

## Domácí úkol č. 6 z Matematiky 1 (F1711)

Vypracované příklady mi neodevzdávejte (neměl bych čas je všechny opravit). Výsledky příkladů najdete v sekci za zadáním. Pokud si nebudete vědět s něčím rady, tak se mě můžete zeptat před cvičením, po cvičení, nebo si se mnou můžete domluvit konzultaci. Je možné (i když nepravděpodobné), že výsledky obsahují chyby, pokud nějakou najdete, tak mi dejte vědět.

1. Určete definiční obor, a zda je funkce sudá, lichá, či bez parity

$$\begin{array}{ll} a) f(x) = \sqrt[4]{x^2 + 3x + 2} + \sqrt[3]{x - 1}, & b) f(x) = \frac{\tan x \sin \sqrt{x^2 - 4}}{1 - |x|}, \\ c) f(x) = \frac{x^3 \ln(x^2 - 1) \tan x}{\sqrt{4 - x^2}}, & d) f(x) = \frac{x^3 \ln(x^2)}{\sqrt{9 - x^2}}, \\ e) f(x) = \frac{x \sqrt{1 - \ln(x^2)}}{(1 - |x|) \cos x}, & f) f(x) = \frac{\ln(x + 3)}{x^2 - 16} \end{array}$$

2. Určete na kterých intervalech existuje inverzní funkce a najděte ji

$$\begin{array}{ll} a) f(x) = 3^{x^2 - 4}, & b) f(x) = \frac{\ln x + 1}{\ln x - 1}, \\ c) f(x) = \ln(x^2 + 4x + 4), & d) f(x) = \tan^2(x - \frac{\pi}{4}) \end{array}$$

3. Rozložte na parciální zlomky

$$\begin{array}{ll} a) \frac{x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 3x + 1}{x^3 + 2x^2 + x}, & b) \frac{1}{x^3 + 1}, \\ c) \frac{x^4 + 2x^3 - 10x^2 + 22x - 71}{x^2 + 2x - 15}, & d) \frac{x^3 + 2x - 1}{x^5 - x^2} \end{array}$$

4. Vypočtěte derivace zadaných funkcí a určete obor jejich existence

$$\begin{array}{ll} a) f(x) = e^{-3x} \sin(3x), & b) f(x) = \arccos \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}, \\ c) f(x) = \ln(e^{-2x} + xe^{-2x}), & d) f(x) = x^{x^2 + 1}, \end{array}$$

5. Vypočtěte limity

$$\begin{array}{ll} a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 4x^2 + 2}{7x^3 + 5x^2 - 3}, & b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(x^2) \cos(2x)}{\sqrt{x}}, \\ c) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan x}{x}, & d) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1}, \\ e) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x^3 + x} - \sqrt[3]{x^3 - x^2}), & f) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{2x^2 - x} - \sqrt{2x^2 + 3x + 5}, \\ g) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x}}, & h) \lim_{x \rightarrow -\infty} x(\sqrt{1 + x^2} - x) \\ i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + 1} - 1}{x}, & j) \lim_{x \rightarrow 0} x \cot x, \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
k) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x + \cot x), & l) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x}, \\
m) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^3 + x^2}, & n) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^5 e^{-x^2}, \\
o) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2}, & p) \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{\sqrt{1-x}} - 1}{\sqrt{1-x}}, \\
q) \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} \arctan \left( \frac{3x+1}{x^2-4} \right), & r) \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{1-x^2}}{\arcsin x - \frac{\pi}{2}},
\end{array}$$

## Výsledky

1.

- a) bez parity  $\mathcal{D}(f) = (-\infty, -2] \cup [-1, \infty)$ ,      b) lichá  $\mathcal{D}(f) = ((-\infty, -2] \cup [2, \infty)) \setminus (\cup_{k \in \mathbb{Z}} \{\frac{\pi}{2} + k\pi\})$ ,  
c) sudá  $\mathcal{D}(f) = ((-2, -1) \cup (1, 2)) \setminus \{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\}$ ,      d) lichá  $\mathcal{D}(f) = (-3, 0) \cup (0, 3)$ ,  
e) lichá  $\mathcal{D}(f) = [-e, e] \setminus \{-\frac{\pi}{2}, -1, 0, 1, \frac{\pi}{2}\}$ ,      f) bez parity  $\mathcal{D}(f) = (-3, 4) \cup (4, \infty)$

2.

- a)  $f^{-1}(x) = -\sqrt{4 + \log_3 x}$  na  $(-\infty, 0]$ ,       $f^{-1}(x) = \sqrt{4 + \log_3 x}$  na  $[0, \infty)$ ,  
b)  $f^{-1}(x) = e^{\frac{x+1}{x-1}}$  na  $(0, e) \cup (e, \infty)$ ,  
c)  $f^{-1}(x) = -2 - e^{\frac{x}{2}}$  na  $(-\infty, -2)$ ,       $f^{-1}(x) = -2 + e^{\frac{x}{2}}$  na  $(-2, \infty)$ ,  
d)  $f^{-1}(x) = \frac{\pi}{4} - \arctan(\sqrt{x}) + k\pi$  na  $(k\pi - \frac{\pi}{4}, k\pi + \frac{\pi}{4})$ ,       $f^{-1}(x) = \frac{\pi}{4} + \arctan(\sqrt{x}) + k\pi$  na  $[k\pi + \frac{\pi}{4}, k\pi + \frac{3\pi}{4}]$ ,       $k \in \mathbb{Z}$

3.

$$\begin{array}{ll}
a) \quad x^2 + 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{-1}{x+1}, & b) \quad \frac{\frac{1}{3}}{x+1} + \frac{-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}}{x^2 - x + 1}, \\
c) \quad x^2 + 5 + \frac{7}{x+5} + \frac{5}{x-3}, & d) \quad \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + \frac{\frac{2}{3}}{x-1} + \frac{\frac{4}{3}x + \frac{2}{3}}{x^2 + x + 1}
\end{array}$$

4.

$$\begin{array}{ll}
a) \quad f'(x) = 3e^{-3x}(\cos(3x) - \sin(3x)), & \mathcal{D}(f') = \mathbb{R}, \\
b) \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt[4]{x^3}(1+\sqrt{x})}, & \mathcal{D}(f') = (0, \infty), \\
c) \quad f'(x) = -2 + \frac{1}{1+x}, & \mathcal{D}(f') = (-1, \infty), \\
d) \quad f'(x) = x^{x^2+1} \left( 2x \ln x + \frac{x^2+1}{x} \right), & \mathcal{D}(f') = (0, \infty),
\end{array}$$

5.

$$\begin{array}{llll}
a) \quad \frac{3}{7}, & b) \quad 0, & c) \quad 1, & d) \quad 0, \\
e) \quad \frac{1}{3}, & f) \quad -\sqrt{2}, & g) \quad -1, & h) \quad -\infty, \\
i) \quad \frac{1}{2}, & j) \quad 1, & k) \quad \infty, & l) \quad 1, \\
m) \quad 2, & n) \quad 0, & o) \quad \infty, & p) \quad 1, \\
q) \quad -\frac{\pi}{2}, & r) \quad -1
\end{array}$$