \omega_1 = \bar{\omega}_1$

NAKRMÍM $-e_2$: $\quad \omega_2 = \bar{\omega}_2$

$\vdots \qquad \vdots$

NAKRMÍM $-e_m$: $\quad \omega_m = \bar{\omega}_m$

SHRNUTÍ: DOKAZOVALI JSME ŽE TO VYJÁDŘENÍ JE JEDNOZNAČNÉ, SPOREM. PŘEDPOKLÁDALI JSME, ŽE EXISTUJÍ DVĚ RŮZNÁ VYJÁDŘENÍ ČÍSEL ω A $\bar{\omega}$. NAKRMILI JSME TO VEKTORY e_1 AŽ e_m. A VYŠLO NÁM $\omega_m = \bar{\omega}_m$.

45.

DEFINICE: TENZOROVÝ SOUČIN

- ŘEKNĚME, ŽE MÁME DVA TENZORY u A v

$u \in T^k E$; $v \in T^l E$

u - MÁ k-HLAV
v - MÁ l-HLAV
} OBA DRACI SE PASOU NA STEJNÉM VEKTOROVÉM PROSTORU, ALE KAŽDÝ ŽERE JINÝ POČET VEKTORŮ.

TENZOROVÝ SOUČIN DEFINUJEME TAKTO:

$$(u \otimes v)(\xi_1; \xi_2; \dots \xi_k; \xi_{k+1}; \dots; \xi_{k+l}) \overset{\text{DEFINICE}}{=}$$

$$= u(\xi_1; \dots; \xi_k) \cdot v(\xi_{k+1}; \dots; \xi_{k+l})$$

DEFINICE TENZOROVÉHO SOUČINU

PRO TENZOROVÝ SOUČIN PLATÍ: (PRO VHODNÉ TYPY TENZORŮ)

1) $u \otimes v$ - $(k+l)$-TENZOR NA E (VEKT. PROSTOR)
2) $u \otimes v \neq v \otimes u$
3) $(k \cdot u) \otimes v = u \otimes (k \cdot v) = k \cdot (u \otimes v)$ ... $k \in R$
4) $u \otimes (v \otimes w) = (u \otimes v) \otimes w$ ASOCIATIVITA

VĚTA: E JE VEKTOROVÝ PROSTOR, DIMENZE $E = n$, MÁME JEHO BÁZI $\langle e_1; \dots; e_n \rangle$, K ODPOVÍDAJÍCÍ DUÁLNÍ BÁZE VEKTOROVÉHO PROSTORU E^* JE $\langle e^1; \dots; e^n \rangle$
POTOM MNOŽINA VŠECH TENZOROVÝCH SOUČINŮ:

$$e^{i_1} \otimes e^{i_2} \otimes \dots \otimes e^{i_k}, \quad 1 \leq i_1; i_2; \dots i_k \leq n$$

TVOŘÍ BÁZI VEKTOROVÉHO PROSTORU $T^k E$,
PLATÍ ŽE DIMENZE $T^k E = \underbrace{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_{k\text{-KRÁT}} = n^k$

ROZVRTÁNÍ NA PŘÍKLADU:

1) $\dim E = 4$, $\langle e_1; e_2; e_3; e_4 \rangle$
$\langle e^1; e^2; e^3; e^4 \rangle$

PTÁME SE, JAK VYPADÁ BÁZE VEKTOROVÉHO PROSTORU T^2E
MÁME DVOUHLAVÉHO DRAKA A ŽERE 4 PRINCEZNY (BÁZOVÉ VEKTORY)

TAKTO VYPADÁ TA BÁZE: $\boxed{e^{i_1} \otimes e^{i_2} \quad , 1 \leq i_1; i_2 \leq 4}$ ... $\dim T^2E = 4^2 = \underline{16}$

T^2E BÁZOVÉ VEKTORY VYPADAJÍ TAKTO:

$e^1 \otimes e^1; e^2 \otimes e^2; e^3 \otimes e^3; e^4 \otimes e^4; e^1 \otimes e^2; e^1 \otimes e^3; e^2 \otimes e^1; e^3 \otimes e^1;$
$e^1 \otimes e^4; e^4 \otimes e^1; e^2 \otimes e^3; e^3 \otimes e^2; e^2 \otimes e^4; e^4 \otimes e^2; e^3 \otimes e^4; e^4 \otimes e^3$

CELKEM JE JICH 16 TEDY $\dim T^2E = \underline{16}$

ROZVRTÁNÍ NA PŘÍKLADU

OPĚT VEKTOROVÝ PROSTOR $\underline{E}$ $\dim E = 6$
$\langle e_1; e_2; \ldots e_6 \rangle$; $\langle e^1; e^2; \ldots; e^6 \rangle$

ŘEKNĚME ŽE BUDEME MÍT 4 VEKTORY Z PROSTORU $\underline{E}$. $E \ni \xi_1 = (1;2;3;4;5;6)$
$\xi_2 = (7;8;9;10;11;12)$
$\xi_3 = (13;14;15;16;17;18)$
$\xi_4 = (19;20;21;22;23;24)$

NAŠÍM ÚKOLEM BUDE VYPOČÍTAT:

a) $(e^1 \otimes e^1 \otimes e^2 \otimes e^4)(\xi_1; \xi_3; \xi_2; \xi_4)$ = VYJDEME Z DEFINICE =

$$= \underbrace{e^1(\xi_1)}_{\text{1. SLOŽKA } \xi_1} \cdot \underbrace{e^1(\xi_3)}_{\text{1. SLOŽKA } \xi_3} \cdot \underbrace{e^2(\xi_2)}_{\text{2. SLOŽKA } \xi_2} \cdot \underbrace{e^4(\xi_4)}_{\text{4. SLOŽKA } \xi_4} = 1 \cdot 13 \cdot 8 \cdot 22 = 104 \cdot 22 = \underline{\underline{2288}}$$

b) $(e^2 \otimes e^6 \otimes e^2 \otimes e^4 \otimes e^1)(\xi_2; \xi_1; \xi_2; \xi_4; \xi_3) = 8 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 22 \cdot 13 = \underline{\underline{109824}}$

DŮKAZ: 1. KROK – PŘEDPOKLÁDÁME ŽE KAŽDÝ k-TENZOR LZE VYJÁDŘIT JAKO LINEÁRNÍ KOMBINACI

46.1

$\omega \in T^k$

BÁZOVÝCH VEKTORŮ:

$e^{i_1} \otimes e^{i_2} \otimes \dots \otimes e^{i_k}$

TO JEST: $\omega = \omega_{i_1 i_2} e^{i_1} \otimes e^{i_2} \otimes \dots \otimes e^{i_k}$ $\boxed{1 \le i_1; i_2; \dots; i_k \le n}$

BUDEME POČÍTAT:

ROZEPSÁNO POMOCÍ VEKTORŮ BÁZE + EINST. SUMACE

$$\underbrace{\omega}_{\text{NAKRMENO}}(\xi_1; \dots; \xi_k) = \omega(\underbrace{a_1^{i_1} e_{i_1}}_{\xi_1}; \underbrace{a_2^{i_2} e_{i_2}}_{\xi_2}; \dots \underbrace{a_j^{i_j} e_{i_j}}_{\xi_j}; \dots; \underbrace{a_k^{i_k} \cdot e_{i_k}}_{\xi_k}) =$$

= VYUŽIJEME MULTILINEARITU ZOBRAZENÍ =

$$= (a_1^{i_1} a_2^{i_2} \dots a_j^{i_j} \dots a_k^{i_k}) \cdot \underbrace{\omega(e_{i_1}; e_{i_2}; \dots; e_{i_k})}_{\omega_{i_1 i_2 \dots i_k} \in \mathbb{R}} =$$

TENZOR VYJÁDŘENÝ NA K-TICI TENZORŮ, TEDY REÁLNÉ ČÍSLO

$$= \underbrace{a_1^{i_1}}_{e^{i_1}(\xi_1)} \underbrace{a_2^{i_2}}_{e^{i_2}(\xi_2)} \dots \underbrace{a_j^{i_j}}_{e^{i_j}(\xi_j)} \dots \underbrace{a_k^{i_k}}_{e^{i_k}(\xi_k)} \cdot \omega_{i_1 \dots i_k} = \omega_{i_1 \dots i_k} \cdot e^{i_1}(\xi_1) \cdot e^{i_2}(\xi_2) \dots$$

$\dots e^{i_j}(\xi_j) \dots e^{i_k}(\xi_k)$ = DEFINICE TENZOROVÉHO SOUČINU =

$$= (\omega_{i_1 \dots i_k} \cdot e^{i_1} \otimes e^{i_2} \otimes \dots \otimes e^{i_j} \otimes \dots \otimes e^{i_k})(\xi_1; \dots; \xi_k)$$

$$\boxed{\omega = \omega_{i_1 \dots i_k} \cdot e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_k}}$$

1. KROK: PŘEDPOKLÁDÁME ŽE: $\omega_{i_1 \dots i_k} \cdot e^{i_1} \otimes e^{i_2} \otimes \dots \otimes e^{i_k} = 0 \overset{?}{\Rightarrow}$

(DOKAZOVÁNÍ JEDNOZNAČNOSTI) $\Rightarrow \omega_{i_1 \dots i_k} = 0$ $\quad / \cdot (e_{j_1}; e_{j_2}; \dots e_{j_k})$ ← NAPLNÍME PRO VŠECHNY PŘÍPUSTNÉ INDEXY

$$(\omega_{i_1 \dots i_k} \cdot e^{i_1} \otimes e^{i_2} \otimes \dots \otimes e^{i_k})(e_{j_1}; \dots; e_{j_k}) =$$

$$= \omega_{i_1 \dots i_k} \cdot \underbrace{e^{i_1}(e_{j_1})}_{\delta_{i_1 j_1}} \cdot \underbrace{e^{i_2}(e_{j_2})}_{\delta_{i_2 j_2}} \dots \underbrace{e^{i_k}(e_{j_k})}_{\delta_{i_k j_k}} = \omega_{j_1 j_2 \dots j_k} = 0$$

PŘÍKLAD: $E=\mathbb{R}^3$; $\dim E = 3$, JSME V ORTONORMÁLNÍ BÁZI $(e_1; e_2; e_3)$

$$\xi = \xi^1 e_1 + \xi^2 e_2 + \xi^3 e_3 = \xi^i e_i$$

$$\eta = \eta^1 e_1 + \eta^2 e_2 + \eta^3 e_3 = \eta^i e_i$$

$w: E \times E \to \mathbb{R}$ DEFINUJEME w JAKO ZOBRAZENÍ Z $E \times E$ DO $\mathbb{R}$, ZAVEDENÉ TAKTO:

$$w(\xi;\eta) = \underbrace{\xi^1}_{e^1(\xi)} \cdot \eta^1 + \underbrace{\xi^2}_{e^2(\xi)} \cdot \eta^2 + \underbrace{\xi^3}_{e^3(\xi)} \cdot \eta^3 \in \mathbb{R} \text{ (SKAL. SOUČIN)}$$

DOKAŽTE, ŽE w JE 2-TENZOR NA $\mathbb{R}^3$. MÁME 2 MOŽNOSTI

1. MOŽNOST – RUTINA

– DOKAZOVALI BYCHOM LINEARITU V OBOU SLOŽKÁCH TEDY:

1) $w(\xi_1 + \xi_2; \eta) = w(\xi_1;\eta) + w(\xi_2;\eta)$

2) $w(k \cdot \xi; \eta) = k \cdot w(\xi;\eta)$

I) $w(\xi; \eta_1 + \eta_2) = w(\xi;\eta_1) + w(\xi;\eta_2)$

II) $w(\xi; k\cdot\eta) = k \cdot w(\xi;\eta)$

2) MOŽNOST – PŘEMÝŠLENÍ

$$w = e^1 \otimes e^1 + e^2 \otimes e^2 + e^3 \otimes e^3$$

SHRNUTÍ MINULÉ HODINY

MĚLI JSME VEKTOROVÝ PROSTOR E O DIMENZI n, MĚLI JSME BÁZI $\langle e_1; \dots; e_n \rangle$. ZAVÁDĚLI JSME PROSTOR VŠECH k TENZORŮ NA VEKTOROVÉM PROSTORU OZNAČILI JSME HO $T^k E$ NA NĚM JSME ZAVÁDĚLI OPERACE

\+ A · . PAK JSME ZAVEDLI DUÁLNÍ PROSTOR $E^* = T^1 E$ ŘEKLI JSME ŽE VEŠKERÉ PRVKY LEŽÍCÍ V TOMTO PROSTORU (DUÁLNÍM PROSTORU) BUDEME OZNAČOVAT JAKO LINEÁRNÍ FORMY, TAKŽE JSME MĚLI FORMY $\underline{\omega \in E^*}$.

ZAVÁDĚLI JSME V NÁVAZNOSTI NA BÁZI $\langle e_1; \dots e_n \rangle$ $e^i \in E^*$ A TO TAK ŽE $e^i(\xi) = \xi^i$ $e^i(e_j) = \delta_{ij}$.

ŘÍKALI JSME, ŽE KAŽDÁ LINEÁRNÍ FORMA SE DÁ VYJÁDŘIT V TÉTO BÁZI e^i .. $\langle e^1; \dots e^n \rangle$:

$\omega = \omega_i e^i$ A BYLO DOKÁZÁNO $\omega_i = \omega(e_i) \in \mathbb{R}$

NA ZÁVĚR JSME V PROSTORU $\underline{T^k E}$ JAK VYPADÁ BÁZE JSOU TO VŠECHNY TENZOROVÉ SOUČINY TOHOTO TYPU $e^{i_1} \otimes e^{i_2} \otimes \dots e^{i_k}$, $1 \le i_1; i_2; \dots i_k \le n$ A ODTUD NÁM PLYNE TVRZENÍ PRO DIMENZI TOHOTO PROSTORU:

$$\dim T^k E = \underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{k\text{-KRÁT}} = n^k$$

TRANSFORMAČNÍ VZTAHY

- SPECIÁLNĚ PRO 2-TENZORY $\underline{E}$, DIMENZE $E = n$
- MÁME KONKRÉTNÍ BÁZI $\langle e_1; \dots; e_n \rangle$ TOMU ODPOVÍDÁ DUÁLNÍ BÁZE $\langle e^1; \dots; e^n \rangle$
- TÉTO BÁZI NECHŤ JE JAKÝKOLIV 2-TENZOR VYJÁDŘEN NÁSLEDOVNĚ:

TENZOR u $\rightarrow$ $u = u_{i_1 i_2} e^{i_1} \otimes e^{i_2}$; $1 \le i_1; i_2 \le n$

TOHLE PLATÍ PRO 1 BÁZI

VYBEREME JINOU BÁZI $\langle \bar{e}_1; \bar{e}_2; \dots; \bar{e}_n \rangle$ NECHŤ PLATÍ TATO TRANSFORMAČNÍ PRAVIDLA:

$\bar{e}_i = T_{ij} \cdot e_j$ $\quad T$ … MATICE PŘECHODU OD NEPROUŽKOVANÉ DO PROUŽKOVANÉ

TEĎ SE PODÍVÁME JAK TO DOPADNE, KDYŽ SI VEZMEME FORMU e^j A NAKRMÍME JI VEKTOREM $\underline{a}$

a – čku se přiřadí jeho odpovídající složka

$$\boxed{e^j(a) = a^j = T_{jk} \cdot \underbrace{\bar{a}^k}_{\bar{e}^k(a)} = T_{kj}\, \bar{e}^k(a)}$$

$$\boxed{e^j(a) = T_{kj}\, \bar{e}^k(a)}$$

TRANSFORMAČNÍ VZTAH MEZI ČÁRKOVANÝMI A NEČÁRKOVANÝMI FORMAMI

TEĎ ZAJÍMÁ NÁS JAK SE BUDE TRANSFORMOVAT $\omega_{i_1 i_2}$

$\omega = \omega_{i_1 i_2}\, e^{i_1} \otimes e^{i_2}$ = POUŽIJEME TRANSFORMAČNÍ VZTAH $= \omega_{i_1 i_2} (T_{j_1 i_1} \cdot \bar{e}^{j_1}) \otimes (T_{j_2 i_2} \cdot \bar{e}^{j_2}) =$

$$= \underbrace{\omega_{i_1 i_2} \cdot T_{j_1 i_1} \cdot T_{j_2 i_2}}_{\bar{\omega}_{j_1 j_2}} \cdot \bar{e}^{j_1} \otimes \bar{e}^{j_2}$$

MŮŽEME PŘEINDEXOVAT: $\bar{\omega}_{ij} = \omega_{kl} \cdot T_{ik} \cdot T_{jl}$

ÚPLNĚ NA ZAČÁTKU: $J'_{ij} = T_{ik} T_{jl} J_{kl}$ – PLATÍ PRO ORTONORMÁLNÍ BÁZI

PRO OBECNOU BÁZI PLATÍ:

$$\boxed{J' = T \cdot J \cdot T^{-1}}$$

<u>JEŠTĚ TROCHA TEORIE</u>

DOSUD JSME MĚLI TAKOVÉTO TENZORY:

ZOBRAZENÍ KTERÉ ŠLO Z E-čka DO MNOŽ. REÁL. ČÍSEL

k-TENZOR: $\omega: E \times E \times \ldots \times E \to \mathbb{R}$

48.

NYNÍ MŮŽEME TUTO DEFINICI ZAVÉST DALEKO OBECNĚJI:

BUDEME MÍT TENZOR $\omega : \underbrace{E \times E \times \dots \times E}_{k\text{-KRÁT}} \times \underbrace{E^* \times E^* \times \dots \times E^*}_{m\text{-KRÁT}} \to \mathbb{R}$

ZASE BUDEME PŘEDPOKLÁDAT, ŽE TO ZOBRAZENÍ JE LINEÁRNÍ V KAŽDÉM ARGUMENTU. VE VÝSLEDKU TEDY MÁME:

KRMENÍ, VEKTORY, JEDNO-FORMY

$$\omega(\xi_1; \xi_2; \dots \xi_k; \omega^1; \omega^2; \dots; \omega^m) \in \mathbb{R}$$

k-KRÁT KOVARIANTNÍ

m-KRÁT KONTRAVARIANTNÍ

k-HLAV ŽERE VEKTORY A m-HLAV ŽERE 1-FORMY (JSOU TO HLAVY JINÉHO TYPU)

POZN. JDE UDĚLAT:

MĚLI JSME PROSTOR $\underline{E}$ A SESTAVILI JSME K NĚMU PROSTOR DUÁLNÍ E^*. A PLATILA NĚJAKÁ TRANSFORMAČNÍ PRAVIDLA.

$E \to E^*$

K E^* MŮŽEME PŘIŘADIT NĚJAKÝ JINÝ VEKT. PROSTOR, KTERÝ K NĚMU BUDE DUÁLNÍ:

$E^* \longrightarrow \mathcal{E}$

A BUDE PLATIT, ŽE VEKTORY Z $\underline{\mathcal{E}}$ PODLÉHAJÍ STEJNÝM TRANSFORMAČNÍM PRAVIDLŮM JAKO VEKTORY Z PŮVODNÍHO PROSTORU $\underline{E}$ TAKŽE PLATÍ ZTOTOŽNĚNÍ,

$\underline{\mathcal{E} = E}$.

ÚVAHY KE KOVARIANTNÍM TENZORŮM

MÁME $\omega \in T^k E$ (k-TENZOR), KTERÝ ŽERE k ~~TENZOROVÝCH~~ VEKTOROVÝCH ARGUMENTŮ, ŘEKNEME, ŽE TENTO TENZOR JE SYMETRICKÝ, POKUD PLATÍ $\omega(\xi_1; \dots; \xi_i; \dots; \xi_j; \dots; \xi_k) =$

$= \omega(\xi_1, \dots, \xi_j, \dots, \xi_i, \dots, \xi_k)$ PRO VŠECHNA $i \neq j$
MOHU PROHODIT JAKÉKOLIV VEKTOROVÉ ARGUMENTY, NIC SE NA TENZORU NEZMĚNÍ.

A PAK MŮŽEME ŘÍCT, ŽE TAKOVÝTO TENZOR JE ANTISYMETRICKÝ PAK PLATÍ:

$$\omega(\xi_1, \dots, \xi_i, \dots, \xi_j, \dots, \xi_k) = -\omega(\xi_1, \dots, \xi_j, \dots, \xi_i, \dots, \xi_k)$$ PRO VŠECHNA $i \neq j$

ANTISYMETRICKÝ TENZOR MĚNÍ ZNAMÉNKO. STEJNĚ TO JDE NADEFINOVAT PRO KONTRAVARIANTNÍ TENZORY.

PŘÍKLAD: DOKAŽTE, ŽE $\omega(\xi, \eta) = \xi^1(\eta^2 - \eta^3) - (\xi^2 - \xi^3) \cdot \eta^1$ JE ANTISYMETRICKÝ TENZOR NA $\mathbb{R}^3$.

DOKAZUJEME: 1. KROK ŽE ZOBRAZENÍ ω JE 2-TENZOR NA $\mathbb{R}^3$. DOKAZUJEME ŽE JE TO:

a) $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
b) LINEARITA V 1. SLOŽCE
c) LINEARITA V 2. SLOŽCE

2. KROK DOKÁŽEME, ŽE TENZOR JE ANTISYM. TO JEST $\omega(\xi, \eta) = -\omega(\eta, \xi)$

1. KROK 1a: $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
URČITĚ TY VEKTORY CO TAM VYSTUPUJÍ MAJÍ 3 SLOŽKY $\eta \in \mathbb{R}^3$ A $\xi \in \mathbb{R}^3$. TOTO ZOBRAZENÍ ŽERE DVA VEKTORY, KAŽDÝ VEKTOR MÁ 3 SLOŽKY A VÝSLEDKEM JE REÁLNÉ ČÍSLO $\mathbb{R}$.

49.)

1b) $\omega(\xi_1+\xi_2;\eta) = \omega(\xi_1;\eta) + \omega(\xi_2;\eta)$ (*)

$\omega(\alpha\xi;\eta) = \alpha\omega(\xi;\eta)$ (**)

(*) LEVÁ STRANA $\omega(\xi_1+\xi_2;\eta) =$ DEFINICE =
POROVNÁME S PRAVOU

$$= \underbrace{(\xi_1+\xi_2)^1}_{\text{PRVNÍ SLOŽKA VEKTORU } (\xi_1+\xi_2)} \cdot (\eta^2-\eta^3) - [\underbrace{(\xi_1+\xi_2)^2 - (\xi_1+\xi_2)^3}_{\text{DRUHÁ + SLOŽKY + TŘETÍ}}]\cdot\eta^1 =$$

$$= \xi_1^1\eta^2 - \xi_1^1\eta^3 + \xi_2^1\eta^2 - \xi_2^1\cdot\eta^3 - \xi_1^2\cdot\eta^1 -$$

$$- \xi_2^2\eta^1 + \xi_1^3\eta^1 + \xi_2^3\eta^1$$

PRAVÁ STRANA

$\omega(\xi_1;\eta) + \omega(\xi_2;\eta) =$ DEFINICE =

$$= \xi_1^1(\eta^2-\eta^3) - (\xi_1^2-\xi_1^3)\eta^1 + \xi_2^1(\eta^2-\eta^3) - (\xi_2^2-\xi_2^3)\eta^1 =$$

$$= \xi_1^1\eta^2 - \xi_1^1\eta^3 - \xi_1^2\eta^1 + \xi_1^3\eta^1 + \xi_2^1\eta^2 - \xi_2^1\eta^3 - \xi_2^2\eta^1 + \xi_2^3\eta^1$$

LEVÁ STRANA = PRAVÉ STRANĚ

(**) LEVÁ STRANA

$\omega(\alpha\xi;\eta) =$ DEFINICE $= (\alpha\xi)^1(\eta^2-\eta^3) -$

$$- [(\alpha\xi)^2 - (\alpha\xi)^3]\eta^1 = \alpha\xi^1(\eta^2-\eta^3) - [\alpha\xi^2 - \alpha\xi^3]\eta^1 =$$

$$= \alpha\underbrace{[\xi^1(\eta^2-\eta^3) - (\xi^2-\xi^3)\cdot\eta^3]}_{\omega(\xi;\eta)} = \alpha\cdot\omega(\xi;\eta) = \text{PRAVÉ STRANĚ}$$

1c ANALOGICKY $\omega(\xi;\eta_1+\eta_2) = \omega(\xi;\eta_1) + \omega(\xi;\eta_2)$

$\omega(\xi;\alpha\eta) = \alpha\cdot\omega(\xi;\eta)$

DODĚLAT BOKEM A PŘINÉST KE ZKOUŠCE !!!

2 KROK $\omega(\xi;\eta) = -\omega(\eta;\xi)$

LEVÁ STRANA

$$\omega(\xi;\eta) = \text{DEFINICE} = \xi^1(\eta^2-\eta^3) - (\xi^2-\xi^3)\eta^1 =$$

$$= \xi^1\eta^2 - \xi^1\eta^3 - \xi^2\eta^1 + \xi^3\eta^1$$

PRAVÁ STRANA

$$\omega(\eta;\xi) = \text{DEFINICE} = \eta^1(\xi^2-\xi^3) - (\eta^2-\eta^3)\xi^1 =$$

$$= \underbrace{\xi^2\eta^1 - \xi^3\eta^1 - \xi^1\eta^2 + \xi^1\eta^3}_{\text{JSOU ZDE OPAČNÉ ZNAMÉNKA NEŽ U LEVÉ STRANY}} = -\omega(\xi;\eta)$$

11.4 TENZOR SETRVAČNOSTI A SYMETRICKÉ TENZORY

$$J = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{12} & J_{22} & J_{23} \\ J_{13} & J_{23} & J_{33} \end{pmatrix}$$

SYM. TENZOR SETRVAČNOSTI JE VYJÁDŘEN SYMETRICKOU MATICÍ

PRO SYMETRICKÉ MATICE LZE NAJÍT BÁZI V NÍŽ JE MATICE DIAGONÁLNÍ, PRVKY POUZE NA DIAGONÁLE:

$$\begin{pmatrix} \bar{J}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{J}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{J}_{33} \end{pmatrix}$$

ROVNĚŽ PLATÍ, ŽE JAKMILE TĚLESO ROZTOČÍME KOLEM JEDNÉ Z OS (JEDNÉ Z BÁZOVÝCH VEKTORŮ) A TAK V TÉTO ROTACI PŘETRVÁVÁ ANIŽ BYCHOM SE O TO MUSELI DÁLE PŘIČIŇOVAT