Domácí úkol č. 7 z Matematiky 1 (F1711)

Vypracované příklady mi neodevzdávejte (neměl bych čas je všechny opravit). Výsledky příkladů najdete v sekci za zadáním. Pokud si nebudete vědět s něčím rady, tak se mě můžete zeptat před cvičením, po cvičení, nebo si se mnou můžete domluvit konzultaci. Je možné (i když nepravděpodobné), že výsledky obsahují chyby, pokud nějakou najdete, tak mi dejte vědět.

1. Vyšetřete průběh funkcí, určete:
○ definiční obor, kde je funkce kladná a záporná
○ první derivaci, obor její existence, stacionární body, kde je funkce rostoucí a klesající
○ druhou derivaci, obor její existence, kde je funkce konvexní a konkávní, inflexní body
○ lokální extrémy, průsečíky s osami, zda je funkce sudá či lichá, čí bez parity
○ asymptoty (bez směrnice, se směrnicí), ostatní potřebné limity
○ načrtněte graf

$$\begin{aligned} &a) \quad f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right), \\ &b) \quad f(x) = \frac{e^{-x}}{x-2}, \\ &c) \quad f(x) = \frac{x^2-3}{x-1}, \\ &d) \quad f(x) = \ln \sin x, \\ &e) \quad f(x) = xe^x \end{aligned}$$

2. Určete derivace funkcí inverzních k zadaným funkcím

$$a) \quad f(x) = \sin x, \qquad\qquad b) \quad f(x) = x^n$$

Výsledky

1a.

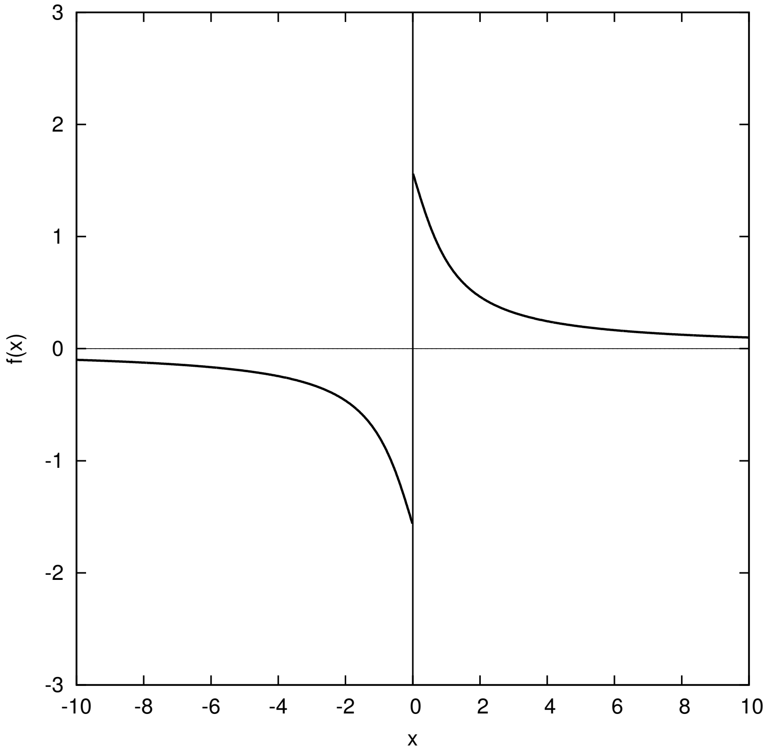
- $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, kladná na $(0, \infty)$, záporná na $(-\infty, 0)$

- $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2+1}$, $\mathcal{D}(f') = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, klesající na $\mathcal{D}(f')$, bez stacionárních bodů

- $f''(x) = \dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$, $\mathcal{D}(f'') = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, konvexní na $(0, \infty)$, konkávní na $(-\infty, 0)$, bez inflexních bodů

- lichá, bez lokálních extrémů, bez průsečíků s osami

- $\lim_{x\to 0-} f(x) = -\frac{\pi}{2}$, $\lim_{x\to 0+} f(x) = \frac{\pi}{2}$, asyptota se směrnicí $y = 0$ pro $x \to \infty$, asyptota se směrnicí $y = 0$ pro $x \to -\infty$



1b.

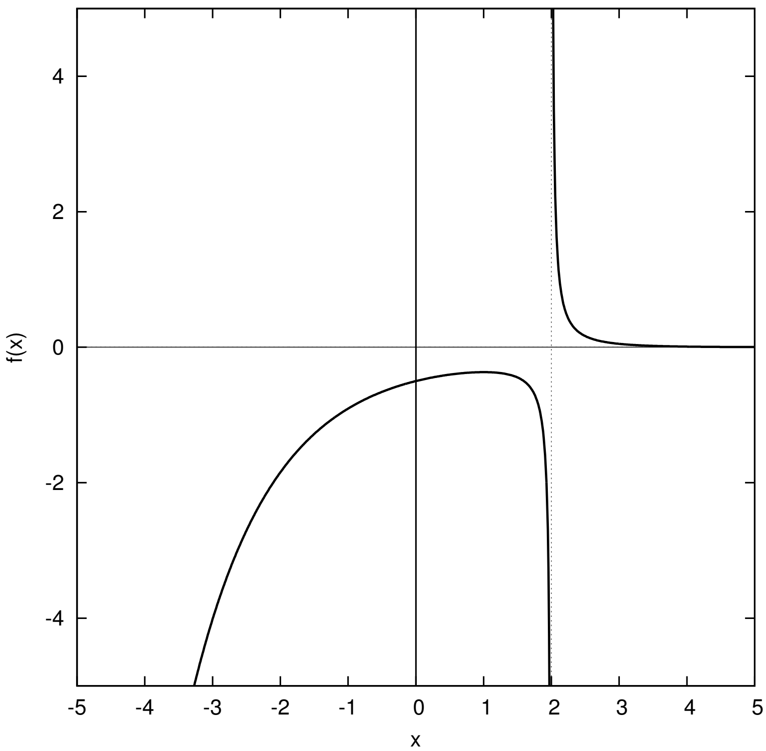
- $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, kladná na $(2, \infty)$, záporná na $(-\infty, 2)$

- $f'(x) = -\dfrac{e^{-x}(x-1)}{(x-2)^2}$, $\mathcal{D}(f') = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, rostoucí na $(-\infty, 1)$, klesající na $(1,2) \cup (2, \infty)$, stacionární bod $[1, -\frac{1}{e}]$

- $f''(x) = \dfrac{e^{-x}(x^2 - 2x + 2)}{(x-2)^3}$, $\mathcal{D}(f'') = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, konvexní na $(2, \infty)$, konkávní na $(-\infty, 2)$, bez inflexních bodů

- bez parity, lokální maximum $[1, -\frac{1}{e}]$, průsečík s x neexistuje, průsečík s y $[0, -\frac{1}{2}]$

- $\lim_{x \to 2-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to 2+} f(x) = \infty$, asymptota bez směrnice $x = 2$, asyptota se směrnicí $y = 0$ pro $x \to \infty$, asyptota se směrnicí pro $x \to -\infty$ neexistuje, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$



1c.

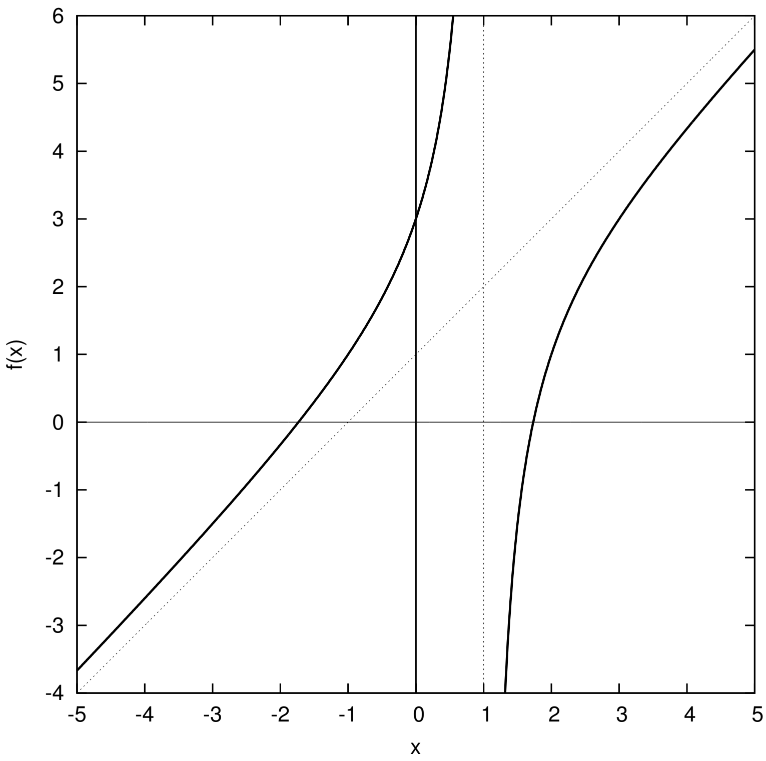
- $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, kladná na $(-\sqrt{3}, 1) \cup (\sqrt{3}, \infty)$, záporná na $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (1, \sqrt{3})$

- $f'(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{(x-1)^2}$, $\mathcal{D}(f') = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, rostoucí na $\mathcal{D}(f')$, bez stacionárních bodů

- $f''(x) = \dfrac{-4}{(x-1)^3}$, $\mathcal{D}(f'') = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, konvexní na $(-\infty, 1)$, konkávní na $(1, \infty)$, bez inflexních bodů

- bez parity, bez lokálních extrémů, průsečíky s x $[-\sqrt{3}, 0]$, $[\sqrt{3}, 0]$, průsečík s y $[0, 3]$

- $\lim_{x\to 1-} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to 1+} f(x) = -\infty$, asymptota bez směrnice $x = 1$, asyptota se směrnicí $y = x + 1$ pro $x \to \infty$, asyptota se směrnicí pro $x \to -\infty$ $y = x + 1$



1d.

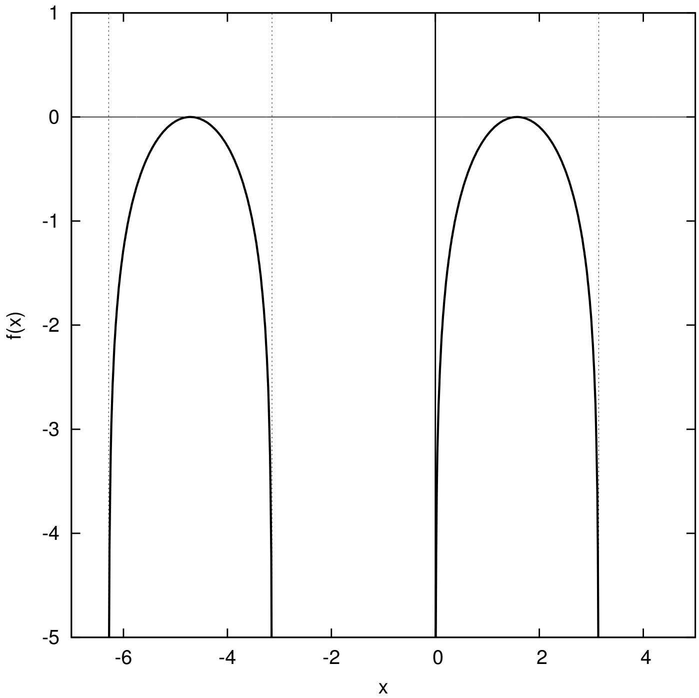
- $\mathcal{D}(f) = \cup_{k\in\mathbb{Z}}(2k\pi, \pi + 2k\pi)$, záporná na $\mathcal{D}(f)$

- $f'(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x}$, $\mathcal{D}(f') = \cup_{k\in\mathbb{Z}}(2k\pi, \pi+2k\pi)$, rostoucí na $\cup_{k\in\mathbb{Z}}(2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi)$, klesající na $\cup_{k\in\mathbb{Z}}(2k\pi+\frac{\pi}{2}, \pi + 2k\pi)$, stacionární body $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

- $f''(x) = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$,$\mathcal{D}(f'') = \cup_{k\in\mathbb{Z}}(2k\pi, \pi + 2k\pi)$, konkávní na $\mathcal{D}(f'')$

- bez parity, lokální maxima $\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, průsečíky s x $[\frac{\pi}{2}+2k\pi, 0]$, $k \in \mathbb{Z}$, průsečík s y neexistuje

- $\lim_{x\to 2k\pi+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to(2k+1)\pi-} f(x) = -\infty$, asymptoty bez směrnice $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, asyptoty se směrnicí neexistují



1e.

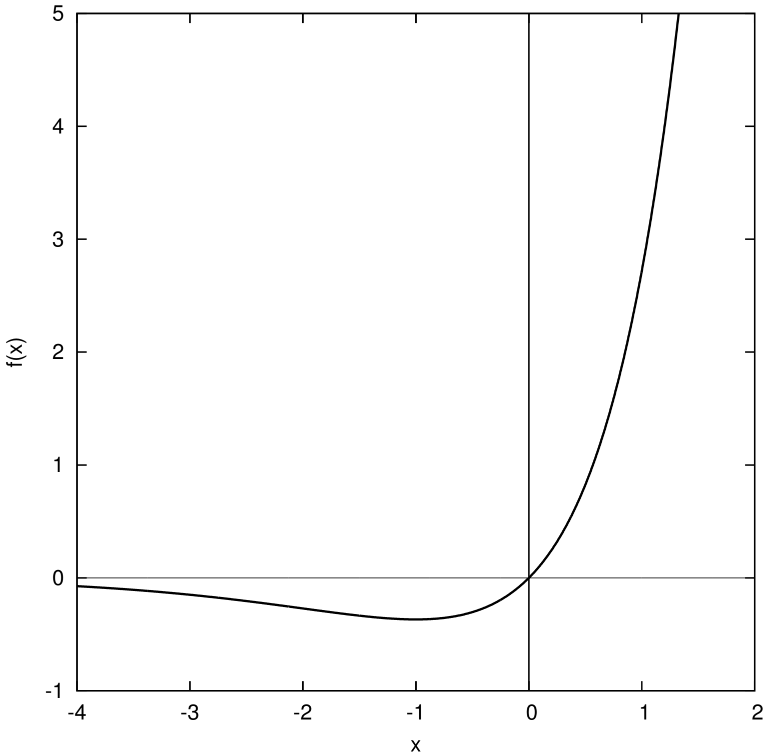
- $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, kladná na $(0, \infty)$, záporná na $(-\infty, 0)$

- $f'(x) = (x+1)e^x$, $\mathcal{D}(f') = \mathbb{R}$, rostoucí na $(-1, \infty)$, klesající na $(-\infty, -1)$, stacionární bod $[-1, -e^{-1}]$

- $f''(x) = (x+2)e^x$, $\mathcal{D}(f'') = \mathbb{R}$, konvexní na $(-2, \infty)$, konkávní na $(-\infty, -2)$, inflexní bod $[-2, -2e^{-2}]$

- bez parity, lokální minimum $[-1, -e^{-1}]$, průsečík s x a y $[0, 0]$

- asyptota se směrnicí pro $x \to \infty$ neexistuje, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, asyptota se směrnicí $y = 0$ pro $x \to -\infty$



2.

$$a)\quad (f^{-1}(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad\qquad b)\quad (f^{-1}(x))' = \frac{1}{x} x^{\frac{1}{n}-1}$$