1

LAGRANGEOVA FORMULACE MECHANIKY

LOKÁLNÍ ZÁKONY

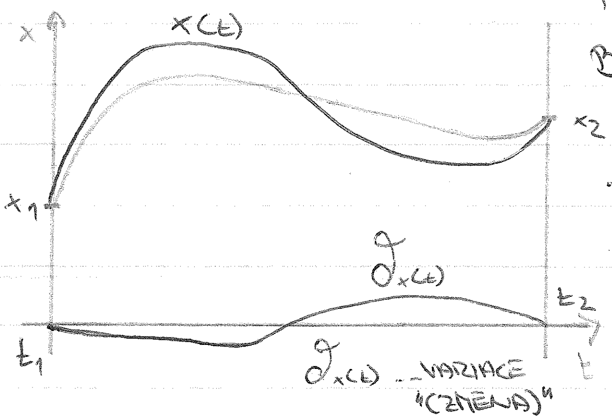
$m \cdot \vec{a} = \vec{F}$

(ZKOUMÁME, CO SE DĚJE V DANÉM ČASOVÉM OKAMŽIKU, V DANÉM BODĚ)

GLOBÁLNÍ ZÁKONY (ZKOUMÁ RADŠI POHYB JAKO CELEK PŘES DANÝ ČAS ...)

ZÁKON NEJKRATŠÍHO ČASU (FERMATŮV PRINCIP) - SVĚTLO SE V PROSTORU ŠÍŘÍ Z JEDNOHO BODU DO DRUHÉHO PO TAKOVÉ DRÁZE, ABY DOBA POTŘEBNÁ K PROBĚHNUTÍ TÉTO DRÁHY NABÝVALA CO NEJMENŠÍ HODNOTY

HAMILTONŮV PRINCIP - ŘÍKÁ, ŽE TĚLESO SE BUDE POHYBOVAT PO DRÁZE, VE KTERÉ BUDE NEJMENŠÍ "AKCE".



- MÁME ČÁSTICI, ZNÁME POČÁTEČNÍ A KONCOVOU POLOHU. PO JAKÉ TRAJEKTORII SE BUDE POHYBOVAT

AKCE - S $S = \int_{t_1}^{t_2} L\,dt$; $S = \int_{t_1}^{t_2} L(\vec{r}(t); \dot{r}(t))\,dt$ $([S] = J \cdot s)$

LAGRANGEOVA FUNKCE - L $L = T - V$ T - KINETICKÁ ENERGIE
V - POTENCIÁLNÍ -||-

Př.: AKCE JE MENŠÍ PRO POHYB ~~ZRYCHLENÝ~~ ROVNOMĚRNÝ NEŽ PROTRHANÝ.

POHYBOVÁ LAGRANGEOVA (EULEROVA) ROVNICE -
$$\boxed{\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x}}$$

~~$L[x(t) + \delta x(t); \dot{x}(t) + \delta \dot{x}(t); t]$~~

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L[x(t) + \delta x(t); \dot{x}(t) + \delta x(t); t] = \int_{t_1}^{t_2} L[x(t); \dot{x}(t); t] + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial x} \delta x(t) + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x}(t) + \text{ČVŘ}$$

- TUTO ROVNICI NYNÍ DOSADÍM DO ROVNICE AKCE.

$$S' = \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} L[x(t); \dot{x}(t); t]\,dt}_{S} + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial x} \delta x(t)\,dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x}(t) + \text{ČVŘ}$$

POSLEDNÍ INTEGRÁL PŘEVEDU POMOCÍ PER-PARTES NA:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot x}\delta x(t)\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot x}\right)\delta x + \frac{\partial L}{\partial \dot x}\frac{d}{dt}\delta x(t) =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot x}\right)\delta x + \frac{\partial L}{\partial \dot x}\delta \dot x(t)$$

↑ DOSADÍM DO INTEGRÁLU

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial L}{\partial \dot x}\delta \dot x(t)\,dt = \underbrace{\left[\frac{\partial L}{\partial \dot x}\delta x(t)\right]_{t_1}^{t_2}}_{0} - \int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot x}\right)\delta x(t)\,dt$$

PROTOŽE $\delta x(t_1) = \delta x(t_2) = 0$

$$S' = S + \underbrace{\int_{t_1}^{t_2}\underbrace{\left[\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot x}\right]}_{0}\delta x(t)\,dt}_{\text{JE NULOVÁ V KAŽDÉM ČASE}} + [CVR]$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot x} = \frac{\partial L}{\partial x}}$$

ROVNICE PRO VÍCE STUPŇŮ VOLNOSTI

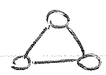
$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}}$$

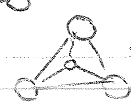
i - STUPNĚ VOLNOSTI

LANÓŘ - 3 TRANSLAČNÍ STUPNĚ VOLNOSTI

6 S.V. 3 ROTAČNÍ —||—

o - BOD 3 STUPNĚ VOLNOSTI

 - 6 STUPŇŮ VOLNOSTI

 - 6 STUPŇŮ VOLNOSTI

POLÁRNÍ SOUŘADNICE

$T = \frac{1}{2}m(\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2)$; V $\Rightarrow m\ddot r = mr\dot\varphi^2 - \frac{\partial V}{\partial r}$

PO KRUŽNICI = KONST

r ~~KONST~~ $\dot r = 0$

ZRYCHLENÍ DOSTŘEDIVÉ ZRYCHLENÍ: $-\dot\varphi^2 r$

DRUHÝ NEWTONŮV ZÁKON

$$m(\ddot r - \dot\varphi^2 r) = -\frac{\partial V}{\partial r}$$ - SLOŽKA V RADIÁLNÍM SMĚRU

$$2mr\dot r\dot\varphi + mr^2\ddot\varphi = -\frac{\partial V}{\partial \varphi}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\underbrace{\underbrace{mr^2}_{\text{MOMENT SETRVAČNOSTI}}\dot\varphi}_{\text{MOMENT HYBNOSTI}}\right) = -\frac{\partial V}{\partial \varphi}$$

VLASTNOSTI LAGRANGEOVY FCE

$L = T - V$

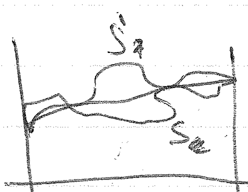
PŘEDSTAVÍME SI, ŽE TOHLE NEVÍME

MŮŽU MÍT ~~DVĚ ROVNICE~~ DVĚ RŮZNÉ LAG. ROVNICE, KTERÉ MI DAJÍ STEJNÉ POHYBOVÉ ROVNICE? ANO (MŮŽU VYNÁS. KONST)

MŮŽU PŘIČÍST I DERIVACI LIBOVOLNÉ FUNKCE SOUŘADNIC A ČASU (ALE NE RYCHLOSTI)

$$L' = L + \frac{df(q_1 \dots q_m; t)}{dt}$$

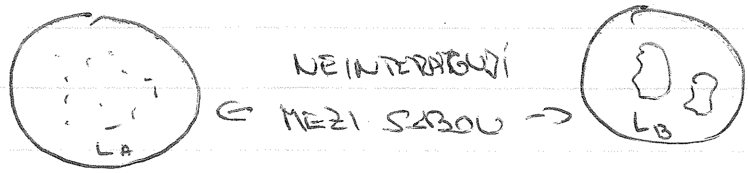
$$S' = \int_{t_1}^{t_2} L' \, dt = \int_{t_1}^{t_2} L \, dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{df(q_1 \dots q_m; t)}{dt} \, dt = S + \underbrace{\left[f(q_1 \dots q_m; t)\right]_{t_1}^{t_2}}_{\text{NEZÁVISÍ NA TRAJEKTORII (KONST)}}$$



S a S' NABÍVAJÍ MINIMA PRO STEJNOU TRAJEKTORII

q JE PRO KAŽDOU TRAJEKTORII JINÉ

PODSYSTÉM A PODSYSTÉM B



$L = L_A + L_B$

JE-LI SYSTÉM SLOŽEN ZE DVOU PODSYSTÉMŮ L_A A L_B

PAK $L = L_A + L_B$ $L_A[q_1 \dots q_{m_0}; \dot q_1 \dots \dot q_m; t]$ $L_B[q_{m+1} \dots q_m; \dot q_{m+1} \dots \dot q_m; t]$

PROSTOR SE OBECNĚ MŮŽE JEVIT JAKO ~~ANIZOTROPNÍ I NEHOMOGENNÍ~~

ČAS — I — NEHOMOGENNÍ (RŮZNÉ ČASOVÉ OKAMŽIKY NEJSOU EKVIVALENTNÍ)

PŘEDSTAVÍME SI VOLNOU ČÁSTICI

SOUSTAVA VOLNÝCH ČÁSTIC $L = \sum_a \frac{m_a}{2} v_a^2$

V INERCIÁLNÍ SOUSTAVĚ JE PROSTOR HOMOGENNÍ A IZOTROPNÍ

$L[\vec r; \dot{\vec r}; t]$ − V INERCIÁLNÍ SOUSTAVĚ JE L POUZE FUNKCÍ $\dot{\vec r}$

TEDY $L[\dot{\vec r}]$ ZÁVISÍ POUZE NA $\dot{\vec r}$ ... v^2 − LÉPE SE VYJADŘUJE

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec r}} = 0$$

v = KONST − POHYBUJE SE ČÁSTICE ROVNOMĚRNĚ PŘÍMOČAŘE ⇒ ZÁKON SETRVAČNOSTI

GALILEIHO PRINCIP RELATIVITY – EXISTUJE NEKONEČNĚ MNOHO INERCIÁLNÍCH SOUSTAV, KTERÉ SE VZÁJEMNĚ POHYBUJÍ ROVNOMĚRNĚ PŘÍMOČAŘE, A V NICH JSOU ZÁKONY MECHANIKY STEJNÉ.

S – INERCIÁLNÍ

S' – STÁLOU RYCHLOSTÍ $\vec{u}$ VZHLEDEM K S

JE TAKY INERCIÁLNÍ

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u} \quad \Big| \int dt$$

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{u}t$$

$$t' = t$$

GALILEIHO TRANSFORMACE

PŘEPOČET SOUŘADNIC MEZI SOUSTAVAMI

LAGRANGIÁN PRO S' ZE KTERÉ KOUKÁM NA SOUSTAVU S

$$L' = L(v'^2) = L((\vec{v} - \vec{u})^2) = L(v^2 - 2\vec{u}\vec{v} + \vec{u}^2) = L(v^2) - 2\frac{\partial L(v^2)}{\partial v^2} uv + [ČVŘ]$$

$$L' - L = -2\frac{\partial L(v^2)}{\partial v^2} uv$$

LIŠÍ SE TEDY O $\frac{df(r;t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial r} v + \frac{\partial f}{\partial t}$

$$-\frac{\partial L}{\partial v^2} \cdot 2\vec{u}\vec{v} = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{v}$$

NEZÁVISÍ NA v NEZÁVISÍ NA r

NEZÁVISÍ NA v PROTOŽE $f(r;t)$ PROTO $=0$

$L(r;t)$ $\quad \frac{\partial L}{\partial v^2} = KONST \quad L = KONST \cdot v^2 = \frac{m}{2} \cdot v^2$

DVOJNÁSOBEK KONSTANTY JE HMOTNOST

SOUSTAVA INTERAGUJÍCÍCH ČÁSTIC

$$L = \sum_a \frac{m_a}{2} v_a^2 - V(\vec{r}_1, \dots r_a; t)$$

ZÁKONY ZACHOVÁNÍ

INTEGRÁLY POHYBU - ZACHOVÁVAJÍCÍ SE VELIČINY

HYBNOST SE ZACHOVÁVÁ KDYŽ NA SOUSTAVU NEPŮSOBÍ VNĚJŠÍ SÍLY.

MÁME: $q_1 \dots q_m$ NECHŤ V L MENÍ q_1

$\dot q_1 \dots \dot q_m$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_1} = \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0$$

TOHLE JE NULA

KDYŽ, PAK $\frac{\partial L}{\partial \dot q_1} = \underline{\text{KONST.}}$

$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot q_1}$ - TZV ZOBECNĚNÁ HYBNOST, PŘÍSLUŠNÁ ZOBECNĚNÉ SOUŘADNICI q_k

ZACHOVÁVÁ SE

ZÁKON ZACHOVÁNÍ ENERGIE

V SOUSTAVĚ V NÍŽ LAGRANGIÁN NEZÁVISÍ EXPLICITNĚ NA ČASE $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, ~~NEMĚNÍ~~ VNĚJŠÍ PODMÍNKY SE NEMĚNÍ V ČASE

ZACHOVÁVÁ SE ZOBECNĚNÁ ENERGIE

$$\mathcal{E} = \left(\sum_i p_i \dot q_i\right) - L(q_1 \dots q_m; \dot q_1 \dots \dot q_m; t)$$

MŮŽE SE OTOM PŘESVĚDČIT DERIVACÍ PODLE ČASU

$$\dot{\mathcal{E}} = \underbrace{\sum_i (\dot p_i \dot q_i + p_i \ddot q_i) - \sum_i \Big(\underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_i}}_{\dot p_i} \dot q_i + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}}_{p_i} \ddot q_i\Big)}_{0} - \frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

ZÁKON ZACHOVÁNÍ HYBNOSTI

- NA SOUSTAVU NEPŮSOBÍ VNĚJŠÍ SÍLY, ČÁSTICE UVNITŘ SOUSTAVY, ALE MOHOU INTERAGOVAT
- POKUD SOUSTAVU JAKO CELEK PŘEMÍSTÍM O KOUSEK VEDLE L (LAGRANGIÁN) SE NEZMĚNÍ.

$L \xrightarrow[\text{o } \vec R]{\text{PŘEMÍSTÍM}} L'$ $\quad \vec r_a \to \vec r_a + \vec R$

$$L \to L' = L(\vec r_1 + \vec R \dots \vec r_N + \vec R; \dot{\vec r}_1 \dots \dot{\vec r}_N) = L + \sum_a \frac{\partial L}{\partial \vec r_a} \cdot \vec R + \text{ČVŘ}$$

$$L' = L$$

PROTOŽE SE JEDNÁ O IZOLOVANOU SOUSTAVU PAK $\Rightarrow \sum_a \frac{\partial L}{\partial r_a} = 0$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot r_a}\right) = \frac{\partial L}{\partial r_a}$$

$\frac{\partial L}{\partial \dot r_a} = \vec{p}_a$, $\quad \frac{\partial L}{\partial r_a} = 0$

$$0 = \sum_a \frac{\partial L}{\partial r_a} = -\sum_a \frac{\partial V}{\partial r_a} = \sum_a F_a = 0$$

ZÁKON AKCE A REAKCE

[redacted]

$$\frac{d}{dt}\sum_a \vec{p}_a = \frac{dp}{dt}$$

p - CELKOVÁ HYBNOST

$\vec{p}_a$ ZOBECNĚNÁ HYBNOST

$$P = \sum_a p_a = \sum_a m_a \dot r_a$$

CELKOVÁ HYBNOST SOUSTAVY $\underline{P}$ MÁ VŮČI JINÝM INERCIÁLNÍM SOUSTAVÁM ZJEVNĚ RŮZNÉ HODNOTY. SOUSTAVA S' SE POHYBUJE VZHLEDEM S RYCHLOSTÍ u — $\dot r_a = \dot r_a' + u_a$

$$P = P' + u\sum_a m_a$$

PRO $P' = 0$ POTOM $u = V = \frac{P}{\sum_a m_a}$ $\quad V = \dot R$

KDE $R = \frac{\sum_a m_a r_a}{\sum_a m_a}$

TĚŽIŠTĚ

HMOTNÝ STŘED

HYBNOST SOUSTAVY

$$P = M\cdot\vec V = \sum_a m_a \cdot \vec V$$

ZÁKON ZACHOVÁNÍ MOMENTU HYBNOSTI

OPĚT IZOLOVANÁ SOUSTAVA ČÁSTIC, PROSTOR JE IZOTROPNÍ $(L = L')$ (LAGRANGIÁN SE NEZMĚNÍ ANI TEHDY KDYŽ SOUSTAVU POOTOČÍME). OTOČÍM SOUSTAVU O MALÝ ÚHEL φ POLOHOVÝ VEKTOR r_a SE POTOM ZMĚNÍ NA $r_a' = r_a + \varphi \times r_a$; STEJNĚ I RYCHLOST $\dot r_a$ PŘEJDE NA $\dot r_a' = \dot r_a + \varphi \times \dot r_a$

$$L' = L(r_a + \varphi \times r_a;\ \dot r_a + \dot r_a \times \varphi) = L(r_a) + \sum_a\left(\frac{\partial L}{\partial r_a}\varphi \times r_a + \frac{\partial L}{\partial \dot r_a}\varphi \times \dot r_a\right) + \text{ZBYTEK}$$

JESTLI $L = L'$ PAK TOHLE MUSÍ BÝT $\underline{0}$

$(L = L')$

$$= \varphi \cdot \sum_a\left(r_a \times \frac{\partial L}{\partial r_a} + \dot r_a \times \frac{\partial L}{\partial \dot r_a}\right) = \varphi \sum_a (r_a \times \dot p_a + \dot r_a \times p_a) = \varphi \cdot \frac{dL}{dt}$$

$$\underbrace{\varphi \sum_a \frac{d}{dt}(\vec r_a \times \vec p_a)}$$

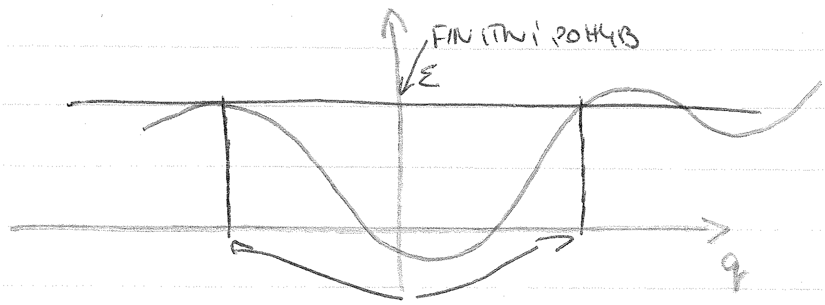
$L = \sum_a r_a \times p_a$ MOMENT HYBNOSTI SOUSTAVY

TEORÉM EMMY NOETHEROVÉ

- S KAŽDOU SYMETRIÍ LAGRANGIÁNU SOUVISÍ NĚJAKÝ ZÁKON ZACHOVÁNÍ.

INTEGRACE POHYBOVÝCH ROVNIC (V JEDNÉ DIMENZI)

- SOUSTAVA S JEDNÍM STUPNĚM VOLNOSTI (ČÁSTICE VÁZANÁ NA NĚJAKOU KŘIVKU



$$L = \frac{m}{2}\dot{q} - V(q)$$

$$m\ddot{q} = -\frac{dV}{dq} \quad / \cdot \dot{q}$$

$$m\cdot\dot{q}\cdot\ddot{q} = -\frac{dV}{dq}\cdot\frac{dq}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\dot{q}^2\right) = -\frac{dV}{dt}$$

$$\to \frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}m\dot{q}^2 + V(q)\right) = 0$$

ČÁSTICE TADY BUDE OSCILOVAT

INTEGRAČNÍ KONSTANTA

ZACHOVÁVÁME ZOBECNĚNOU ENERGII: $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$

$$\mathcal{E} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q} - L = m\cdot\dot{q}^2 - \tfrac{1}{2}m\dot{q}^2 + V(q) = \tfrac{1}{2}m\dot{q}^2 + V(q) = E$$

OBECNÁ ENERGIE

VYPOČÍTÁME $\dot{q}$

$$\dot{q} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(q))}$$

$$\frac{dq}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(q))} \quad dt = \frac{dq}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V(q))}} \Rightarrow t = \pm\int \frac{dq}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V(q))}} =$$

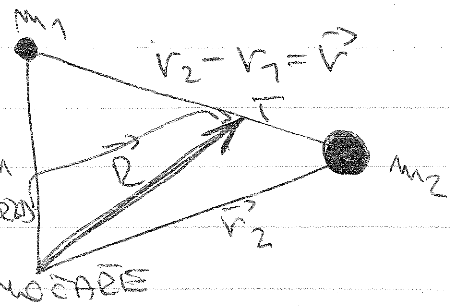
$$t = \pm\sqrt{\frac{m}{2}}\int\frac{dq}{\sqrt{E-V(q)}}$$

PROBLÉM DVOU TĚLES

UVAŽUJEME IZOLOVANOU SOUSTAVU DVOU TĚLES S HMOTNOSTÍ m_1 A m_2. V IZOTROPNÍM PROSTORU ZÁVISÍ JEJICH POTENCIÁLNÍ ENERGIE POUZE NA JEJICH VZDÁLENOSTI

$$L = \frac{m_1}{2}\dot{r}_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot{r}_2^2 - \underbrace{V(|r_2 - r_1|)}_{\text{ŠPATNĚ SE ŘEŠÍ}}$$

LEPŠÍ VZÍT HMOT. STŘED



HMOTNÝ STŘED SE POHYBUJE ROVNOMĚRNĚ PŘÍMOČAŘE

$$R = \frac{m_1\vec r_1 + m_2\vec r_2}{m_1+m_2} \quad ; \quad r = \vec r_2 - \vec r_1 \qquad r_2 = r + r_1$$

$$R = \frac{m_1 r_1 + m_2 r + m_2 r_1}{m_1+m_2} = \frac{m_1\vec r_1 + m_2\vec r_1}{m_1+m_2} + \frac{m_1\vec r}{m_1+m_2} =$$

$$= \frac{\cancel{(m_1+m_2)}\,\vec r_1}{\cancel{(m_1+m_2)}} + \frac{m_2}{m_1+m_2}\,\vec r = R$$

$$\vec r_1 = \vec R - \frac{m_2}{m_1+m_2}\,\vec r$$

$$\vec r_2 = \vec R + \frac{m_1}{m_1+m_2}\,\vec r$$

$$L = \frac{m_1+m_2}{2}\,\dot{\vec R}^2 + \frac{\mu}{2}\,\dot{\vec r}^2 - V(r)$$

ROZPADNE SE NÁM NA DVĚ ČÁSTI

$$\mu = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1+m_2}$$

R – ROVNOMĚRNÝ PŘÍMOČARÝ POHYB

REDUKOVANÁ HMOTNOST

PŘEDSTAVÍM SI ČÁSTICI, KTERÁ SE POHYBUJE V CENTRÁLNÍM ~~POTENCIÁLU~~ POLI, KTERÉ ZÁVISÍ JEN NA VZDÁLENOSTI OD POČÁTKU A TA ČÁSTICE MÁ HMOTNOST μ. TOTO JE POTOM LAGRANGIÁN TÉTO ČÁSTICE.

ČÁSTICE V CENTRÁLNÍM POLI

$$L = \frac{m}{2}\cdot \dot r^2 - V(r)$$

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot r^2 + r^2\cdot\dot\varphi^2\right) - V(r)$$

ČÁSTICI MŮŽEME UMÍSTIT DO CENTRA POLE KDE BUDE LAGRANGIÁN INVARIANTNÍ VŮČI OTOČENÍ SYSTÉMU KOLEM LIBOVOLNÉ OSY. ZACHOVÁVÁ SE TEDY MOMENT HYBNOSTI $\underline{L}$

$$\underline{L} = r \times p$$

JSOU NAVZÁJEM KOLMÉ, LEŽÍ V ROVINĚ ⊥ KOLMÉ K $\underline{L}$ A PROCH. POČÁTKEM O

POHYB ČÁSTICE JE TEDY ROVINNÝ, ZAPÍŠEME

$L=\frac{m}{2}(\dot r^2 + r^2\cdot\dot\varphi^2) - V(r)$ POHYB V ROVINĚ CENTRÁLNÍM POLI

POHYBOVÁ ROVNICE PRO φ: $\varphi: \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi} = \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$

ZACHOVÁVÁ SE ZOBECNĚNÁ HYBNOST

$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial\dot\varphi} = mr^2\dot\varphi = konst = l$ - MOMENT HYBNOSTI

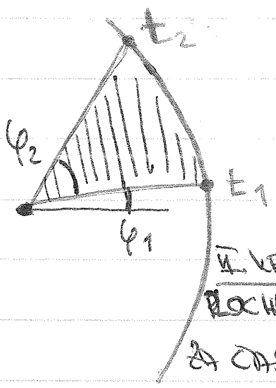
$(I\cdot\omega)$

VYJÁDŘÍME $\dot\varphi$

$\frac{d\varphi}{dt} = \dot\varphi = \frac{l}{mr^2}$

$dt = \frac{mr^2}{l}\cdot d\varphi$

$\int_{t_1}^{t_2} dt = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{mr^2}{l} d\varphi$



$t_2 - t_1 = \frac{m}{l}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi)\, d\varphi$

II. KEPLERŮV ZÁKON

PLOCHA OPSANÁ PRŮVODIČEM ZA ČASOVÝ ÚSEK JE ÚMĚRNÁ TOMUTO ÚSEKU.

$t_2-t_1 = \frac{m}{l}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_0^{r(\varphi)} r\,dr\,d\varphi = \frac{2m}{l}\cdot S$

DÁLE VYUŽIJEME ZACHOVÁNÍ ZOBECNĚNÉ ENERGIE

$E = \frac{m}{2}(\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2) + V(r) = konst. = \varepsilon$

$\dot\varphi$ - DOSAZUJI DO ENERGIE NE DO LAGRANGIÁNU

$E = \frac{m}{2}\cdot\dot r^2 + \frac{m}{2}\cdot r^2\cdot\frac{l^2}{m^2r^4} + V(r)$

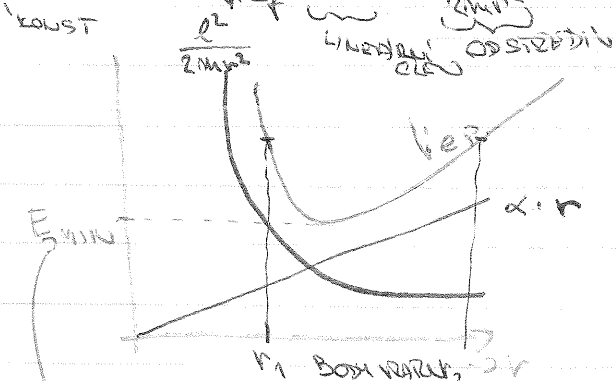
$E = \underbrace{\frac{1}{2}m\dot r^2}_{\text{KINET. ENERGIE}} + \underbrace{\frac{l^2}{2mr^2} + V(r)}_{\text{POTENCIÁLNÍ ENERGIE}}$

$V_{ef} = \frac{l^2}{2mr^2} + V(r)$

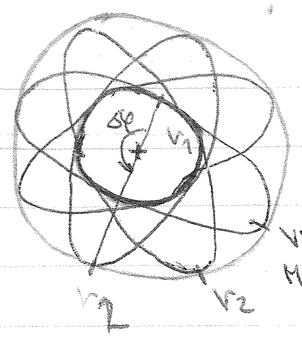
$E = \frac{1}{2}m\dot r^2 + V_{ef}$ REDUKCE NA ČÁSTICI NA PŘÍMCE r

Př: $V(r) = \alpha\cdot r$ (α konst)

$V_{ef} = \underbrace{\alpha\cdot r}_{\text{LINEÁRNÍ ČLEN}} + \underbrace{\frac{l^2}{2mr^2}}_{\text{ODSTŘEDIVÝ ČLEN}}$



NEJMENŠÍ MOŽNÁ ENERGIE - NEBUDE SE V NĚM HÝBAT



DEFINUJEME ÚHEL VRATU $\Delta\varphi$, TO JE ZMĚNA POLÁRNÍHO ÚHLU φ ODPOVÍDAJÍCÍ ZMĚNĚ r OD r_1 DO r_2.
POKUD $\Delta\varphi$ JE RACIONÁLNÍ NÁSOBEK π TRAJEKTORIE JSOU UZAVŘENÉ

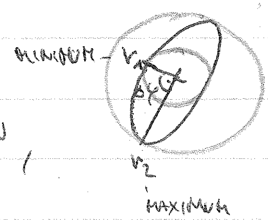
$\Delta\varphi = \frac{P}{Q}\pi$ $\quad P, Q$ … CELÁ ČÍSLA

CELKOVÁ ZMĚNA POLÁRNÍHO ÚHLU PO $2Q$ ZMĚNÁCH r OD r_1 DO r_2 A ZPĚT BUDE $\Phi = 2Q\cdot\Delta\varphi = \underline{2\pi P}$

PŘI HOOKŮV POTENCIÁL $V = \frac{1}{2}k\cdot r^2$

JEN VE DVOU POTENCIÁLECH JE TRAJEKTORIE UZAVŘENÁ HOOKŮV POTEN. A KEPLERŮV, PRO KEPLERŮV, ALE NE VŽDY

ČÁSTICE PŘILETÍ Z NEKONEČNA A ZASE TAM VRÁTÍ



$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2} = \frac{P}{Q}\pi = \frac{1}{2}\pi$

$P=1 \quad Q=2$

VÝPOČET ČASOVÉ ZÁVISLOSTI $r=r(t)$

$$\frac{dr}{dt} = \dot{r} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E-V(r)\right) - \frac{\ell}{2mr^2}} \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} = \frac{\ell}{mr^2}$$

$$t = \pm\int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E-V(r)\right] - \frac{\ell}{2mr^2}}} \qquad \frac{\frac{dr}{dt}}{\frac{d\varphi}{dt}} = \frac{dr}{d\varphi}$$

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E-V(r)\right] - \frac{\ell^2}{2mr^2}}}{\frac{\ell}{mr^2}}$$

$$d\varphi = \frac{\ell}{mr^2\sqrt{\frac{2}{m}\left[E-V(r)\right] - \frac{\ell^2}{2mr^2}}}\,dr$$

$$\varphi = \int \frac{\ell}{mr^2\sqrt{\frac{2}{m}\left[E-V(r)\right] - \frac{\ell^2}{2mr^2}}}\,dr$$

ÚHEL VRATU

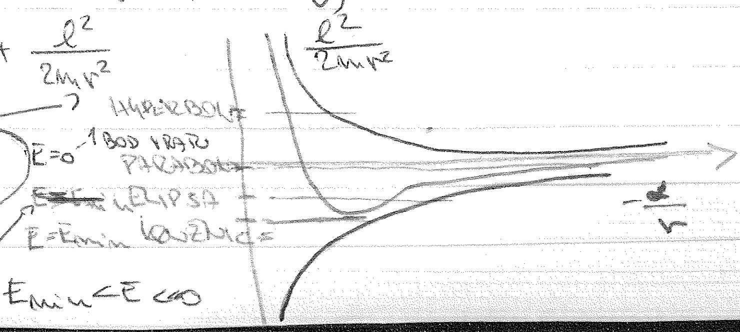
$$\Delta\varphi = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\ell}{mr^2\sqrt{\frac{2}{m}\left(E-V(r)\right) - \frac{\ell^2}{2mr^2}}}\,dr$$

KEPLEROVA ÚLOHA (NEWTONŮV POTENCIÁL)

$V = -\frac{\alpha}{r}$; $V_{ef} = -\frac{\alpha}{r} + \frac{\ell^2}{2mr^2}$

PRO MALÁ r PŘEVAŽÍ TENHLE ČLEN

PRO VELKÁ r – α



6.

ZÁKON ZACHOVÁNÍ MOMENTU HYBNOSTI, TEN PLATÍ V KAŽDÉM CENTRÁLNÍM POLI, PLYNOU Z NĚHO ROVINNOST POHYBU (POHYB SE ODEHRÁVÁ V ROVINĚ) DRUHÝ KEPLERŮV ZÁKON, PLYNE Z NĚJ TAKÉ TO, ŽE V ROVNICI S φ A r SE TOHO φ MŮŽEME ZBAVIT. ROVNICI PRO r NEZÍSKÁME TAK, ŽE BUDEME DOSAZOVAT ZA $\dot{\varphi}$, ALE DOSADÍME HO DO ROVNICE PRO ZACHOVÁNÍ ENERGIE. MÁME JEN 2 POTENCIÁLY, KTERÉ DÁVAJÍ UZAVŘENÉ TRAJEKTORIE PRO VŠECHNY MOŽNÉ HODNOTY ENERGIE A MOMENTU HYBNOSTI, PRO VŠECHNY MOŽNÉ KOMBINACE POKUD JE TEN POHYB FINITNÍ (KOMPLETNÍ OD NEKONEČNA) HOOKŮV A NEWTONŮV POTENCIÁL.

ROZPTYL

HAMILTONOVA FORMULACE MECHANIKY

HAMILTONOVA FUNKCE – ALTERNATIVA K LAGRANGEOVÝM ROVNICÍM
– PODOBNÁ SE ZOBECNĚNÉ ENERGII

$$H(q_1 \dots q_n; p_1 \dots p_n; t) = \sum_i (p_i \cdot \dot{q}_i) - L$$

$$\boxed{\begin{gathered} L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - V(r;\varphi) \\ p_r = m\dot{r} \qquad \dot{r} = \frac{p_r}{m} \\ p_\varphi = m r^2 \dot{\varphi} \\ H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} + V(r;\varphi) \qquad \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2} \end{gathered}}$$

PŘ) 1 ČÁSTICE NA PŘÍMCE V POTENCIÁLU $V(q)$

$$L = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - V(q)$$

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m \cdot \dot{q} \qquad \dot{q} = \frac{p}{m}$$

$$H = p \cdot \dot{q} - L = p \cdot \frac{p}{m} - \frac{1}{2} m \cdot \frac{p^2}{m^2} + V(q)$$

$$H = \frac{p^2}{m} - \frac{1 \cdot p}{2m} + V(q)$$

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(q)$$

- HAMILTONOVA FORMULACE MECHANIKY PRACUJE S q_i, p_i NAMÍSTO $q_i; \dot{q}_i$.

PŘ:) ČÁSTICE V ROVINĚ V POLI CENTRÁLNÍ SÍLY

$$L(r;\varphi;\dot{r};\dot{\varphi}) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - V(r)$$

PŘ) NABITÁ ČÁSTICE V ELMAG POLI

$$L = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + e \dot{\vec{r}} \cdot \underset{\text{VEKTOROVÝ POTENCIÁL}}{\vec{A}(\vec{r};t)} - \underbrace{e\varphi(\vec{r};t)}_{\text{SKALÁRNÍ POTENCIÁL}}$$

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = m\dot{\vec{r}} + e\vec{A} \qquad H = \underbrace{\frac{(\vec{p} - e\vec{A})^2}{2m}}_{\text{KINETICKÁ ENERGIE ČÁSTICE}} + e\varphi$$

-

$$H(p;q;t) = H = p \cdot \dot{q} - L = p\dot{q}(q;p) - L(q;\dot{q}(q;p);t)$$

ZDERIVUJEME PODLE q

$$\left(\frac{\partial H}{\partial q}\right)_{p;t\ \text{KONST}} = p \cdot \cancel{\frac{\partial \dot{q}}{\partial q}} - \frac{\partial L}{\partial q} - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}}_{p} \cdot \cancel{\frac{\partial \dot{q}}{\partial q}} = -\frac{\partial L}{\partial q} = -\dot{p}$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right) = \dot{q} + p \cdot \cancel{\frac{\partial \dot{q}}{\partial p}} - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}}_{p} \cdot \cancel{\frac{\partial \dot{q}}{\partial p}} = \dot{q}$$

$$\boxed{\begin{gathered} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \end{gathered}}$$

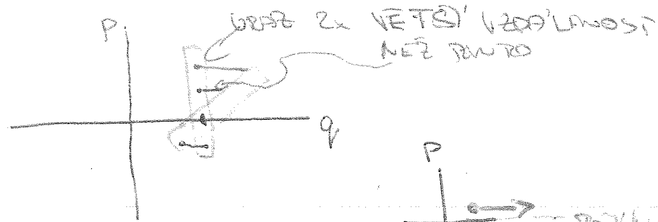
PŘ)

$$L = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - V(q) \qquad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}$$

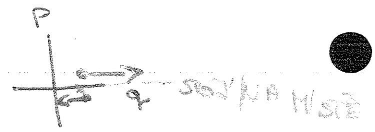
$$H = \frac{p}{2m} + V(q) \qquad \dot{p} = \frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\partial V}{\partial q}$$

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m \cdot \dot{q}$$

$$\ddot{q} = \frac{\dot{p}}{m} = -\frac{1}{m} \cdot \frac{\partial V}{\partial q}$$



FÁZOVÝ PROSTOR



NA SOUŘADNICOVÝCH OSÁCH $q(x)$; $p(y)$

Př: ČÁSTICE S 1 STUP. VOLNOSTI PRO 1 $q(x)$; $p(y)$ – DVOJROZM. PROSTOR

V HOMOGENNÍM POLI, ČÁSTICE SE POHYBUJE PO SVISLÉ PŘÍMCE

$$H = \frac{p^2}{2m} - m g \cdot q$$

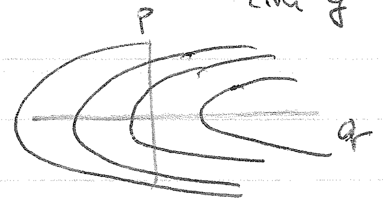
$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \Rightarrow q = \int \frac{p}{m} dt = \int \left(g t + \frac{a}{m}\right) dt = \frac{1}{2} g t^2 + \frac{a \cdot t}{m} + b$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = m \cdot g \Rightarrow p = \int m g \, dt = m g t + a = p \qquad t = \frac{p - a}{m g}$$

$\boxed{\text{SLOUŽÍ PRIMÁRNĚ K POPISU STAVU SYSTÉMU POMOCÍ BODŮ}}$

$$q = \frac{1}{2} g \frac{(p-a)}{m^2 g^2} + \frac{a(p-a)}{m^2 \cdot g} + b = \frac{1}{2m^2 \cdot g}\left(p^2 - 2pa + a^2 + 2pa - 2a^2\right) +$$

$$+ b = \frac{1}{2m^2 g}\left(p^2 - a^2\right) + b = \frac{p^2}{2m^2 g} + \underbrace{\left(b - \frac{a^2}{2mg}\right)}$$



$b; a$ … KONST $\quad \frac{E}{mg}$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{dH(q_i, p_i, t)}{dt} = \underbrace{\left(\frac{\partial H}{\partial q}\right)}_{-\dot{p}} \dot{q} + \underbrace{\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)}_{\dot{q}} \dot{p} + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

H NEZÁVISÍ NA ČASE EXPLICITNĚ, TAKŽE SE ZACHOVÁVÁ

PROTOŽE SE H ZACHOVÁVÁ MŮŽU NAPSAT:

$$\frac{p^2}{2m} - m g q = \underset{\text{KONST}}{E} \qquad q = \frac{p^2}{2m^2 \cdot g} - \frac{E}{m \cdot g}$$

KANONICKÉ TRANSFORMACE

JSOU TO TRANSFORMACE VE FÁZOVÉM PROSTORU, TRANSFORMACE OD PŮV. ~~VELI~~ VELIČIN NA NOVÉ

$$(q_1 \dots q_N; p_1 \dots p_N) \to (Q_1 \dots Q_N; P_1 \dots P_N)$$

KANONICKÁ TRANSFORMACE JE TAKOVÁ TRANSFORMACE, KTERÁ ZACHOVÁVÁ TVAR HAMILTONOVÝCH ROVNIC

$$S = \int L\,dt \qquad H = p\cdot\dot q - L \;;\; L = p\dot q - H$$

$$S = \int (p\dot q - H)\,dt = \int (p\,dq - H\,dt)$$

PROTOŽE SE DIFERENCIÁLY OBOU AKCÍ LIŠÍ O ÚPLNÝ DIFERENCIÁL, BUDOU SE OBĚ AKCE LIŠIT O KONSTANTU, PROTO BUDOU NABÝVAT MINIMA PRO TUTÉŽ TRAJEKTORII.

$$S' = \int (P\,dQ - H'\,dt)$$ ODEČTEME

$$p\,dq - P\,dQ + (H' - H)\,dt = dF(q; Q; t)$$

PŘEDSTAVÍM SI, ŽE FUNKCE F JE FUNKCÍ PRÁVĚ TĚCH HODNOT V DIFERENCIÁLU

$$dF(q; Q; t) = \frac{\partial F}{\partial q}\,dq + \frac{\partial F}{\partial Q}\,dQ + \frac{\partial F}{\partial t}\,dt$$ DIFERENCIÁL

$$\Rightarrow p\,dq - P\,dQ + (H' - H)\,dt = $$

TOHLE SE ROVNÁ, A ABY SE TO ROVNALO TAK SE MUSÍ ROVNAT TY VÝRAZY PŘÍSLUŠNÝCH DIFERENCIÁLŮ

$$\boxed{p = \frac{\partial F}{\partial q} \;;\; P = -\frac{\partial F}{\partial Q}} \qquad H' - H = \frac{\partial F}{\partial t} \qquad H' = H + \frac{\partial F}{\partial t}$$ MÍT

VYJÁDŘENÍ KANONICKÉ TRANSFORMACE POMOCÍ VYTVOŘUJÍCÍ FUNKCE.

LEGENDROVA TRANSFORMACE

ODBOČKA ($p\,dq - P\,dQ + (H' - H)\,dt = dF$ $\quad P = p \quad Q = 3q$ - NENÍ KANONICKÁ NELZE NENÍ HAMILTONIÁN)

$$p\,dq - P\,dQ + (H' - H)\,dt = dF \quad / + d(PQ) = Q\,dP + P\,dQ$$

$$p\,dq + Q\,dP + (H' - H)\,dt = d(F + PQ) = d\phi(q; p; t) = \frac{\partial \phi}{\partial q}\,dq + \frac{\partial \phi}{\partial p}\,dp + \frac{\partial \phi}{\partial t}\,dt$$

$$p = \frac{\partial \phi}{\partial q} \; ; \; Q = \frac{\partial \phi}{\partial p} \; ; \; \boxed{H' = H + \frac{\partial \phi}{\partial t}}$$ PROTOŽE $\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$ PAK $H = H'$

VELKÉ

(P=) $\phi = k \cdot q \cdot P$; k - KONSTANTA

$p = k \cdot P$ ← PODLE $p = \frac{\partial \phi}{\partial q}$; $Q = \frac{\partial \phi}{\partial P}$; $H' = H + \frac{\partial \phi}{\partial t}$

$Q = k \cdot q$ $\quad P = \frac{p}{k}$

$H' = H$

$p = \sqrt{m\omega} \; | \; q = \frac{Q}{\sqrt{m\omega}} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

SOUŘADNICE SE k-KRÁT NATÁHLA, ZATÍMCO HYBNOST SE k-KRÁT ZKRÁTILA (HARM. OSCILÁTOR)

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} k \cdot q^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2 = \frac{\omega}{2}(P^2 + Q^2)$$

$$\dot{Q} = \frac{\partial H}{\partial P} = \omega P$$

$$\dot{P} = -\frac{\partial H}{\partial Q} = -\omega Q$$

LIOUVILLOVA VĚTA - TÝKÁ SE KANONICKÝCH TRANSFORMACÍ A ČASOVÝM VÝVOJEM.

UVAŽUJEME MECH. SYSTÉM, JEHOŽ SOUŘADNICE A HYBNOST SE NĚJAK MĚNÍ S ČASEM.

$$q' = q + \dot{q}\,\Delta t + [\check{C}V\check{R}] = q + \frac{\partial H}{\partial p}\Delta t + \dots$$

$$p' = p + \dot{p} \cdot \Delta t + [\check{C}V\check{R}] = p - \frac{\partial H}{\partial q}\Delta t + \dots$$

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial q'}{\partial q} & \frac{\partial p'}{\partial q} \\ \frac{\partial q'}{\partial p} & \frac{\partial p'}{\partial p} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial^2 H}{\partial q \partial p} dt & -\frac{\partial^2 H}{\partial q^2} dt \\ \frac{\partial^2 H}{\partial p^2} dt & 1 - \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q} dt \end{vmatrix} =$$

$$= 1 + \underbrace{\left[\left(\frac{\partial^2 H}{\partial q \partial p}\right)^2 + \frac{\partial^2 H}{\partial q^2} \cdot \frac{\partial^2 H}{\partial p^2}\right]}_{0} dt^2 = 1 + (0 \cdot \Delta t) + (c \cdot \Delta t^2) + d(\Delta t^3)$$

$$D = \frac{S'}{S}$$

$$\underbrace{S' - S}_{\text{ZMĚNA PLOCHY ZA } \Delta t} = S \cdot (D - 1) = S \cdot (0\,\Delta t + c\,\Delta t^2 + \dots)$$, VYDĚLÍM Δt

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = S(0 + c\,\Delta t + d\,\Delta t^2 + \dots) \qquad \lim_{\Delta t \to 0}$$

$$\frac{dS}{dt} = 0$$

LIOUVILLOVA VĚTA - NÁM O KAPALINĚ ŘÍKÁ, ŽE JE NESTLAČITELNÁ, KAPKA MĚNÍ SVŮJ TVAR, ALE NEMĚNÍ SVOU VELIKOST

POISSONOVY ZÁVORKY

A - FCÍ STAVU SYSTÉMU

$A(q_1 \dots q_N; p_1 \dots p_N; t)$

$$\frac{dA}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \cdot \dot{q}_i + \frac{\partial A}{\partial p_i} \cdot \dot{p}_i \right) + \frac{\partial A}{\partial t} =$$

$$= \frac{\partial A}{\partial t} + \underbrace{\sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial A}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial A}{\partial p_i} \right)}_{\text{POISSONOVA ZÁVORKA}} = \frac{\partial A}{\partial t} + \{H; A\}$$

($[A;B] = AB - BA$ KOMUTÁTOR KVANTOVÁ MECHANIKA)

VLASTNOSTI

$\{A; A\} = 0$

$\{A; B\} = -\{B; A\}$ ANTISYMETRIE

$\{A + B; C\} = \{A; C\} + \{B; C\}$ DISTRIBUTIVITA

$\{A \cdot B; C\} = A\{B; C\} + B\{A; C\}$

$\{A; \{B; C\}\} + \{B; \{C; A\}\} + \{C; \{A; B\}\} = 0$ JACOBIHO IDENTITA

$\{p_k; q_k\} = 1$ PRO $i = k = 1$

$\{p_i; q_k\} = 0$ PRO $i \neq k = 0$

$\{P_i; Q_k\} = \delta_{ik}$ KRONEKEROVO DELTA NABÝVÁ HODNOT BUĎ 1 NEBO 0

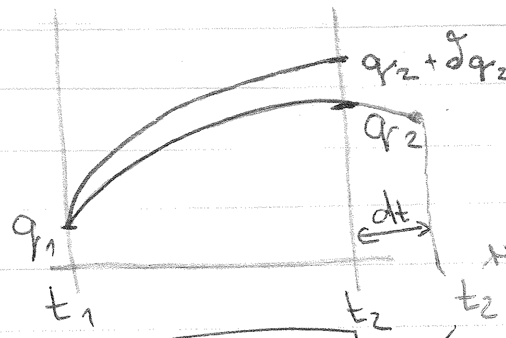
Př1

$P = \frac{p}{k}$ $Q = k \cdot q$

$$\{P; Q\} = \frac{\partial P}{\partial p} \cdot \frac{\partial Q}{\partial q} - \frac{\partial P}{\partial q} \frac{\partial Q}{\partial q} = \frac{1}{k} \cdot k - 0 = 1$$

Př2 $P = -q$, $Q = p$ TOHLE BY VYŠLO TAKY 1 ALE TADY)

ÚVOD DO HAMILTON-JACOBIHO ROVNICE



STEJNÉ t_1; q_1 i q_2, JENOM t_2 JE NOVÉ

MÁM SYSTÉM JEHOŽ SOUŘADNICE JSOU NAPOČÁTKU ($t=t_1$) A NA KONCI ($t=t_2$) JSOU PEVNĚ DANÝ HODNOTAM q_1 A q_2. A TEĎ ZMĚNÍME KONCOVOU SOUŘADNICI, TÍM SE ZMĚNÍ CELÁ TRAJEKTORIE, PROTOŽE SYSTÉM NYNÍ V ČASE t_2 NEDOSPĚJE DO q_2, ALE DO POSUNUTÉHO BODU $q_2+\delta q_2$.

(PŘEPÍŠEME PRVNÍ ČLEN) $\quad dt=$

$$\delta S=\int_{t_1}^{t_2}\delta L\,dt=\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q+\frac{\partial L}{\partial \dot q}\cdot\delta\dot q\right)dt=\delta S=\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right)\delta q+\frac{\partial L}{\partial \dot q}\frac{d}{dt}\delta q\right]$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\Big(\overbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot q}}^{p}\delta q\Big)dt=\left[p\cdot\delta q\right]_{t_1}^{t_2}=p(t_2)\,\delta q_2$$

PROTOŽE JSME ZMĚNU ČÁSTICE PŘEDPOKLÁDALI V ČASE t_2 PLATÍ A ZÍSKALI JSME DŮLEŽITOU ROVNOST.

$$\left(p(t_2)=\frac{\partial S}{\partial q(t_2)}\right)\Rightarrow\quad\frac{\partial S}{\partial x_2}=p_2$$

KDYŽ ZMĚNÍM ČAS t_2 AKCE SE ZMĚNÍ I A O TEN PŘÍRŮSTEK.

$$\frac{dS}{dt_2}=\frac{\partial S}{\partial q_2}\frac{dq_2}{dt}+\frac{\partial S}{\partial t_2}=p_2\cdot\dot q_2+\frac{\partial S}{\partial t_2}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t_2}=\frac{dS}{dt_2}-p_2\dot q_2=-\underbrace{(p_2\dot q_2-L(t_2))}_{\text{HAMILTONIÁN}}=-H(t_2)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t_2}+H=0\qquad\qquad p_i=\frac{\partial S}{\partial q}$$

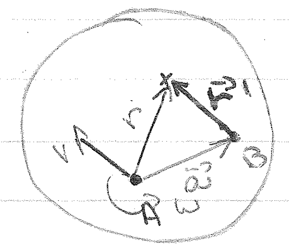
$$\boxed{\frac{\partial S(q_1,q_2\ldots q_n,t)}{\partial t}+H\Big(q_1\ldots q_n,\overbrace{\frac{\partial S}{\partial q_1}}^{p}\ldots\overbrace{\frac{\partial S}{\partial q_n}}^{p},t\Big)=0}$$

HAMILTON-JAKOBIHO ROVNICE

PÍŠU TO TAM TAKHLE PROTOŽE MI VZNIKLA DIF. ROVNICE

MECHANIKA TUHÉHO TĚLESA

TUHÉ TĚLESO JE TAKOVÉ, VE KTERÉM SE NEMĚNÍ VZDÁLENOST MEZI JEHO ČÁSTMI. HMOTA V TUHÉM TĚLESE JE NEJČASTĚJI ROZLOŽENA SPOJITĚ.
POHYB TUHÉHO TĚLESA LZE ROZDĚLIT NA DVĚ ČÁSTI TRANSLACI A ROTACI. NEBOLI POHYB LIBOVOLNÉHO BODU TĚLESE A JEDNAK ROTACI KOLEM TOHOTO BODU. VHODNÉ ZVOLIT ZA TENTO BOD TĚŽIŠTĚ.



J - TENZOR SETRVAČNOSTI

A: $v = V + \vec{\omega} \times \vec{r}$

B: $v' = \vec{V}' + \vec{\omega}' \times \vec{r}' =$ $\quad \vec{r} = \vec{a} + \vec{r}'$

$= -\vec{\omega} \times \vec{a} + \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{V}'$ $\quad \vec{r}' = \vec{r} - \vec{a}$

$\omega' = \omega$ $\quad \vec{V}' = \vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{a}$

$p_a = m_a v_a$ $\quad \vec{v}_a = \vec{\omega} \times \vec{r}_a$

MOMENT HYBNOSTI VZHLEDEM K REF. BODU $\vec{L} = \sum_a \vec{r}_a \times \vec{p}_a = \sum m_a \vec{r}_a \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_a) =$

$= \sum_A m_a [r_a^2 \cdot \omega - r_a (r_a \cdot \omega)]$

APLIKUJI:
$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{A}) = \underbrace{[redacted]}_{A^2 \cdot B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{A}$

PRO $\vec{r} = [x_1; x_2; x_3]$ NAPÍŠEME i-TOU SLOŽKU VEKTOROVÉ ROVNICE

$$L_i = \sum_a m_a \left[\sum_\ell x_\ell^2 \omega_i - x_i \sum_k x_k \omega_k \right] = \sum_k \left[\sum_a m_a (\delta_{ik} \sum_\ell x_\ell^2 - x_i x_k) \right] \omega_k = \underline{\sum_k J_{ik} \omega_k}$$

$$\boxed{J_{ij} = \sum_a m_a (\delta_{ij} \sum_\ell x_\ell^2 - x_i x_j)}$$ ~ TENZOR SETRVAČNOSTI

SLOŽKY TENZORU SETRVAČNOSTI

$$\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \qquad L = \hat{J} \cdot \omega$$

$$\hat{J} = \begin{pmatrix} \sum_a m_a(y_a^2+z_a^2) & -\sum_a m_a x_a y_a & -\sum_a m_a x_a z_a \\ -\sum_a m_a x_a y_a & \sum_a m_a(x_a^2+z_a^2) & -\sum_a m_a y_a z_a \\ -\sum_a m_a x_a z_a & -\sum m_a y_a z_a & \sum_a m_a(x_a^2+y_a^2) \end{pmatrix}$$

$$J_{xx} = \int_V \rho\,(y^2+z^2)\,dV \qquad J_{ij} = J_{ji}$$

$L' = T \cdot L$

$$\begin{pmatrix} L_1' \\ L_2' \\ L_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} \qquad \vec{L}' = \hat{T}\vec{L} = \hat{T}\hat{J}\vec{\omega} = \hat{T}\hat{J}\hat{T}^{-1}\vec{\omega}'$$

$$\vec{L}' = \underbrace{\hat{J}\cdot\hat{T}\cdot\hat{T}^{-1}}_{\hat{J}'}\cdot\vec{\omega}'$$

$\vec{\omega}' = T\vec{\omega}$

$$\vec{L}' = \hat{J}'\cdot\vec{\omega}'$$

$$\begin{pmatrix} \omega_1' \\ \omega_2' \\ \omega_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \qquad \omega = T^{-1}\cdot\omega'$$

$$\hat{J}' = T\cdot\hat{J}\cdot T^{-1}$$

PŘI PŘECHODU MEZI ORTONORMÁLNÍMI BÁZEMI JE T ORTOGONÁLNÍ TEDY $T^{-1} = T^{T}$ PAK TEDY PLATÍ $\hat{J}' = T\cdot J\cdot T^{T}$

JESTLI JE $\underline{J}$ SYMETRICKÉ $\Rightarrow$ EXISTUJE ORTONORMÁLNÍ SOUSTAVA SOUŘADNIC, V NÍŽ $\underline{J}$ JE DIAGONÁLNÍ

$$T_{rot} = \frac{1}{2}\vec{\omega}^{T}\cdot\hat{J}\cdot\vec{\omega} = \frac{1}{2}(\omega_1;\omega_2;\omega_3)\begin{pmatrix} J_{11} & \dots \\ \vdots & \ddots & J_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

V KAŽDÉM TĚLESE JSOU 3 KOLMÉ OSY KOLEM KTERÝCH, KDYŽ SE BUDE OTÁČET NEBUDE HÁZET.

SOUŘADNICOVÉ OSY SOUSTAVY, V NÍŽ JE $\hat{J}$ DIAGONÁLNÍ, SE NAZÝVAJÍ HLAVNÍ OSY TENZORU SETRVAČNOSTI A HODNOTY $J_1; J_2; J_3$ JSOU JEHO HLAVNÍ HODNOTY

$$J_{DIAG}\begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix}$$

EULEROVY ROVNICE – ODVOZUJÍ SE Z DRUHÉ IMPULZOVÉ VĚTY

$\dot{\vec{L}} = \vec{M}$ – MOMENT VNĚJŠÍCH SIL

$$\vec{M} = \frac{dL}{dt}$$

V NĚJAKÉ LABORATORNÍ SOUSTAVĚ MĚNÍM VEKTOR A, KTERÝ JE KONSTANTNÍ VZHLEDEM K ROTUJÍCÍ SOUSTAVĚ PLATÍ $\frac{dA}{dt} = A \times \omega$
POKUD BY SE NAVÍC TENTO VEKTOR MĚNIL VZHLEDEM K ROTUJÍCÍ SOUSTAVĚ $\frac{d'A}{dt}$ PAK PLATÍ

$$\frac{dA}{dt} = \frac{d'A}{dt} + \omega \times A$$ APLIKUJEME NA $M = \frac{dL}{dt}$

V SOUSTAVĚ SPOJENÉ S HLAVNÍMI OSAMI

$$M = \frac{d'L}{dt} + \omega \times L$$ => NAVÍC PLATÍ $L_i = J_i \cdot \omega_i$

$$M_1 = \frac{d'L_1}{dt} + (\omega \times L)_1 = \frac{d'J_1 \omega_1}{dt} + (\omega_2 L_3 - \omega_3 L_2)_1 = J_1 \frac{d\omega_1}{dt} + (\omega_2 \omega_3 J_3 - \omega_2 \omega_3 J_2) =$$

$$= J_1 \frac{d\omega_1}{dt} + (J_3 - J_2)\omega_2 \omega_3$$ $L_3 = \omega_3 J_3$ $L_2 = \omega_2 J_2$

$$\Downarrow$$

$$J_1 \frac{d\omega_1}{dt} + (J_3 - J_2)\omega_2 \omega_3 = M_1$$

$$J_2 \frac{d\omega_2}{dt} + (J_1 - J_3)\omega_1 \omega_3 = M_2$$

$$J_3 \frac{d\omega_3}{dt} + (J_2 - J_1)\omega_1 \omega_2 = M_3$$

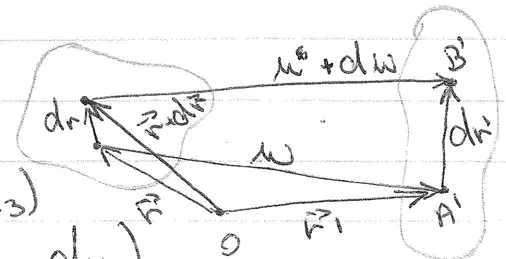
KDYŽ NEJSOU $\underline{M}$ (VYHOZENÍ ROZTOČENÉHO TĚLESA DO VZDUCHU) PAK PRAVÁ STRANA $= \underline{0}$

13

TEORIE PRUŽNOSTI

TUHÉ TĚLESO SE VYZNAČUJE TÍM, ŽE JEDNOTLIVÉ ČÁSTI JSOU VŮČI SOBĚ V PEVNÝCH VZDÁLENOSTECH, ZMĚNÍ-LI SE VZDÁLENOST TĚCHTO ČÁSTÍ, TĚLESO SE DEFORMUJE. DEFORMACE JE ČISTĚ GEOMETRICKÁ ZMĚNA TVARU!

UVAŽUJE DVA INFINITEZIMÁLNĚ BLÍZKÉ BODY A; B



$\vec r = (x_1; x_2; x_3)$

$d\vec r = (dx_1; dx_2; dx_3)$

$$d\vec r' = d\vec r + \vec u' - \vec u = d\vec r + d\vec u$$

$$(d\vec r')^2 = d\vec r^2 + 2 d\vec r\, d\vec u + d\vec u^2 =$$

$$= d\vec r^2 + 2\sum_{k=1}^{3} du_k\, dx_k + \sum_{k=1}^{3} du_k\, du_k =$$

$$= dr^2 + 2\sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}\frac{\partial u_k}{\partial x_l}dx_l\, dx_k + \sum_i\sum_k\sum_l \frac{\partial u_k}{\partial x_l}dx_l\frac{\partial u_k}{\partial x_i}dx_i = dr^2 + \sum_{k,i}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \sum_l \frac{\partial u_l}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial u_l}{\partial x_i}\right)dx_i\, dx_k = dr^2 + 2\cdot\sum_{i,k}\varepsilon_{ik}\cdot dx_i\cdot dx_k$$

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \sum_{l=1}^{3}\frac{\partial u_l\cdot\partial u_l}{\partial x_i\,\partial x_k}\right)$$ – TENZOR DEFORMACE $\hat\varepsilon$

Př: $\vec u = (Ax_1; 0; 0)$ – PROTAŽENÍ V OSE x_1; KDYBY BYLO $-Ax_1$ – ZTLAČILI BYCHOM HO.

$$\hat\varepsilon_{ik} = \begin{pmatrix} A + \frac{A^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

TENZOR MALÝCH DEFORMACÍ

JE-LI DEFORMACE MALÁ MŮŽEME SUMU V TENZORU DEFORMACE ZANEDBAT

$$\hat e_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)$$

$$dr'^2 = dx_j^2 + 2\varepsilon_{jj}\,dx_j^2 = (1+2\varepsilon_{jj})\,dx_j^2$$

$$|d\vec r'| = \sqrt{1+2\varepsilon_{jj}}\,|dx_j|$$

$$|d\vec r'| = \sqrt{1+\varepsilon_{jj}}\,|dx_j| \doteq (1+\varepsilon_{jj})\,|d\vec r|$$

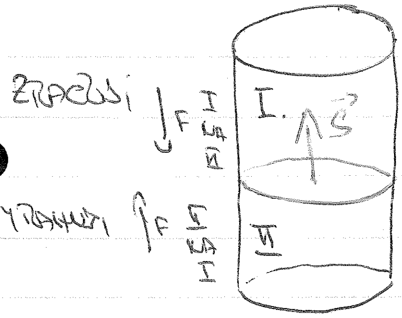
RELATIVNÍ PRODLOUŽENÍ

$$\frac{dr' - dr}{dr} = \varepsilon_{jj}$$

TENZOR NAPĚTÍ

TENZOR NAPĚTÍ POPISUJE NÁM ~~RA~~ MECHANICKÉ NAPĚTÍ UVNITŘ TĚLESA. BUDEME UVAŽOVAT MALOU PLOŠKU S UVNITŘ TĚLESA. PLOŠCE PŘIŘADÍME VEKTOR S, KTERÝ JE KOLMÝ NA PLOŠKU, JEHO VELIKOST JE ROVNA VELIKOSTI PLOŠKY

$\vec{S}$ - JE KOLMÝ K PLOŠCE, SMĚR VNĚJŠÍ NORMÁLY



SÍLA PROSTŘEDNICTVÍM PLOŠKY NA I. ČI NA II. STRANĚ.

$$\boxed{\vec{F} = \vec{\sigma} \cdot \vec{S}}$$

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix}$$

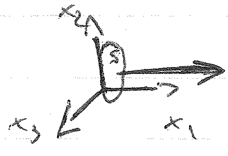
PŘ) IDEÁLNÍ TEKUTINA

$F = -pS \Rightarrow \sigma_{ik} = -p\delta_{ik}$

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}$$

U ZKOUŠKY

PŘ) S ORIENTOVANÁ VE SMĚRU PLOŠKY x_1 ... $\begin{pmatrix} S \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ LEŽÍ V ROVINĚ $x_2; x_3$



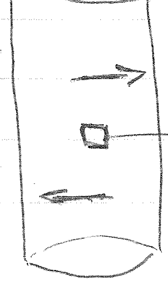
$$F = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \cdot S \\ \sigma_{21} \cdot S \\ \sigma_{31} \cdot S \end{pmatrix}$$

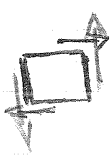
$\sigma_{11}; \sigma_{22}; \sigma_{33}$ - ODPOVÍDÁ TLAKOVÝM NAPĚTÍM VE VŠECH OSÁCH

$\sigma_{12}; \sigma_{13}; \sigma_{23}; \sigma_{31}; \sigma_{21}; \sigma_{32}$ - ODPOVÍDÁ SMYKOVÉMU NAPĚTÍ

TENZOR NAPĚTÍ JE VŽDY SYMETRICKÝ.

VÁLEČEK





ČERVENÁ SÍLA NA PRAVOU STRANU KRYCHLE $\sigma_{21} a^2$, ČERVENÉ SÍLY PŮSOBÍ NA KRYCHLIČKU MOMENTEM, KTERÝ SE JI SNAŽÍ ROZTOČIT. STEJNĚ NA KRYCHLIČKU PŮSOBÍ I MODRÉ SÍLY, SÍLA NA HORNÍ STRANU JE $\sigma_{12} a^2$.

POKUD ~~JE~~ $\sigma_{21} a^2 = \sigma_{12} a^2$ PAK DOJDE K VYRUŠENÍ SIL A K ROZTÁČENÍ NEDOJDE. MOMENTY OBOU SIL SE VYRUŠÍ.

MOMENT SETRVAČNOSTI JE ÚMĚRNÝ a^5

MOMENT SIL a^3

ÚHLOVÉ ZRYCHLENÍ $\omega = a^{-2}$

PLOŠNÁ SÍLA

$$F = \int_S \hat{\sigma}\, dS = \int_V \operatorname{div} \hat{\sigma}\, dV$$

$$(\operatorname{div} \hat{\sigma})_i = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}$$

TRANSFORMAČNÍ VZTAH

$$\hat{\sigma}' = \hat{T}\,\hat{\sigma}\,\hat{T}^{-1}$$

HOOKŮV ZÁKON

NAPĚTÍ A DEFORMACE SPOLU ÚZCE SOUVISÍ. JE-LI DEFORMACE TĚLESA DOSTATEČNĚ MALÁ, JE NAPĚTÍ PŘÍMO ÚMĚRNÉ DEFORMACI.

$$\sigma_{ij} = \sum_{k,l=1}^{3} C_{ijkl}\, \varepsilon_{kl}$$

TENZOR ELASTICKÝCH KOEFICIENTŮ

TOLIK KOLIK MÁ NEZÁVISLÝCH SLOŽEK ZÁVISÍ NA VNITŘNÍ SYMETRII TĚLESA. IZOTROPNÍ TĚLESA - 2

PRO IZOTROPNÍ TĚLESA PLATÍ

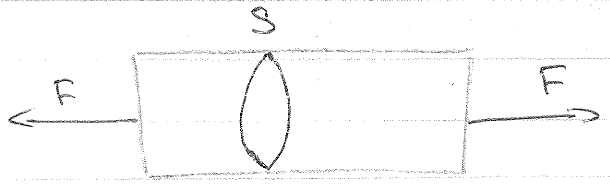
$$\hat{\sigma}_V = 3k\, \hat{\varepsilon}_V \qquad k - \text{MODUL VŠESTRANNÉ STLAČITELNOSTI}$$

$$\hat{\sigma}_S = 2\mu\, \hat{\varepsilon}_S \qquad \mu - \text{MODUL PRUŽNOSTI VE SMYKU}$$

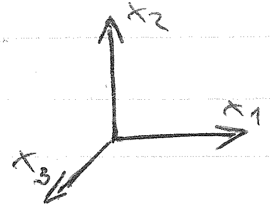
MODUL VŠESTRANNÉ STLAČITELNOSTI NÁM UDÁVÁ JAK OBTÍŽNÉ JE ZMĚNIT OBJEM TĚLESA, JESTLIŽE NA NĚJ PŮSOBÍME ZE VŠECH STRAN TLAKEM p. $\Rightarrow \sigma_{ik} = -p\delta_{ik}$ A PROTO $\varepsilon_{ik} = -\frac{p}{3k}\delta_{ik}$.

PODOBNĚ MODUL PRUŽNOSTI VE SMYKU VYJADŘUJE, JAK OBTÍŽNÉ JE PROVÉST ČISTĚ SMYKOVOU DEFORMACI. PRO SNADNO DEFORMOVATELNÁ TĚLESA (GUMA) JE HODNOTA μ RELATIVNĚ MALÁ, PROTOŽE JE SNADNÉ ZMĚNIT JEJICH TVAR. NAOPAK ZMĚNIT OBJEM JE U TĚCHTO TĚLES VELMI OBTÍŽNÉ. STEJNĚ I PRO VODU. POTOM $k \gg \mu$

PŘ) NATAHOVÁNÍ TYČE



$$\sigma = \begin{pmatrix} \frac{F}{S} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\hat{\sigma}_v = \begin{pmatrix} \frac{F}{3S} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{F}{3S} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{F}{3S} \end{pmatrix} \qquad \sigma_S = \begin{pmatrix} \frac{2F}{3S} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{F}{3S} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{F}{3S} \end{pmatrix}$$

ZVLÁŠTNÍ PŘÍPAD – IZOTROPNÍ DEFORMACE

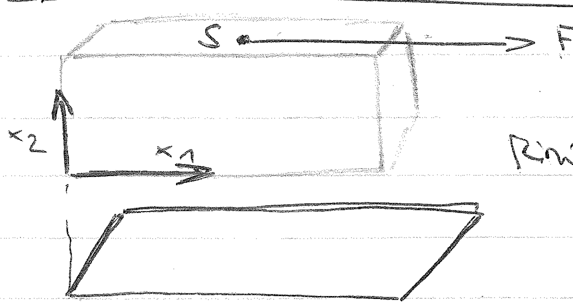
$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} = \sigma_v \qquad \sigma_S = 0$$

↑ HOMOGENNÍ TĚLESO PONOŘENÉ DO KAPALINY

$$\varepsilon_v = \varepsilon = \frac{\sigma_v}{3k} = \begin{pmatrix} -\frac{p}{3k} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{p}{3k} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{p}{3k} \end{pmatrix} \quad \varepsilon_S = 0 \qquad \frac{\Delta V}{V} = \mathrm{Tr}\,\varepsilon = -\frac{p}{k}$$

↑ TRACE, STOPA

PŘ) PRO MODUL PRUŽNOSTI VE SMYKU



$$\sin\alpha \doteq \alpha = 2\varepsilon_{12}$$

$$\sigma_{12} = 2\cdot\mu\,\varepsilon_{12} = \mu\cdot\alpha$$

ROVNICE ROVNOVÁHY

UVAŽUJEME TĚLESO V KLIDU, SÍLA PŮSOBÍCÍ NA LIBOVOLNÝ JEHO ELEMENT V JE ROVNA 0. TATO SÍLA JE SOUČTEM ~~DVOU~~ ČÁSTÍ PLOŠNÉ SÍLY, KTEROU NA ELEMENT V PŮSOBÍ PROSTŘEDNICTVÍM JEHO HRANICE OKOLNÍ ELEMENTY A OBJEMOVÉ SÍLY, KTERÉ PŮSOBÍ I NA VNITŘEK ELEMENTU V VLIVEM DALEKO SAHLÝCH INTERAKCÍ (GRAVITACE, ELEKTRICKÁ A MAGNETICKÁ SÍLA). OBJEMOVOU HUSTOTU OBJEMOVÝCH SIL OZNAČÍME JAKO $\underline{f}$ (GRAV. SÍLA = $\underline{f} = \rho g$)

PLATÍ PRO KAŽDÝ OBJEM ~~TĚLESA~~ V UVNITŘ TĚLESA

$\oint_V (\mathrm{div}\,\hat{\sigma} + \vec{f})\,dV = 0$ A TEDY V KAŽDÉM BODĚ

TĚLESA: $\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + f_i = 0$

TENZOR NAPĚTÍ

i-TÁ SLOŽKA

KRONECKEROVO DELTA

$$\underbrace{\sigma_{ik}}_{\sigma_S + \sigma_V} = \underbrace{3k\,\delta_{ik}\frac{1}{3}\sum_{l=1}^{3}\varepsilon_{ll}}_{\sigma_V} + \underbrace{2\mu\left(\varepsilon_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}\sum_{l=1}^{3}\varepsilon_{ll}\right)}_{\hat{\sigma} - \hat{\sigma}_V = \hat{\sigma}_S} = \delta_{ik}\left(k - \frac{2}{3}\mu\right)\cdot\sum_{l=1}^{3}\varepsilon_{ll} + 2\mu\,\varepsilon_{ik}$$

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right) = e_{ik}$$

$$0 = f_i + \left(k - \frac{2\mu}{3}\right)\sum_{k,l}\delta_{ik}\frac{\partial \varepsilon_{ll}}{\partial x_k} + 2\mu\sum_k \frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial x_k} = f_i + \left(k - \frac{2\mu}{3}\right)\underbrace{\sum \delta_{ik}\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_k \partial x_l}}_{\sum_k \frac{\partial}{\partial x_k}\sum_l \frac{\partial u_l}{\partial x_l} = \mathrm{div}\,\vec{u}} +$$

$$+\mu\sum_k \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} + \mu\underbrace{\sum \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_k}}_{\frac{\partial}{\partial x_i}\mathrm{div}\,\vec{u}} = *$$

$$* = f_i + \underbrace{\left(k - \frac{2\mu}{3} + \mu\right)}_{\left(k + \frac{\mu}{3}\right)}(\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{u})_i + \mu\,(\Delta\vec{u})$$

$$\Delta\vec{u} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{u} - \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{u}$$

$$k = \frac{E}{3(1-2\sigma)} \qquad \mu = \frac{E}{2(1+\sigma)}$$

$$E = \frac{9\cdot k\cdot\mu}{3k+\mu} \qquad \sigma = \frac{1}{2}\,\frac{3k-2\mu}{3k+\mu}$$

$$\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{u} - \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)}\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{u} = -\frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{E(1-\sigma)}\,\vec{f}$$

BERNOULLIHO ROVNICE

USTÁLENÉ PROUDĚNÍ $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$

$$(v \cdot \nabla) v = \frac{1}{2} \operatorname{grad} v^2 - \vec{v} \times \operatorname{rot} \vec{v}$$

$$\frac{1}{2} \operatorname{grad} \vec{v}^2 - \vec{v} \times \operatorname{rot} \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p - \operatorname{grad} U$$

$-\frac{f}{\rho} = \operatorname{grad} U$

NYNÍ PROMÍTNU ROVNICI DO SMĚRU RYCHLOSTI

$$\underbrace{\frac{d(\frac{v^2}{2})}{dl} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dl} + \frac{dU}{dl} = 0}$$

$$\frac{v^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + U = \text{konst}$$

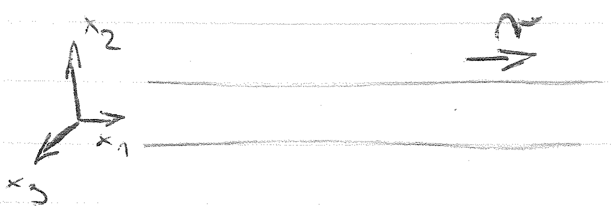
l – ZNAČÍ VZDÁLENOST MĚŘENOU PODÉL PROUDNICE

$v \times \operatorname{rot} v$ – JE DÍKY VEKTOR SOUČINU KOLMÝ NA RYCHLOST A PŘI PROMÍTNUTÍ NA SMĚR RYCHLOSTI DÁ NULU (PRÁVĚ $90°$)

PRO NEVÍROVÉ PROUDĚNÍ JE KONSTANTA STEJNÁ PRO VŠECHNY PROUDNICE, POKUD JE TEKUTINA NESTLAČITELNÁ JE ρ = KONST A VYJMEME HO Z INTEGRÁLU, POTÉ DOSTANEME

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + U = \text{konst}.$$

NAVIER - STOKESOVY ROVNICE



JE-LI TEKUTINA VISKÓZNÍ, OBJEVUJÍ SE V TEKUTINĚ I STYČNÉ SÍLY VLIVEM VNITŘNÍHO TŘENÍ. TY SE V TENZORU NAPĚTÍ PROJEVÍ DODATEČNÝM ČLENEM τ_{ik}.

TENZOR NAPĚTÍ: $\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \tau_{ik}$

τ_{ik} BUDE ZÁVISET NA DERIVACÍCH RYCHLOSTI TEKUTINY PODLE SOUŘADNIC.
PŘÍSLUŠNÉ STYČNÉ NAPĚTÍ BUDE PŘÍMO ÚMĚRNÉ SPÁDU VODOROVNÉ SLOŽKY RYCHLOSTI PODÉL SVISLÉ SOUŘADNICE =>

=> $\tau_{12} = \tau_{21} = \eta \cdot \frac{v}{h}$ η - DYNAMICKÁ VISKOZITA

PRO NESTLAČITELNOU TEKUTINU PLATÍ:

$$\tau_{ik} = \eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)$$

HUSTOTA VISKÓZNÍCH SIL f_{visk}

$$(f_{visk})_i = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k} = \eta \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k^2} + \eta \underbrace{\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_i \cdot \partial x_k}}_{\operatorname{div} v = 0}$$

PRO NESTLAČITELNOU KAPALINU

PRO NESTLAČITELNOU VISKÓZNÍ TEKUTINU POTOM DOSTANEME:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla) v = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \frac{1}{\rho} f + \underbrace{\frac{1}{\rho} \eta \cdot \Delta v}_{\text{JEDINÁ ZMĚNA OD EULEROVY ROVNICE}}$$

GRAVITAČNÍ VLNY

PŘEDPOKLADY $a << \lambda$

AMPLITUDA VLN ← VLNOVÁ DÉLKA

VLNA NESTLAČITELNÁ ρ - KONST

A VISKOZITA $= 0$ $\eta = 0$

$\text{rot}\,\vec{v} = 0$ $\vec{v} = \text{grad}\,\varphi$ ← POTENCIÁL

NAPIŠEME EULEROVU ROVNICI

PRAVÁ STRANA

→ PROSTOROVÁ DER. - JAK RYCHLOST $\vec{v}$ MĚNÍ PODÉL SOUŘADNICE

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \cdot \vec{v}$$

ODHADNEME ŘÁD VELIKOSTI OBOU ČLENŮ

$$\frac{a}{\lambda} << 1$$

$$\frac{a^2}{T^2} \cdot \frac{1}{\lambda} = \frac{a}{T^2} \cdot \frac{a}{\lambda} \Rightarrow \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} >> (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}$$

PROTOŽE DVĚ RYCHLOSTI

ŘÁDU $\frac{a}{T^2}$ VLNA NABĚHNE A ZASE KLESNE

JEN SAMOTNÁ RYCHLOST

$\frac{a}{T^2}$ KVŮLI ~~PRO~~ DERIVACI V ČASE

$\vec{v} = \text{grad}\,\varphi$

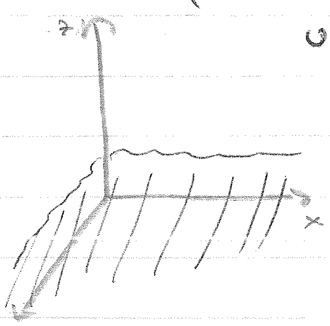
$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \frac{\vec{f}}{\rho} \Rightarrow \text{grad}\,\frac{d\varphi}{dt} = -\,\text{grad}\,\frac{p}{\rho} - \text{grad}\,U$$

POTENCIÁL GRAVITAČNÍHO POLE

$$\text{grad}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + U\right) = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + U = \text{konst}(t) = f(t) = 0$$

← PROTOŽE POTENCIÁL PROUDĚNÍ φ MŮŽE TOHLE BÝT 0



$U = gz$ ... $\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + gz = 0$

$\xi(x;y)$ ŽE TO POPISUJE POLOHU HLADINY

NA HLADINĚ $p = p_0$ ... ATM TLAK

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{p_0}{\rho} + g\xi = 0$$

0

$$\boxed{\frac{\partial \varphi}{\partial t} + g\xi = 0}$$

DÍKY VOLNOSTI VE VÝBĚRU φ

ξ ... Z-OVÁ SLOŽKA RYCHLOSTI ČÁSTICE NA HLADINĚ

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g\frac{\partial \xi}{\partial t} = 0$$

NESTLAČITELNOST

$\text{div}\,\vec{v} = 0$

$\text{div}\,\text{grad}\,\varphi = 0$

$\Delta \varphi = 0$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$$

MECHANIKA TEKUTIN

ROVNICE KONTINUITY ZÁKON ROVNICE OBJEMU

ROVNICE TEKUTINY ($S_1 v_1 = S_2 v_2$)

POHYB TEKUTINY POPÍŠEME POMOCÍ JEJÍ RYCHLOSTI V KAŽDÉM BODĚ OBLASTI, KDE SE TEKUTINA NACHÁZÍ A POMOCÍ TERMODYNAMICKÝCH VELIČIN NAPŘ. TLAK A HUSTOTA. JE-LI RYCHLOST POUZE FUNKCÍ SOUŘADNIC ALE NE ČASU JEDNÁ SE O PROUDĚNÍ USTÁLENÉ.

PROUDNICE JE KŘIVKA, TEČNA K NÍŽ V LIBOVOLNÉM JEJÍM BODĚ URČUJE SMĚR RYCHLOSTI PROUDĚNÍ TEKUTINY VE ZVOLENÉM OKAMŽIKU. PROUDNICE SE SHODUJE S TRAJEKTORIÍ KDYŽ JE PROUDĚNÍ USTÁLENÉ.

UVAŽUJEME ZAFIXOVANÝ OBJEM V — RYCHLOST ZMĚNY OBJEMU (VÝTOKU)

$$\frac{dm}{dt} = -\int_S (\rho \cdot v) \cdot dS = -\int_V \operatorname{div}(\rho \cdot v)\, dV \qquad \frac{dm}{dt} = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV$$

GAUSSOVA VĚTA

$$\int_V \operatorname{div}(\rho \cdot v)\, dV + \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV = 0$$

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \cdot v)\right] dV = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \cdot v) = 0$$

- POKUD TEKUTINA NESTLAČITELNÁ BUDE $\rho = konst$ POTOM $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ A ρ MŮŽU Z $\operatorname{div}(\rho \cdot v)$ VYTKNOUT A PAK $\operatorname{div} v = 0$

EULEROVA ROVNICE

- POPISUJE POHYB TEKUTINY
- UVAŽUJEME NEJAKÝ ELEMENT OBJEMU TEKUTINY V MALÉM OBJEMU V

A HLEDÁME ZRYCHLENÍ, NENÍ TO POUZE $\frac{\partial v}{\partial t}$. $v(x_1(t); x_2(t); x_3(t))$

MUSÍME SLEDOVAT ELEMENT STÁLE STEJNÝ ELEMENT (ZMĚNY SOUŘADNIC)

1) ZRYCHLENÍ

$$a = \frac{dv(x_1(t); x_2(t); x_3(t))}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial v}{\partial x_i} v_i =$$

$$= \frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla) \cdot v = a$$

2) SÍLA – PLOŠNÁ $\operatorname{div} \hat{\tau} = \operatorname{div}\begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} = -\operatorname{grad} p$

– OBJEMOVÁ f

$$\underbrace{\rho\, dV}_{m} \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \underbrace{\nabla}_{\text{NABLA}}) \cdot \vec{v} \right) = f \cdot dV - dV \operatorname{grad} p \qquad \Big| : dV \cdot \rho$$

$ma = F$

$$\boxed{\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla) \cdot \vec{v} = \frac{1}{\rho} f - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p}$$ EULEROVA ROVNICE

EULEROVA ROVNICE JE V RYCHLOSTI NELINEÁRNÍ, PROTOŽE v

Př. PROUDĚNÍ JAKO ROTACE TUHÉHO TĚLESA KOLEM OSY Z

$$v = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \omega \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = \qquad \omega = (0; 0; \omega)$$

$$= (-\omega x_2; x_1 \omega; 0)$$

$$\vec{a} = \underbrace{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}}_{0} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial v}{\partial x_2} v_2 + \frac{\partial v}{\partial x_3} v_3 = (0; \omega; 0)(-\omega x_2) + (-\omega; 0; 0)\,\omega x_1$$

$$= (-\omega^2 x_1; -\omega^2 x_2; 0) = -\omega^2 \vec{r} = a$$

$$(-\omega^2 x_1; -\omega^2 x_2; 0) = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + (0; 0; -g)$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x_1}; \frac{\partial p}{\partial x_2}; \frac{\partial p}{\partial x_3} \right)$$

$$\vec{f} = (0; 0; -\rho \cdot g)$$

GRAV SÍLA, POTOM VZNIKNE PARABOLOID $\int g$ VÍR KOLEM

PRO SLOŽKU x_3

$$0 = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x_3} - g \Rightarrow -g\rho = \frac{\partial p}{\partial x_3} \qquad p = -\int g \cdot \rho\, dx_3 = -g \cdot \rho \cdot x_3 + u(x_1; x_2)$$

NENÍ FCÍ x_3

PRO PRVNÍ SLOŽKU — DOSADÍM; NE PRVNÍ ČLEN NEZÁVISÍ NA x_1

$$-\omega x_1 = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x_1} \Rightarrow \cancel{\frac{\partial p}{\partial x_1} = +\omega x_1 \rho}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_1} = +\rho \cdot \omega^2 x_1$$

$$u = \frac{1}{2} \rho \cdot \omega^2 \cdot x_1^2 + w(x_2)$$

PRO DRUHOU SLOŽKU — DOSADÍM

$$-\omega^2 x_2 = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x_2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial x_2} \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial x_2} = \rho \cdot \omega^2 \cdot x_2$$

$$w = \frac{1}{2} \rho\, \omega^2 x_2^2 + \underline{c}$$ – INTEGRAČNÍ KONSTANTA

$$\boxed{p = -\rho g x_3 + \frac{1}{2} \rho \omega^2 \cdot x_1^2 + \frac{1}{2} \rho \omega^2 \cdot x_2^2 + c}$$ VÝSLEDEK