Příklady z Elektrodynamiky a teorie relativity (F4090)

1. Levi-Civitův symbol ϵ_{ijk} a Kroneckerovo δ^i_j jsou definovány jako

$$\epsilon_{ijk} = \epsilon^{ijk} = \begin{cases} +1 & (ijk) \text{ je sudá permutace } (123) \\ -1 & (ijk) \text{ je lichá permutace } (123) \\ 0 & \text{v ostatních případech} \end{cases}, \qquad \delta^i_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases},$$

kde $i = 1, 2, 3$. Ukažte, že platí

$$\epsilon^{ijk}\epsilon_{mnk} = \delta^i_m \delta^j_n - \delta^i_n \delta^j_m, \qquad \epsilon^{ijk}\epsilon_{mjk} = 2\delta^i_m, \qquad \epsilon^{ijk}\epsilon_{ijk} = 6.$$

2. Pomocí přepisu v indexech a Levi-Civitova symbolu dokažte vektorové identity

$$\begin{aligned} \vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) &= (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c}, & \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) &= \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b}), \\ (\vec{a} \times \vec{b})(\vec{c} \times \vec{d}) &= (\vec{a}\vec{c})(\vec{b}\vec{d}) - (\vec{a}\vec{d})(\vec{b}\vec{c}), & \operatorname{div}\operatorname{grad} &= \triangle, \\ \operatorname{rot}\operatorname{grad} &= 0, & \operatorname{div}\operatorname{rot} &= 0, \\ \operatorname{rot}\operatorname{rot} &= \operatorname{grad}\operatorname{div} - \triangle, & \operatorname{rot}(f\vec{v}) &= \operatorname{grad} f \times \vec{v} + f \operatorname{rot}\vec{v}. \end{aligned}$$

3. Uvažujte vektorové pole

$$\vec{u} = \frac{(x, y, 0)}{x^2 + y^2}, \qquad \vec{v} = \frac{(-y, x, 0)}{x^2 + y^2}, \qquad \vec{w} = (y^2, 2xy, 0).$$

Určete rotaci těchto polí, vypočtěte křivkový integrál z těchto vektorových polí po uzavřených křivkách:

- a Kružnice jednotkového poloměru se středem v počátku ležící v rovině $x - y$.
- b Křivka tvořená úsečkami propojujícími body $(1, 1, 0) \to (-1, 1, 0) \to (-1, -1, 0) \to (1, -1, 0) \to (1, 1, 0)$.

4. Ověřte Gaussovu větu pro vektorové pole $\vec{v} = (ax, by, cz)$, kde a, b, c jsou konstanty a kouli $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$.

5. S užitím Fourierovy transformace určete Greenovu funkci Laplaceova operátoru, to jest funkci splňující $\triangle G(\vec{x}, \vec{y}) = \delta^3(\vec{x} - \vec{y})$. Předpokládejte, že Greenova funkce je symetrická vůči posunu souřadnic, můžeme tedy předpokládat, že $G(\vec{x}, \vec{y}) = G(\vec{x} - \vec{y})$. Fourierovu a transformaci Greenovy funkce a δ-funkci zapíšeme jako

$$G(\vec{x}) = \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\vec{x}} \tilde{G}(\vec{k}), \qquad \tilde{G}(\vec{k}) = \int \mathrm{d}^3 x e^{-i\vec{k}\vec{x}} G(\vec{x}), \qquad \delta^3(\vec{x}) = \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\vec{x}}.$$

Možná se vám bude hodit integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x = \pi.$$

6. Pomocí Greenovy věty ukažte

$$\int_K \triangle \ln r \mathrm{d}^2 r = 2\pi,$$

kde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ a K je kruh se středem v počátku.

7. Pomocí Diracovy δ-distribuce vyjádřete prostorové rozložení náboje $\rho(\vec{r})$ v zadaných souřadnicích.

a Náboj Q rovnoměrně rozložený po povrchu koule poloměru R ve sférických souřadnicích.

b Náboj Q rovnoměrně rozložený po povrchu koule poloměru R v kartézských souřadnicích.

c Náboj rovnoměrně rozložený po povrchu nekonečně dlouhého válce poloměru R ve válcových souřadnicích, náboj na jednotkovou délku válce je λ.

d Náboj rovnoměrně rozložený po povrchu nekonečně dlouhého válce poloměru R v kartézských souřadnicích, náboj na jednotkovou délku válce je λ.

e Náboj Q rovnoměrně rozložený po povrchu kruhového disku poloměru R ve válcových souřadnicích.

f Náboj Q rovnoměrně rozložený po povrchu kruhového disku poloměru R ve sférických souřadnicích.

Poznámka: Heavisidova skoková funkce je definována předpisem

$$H(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

8. Zjistěte, zda je možno vytvořit elektrostatické pole konstantního směru, jehož velikost se mění kolmo na $\vec{E}$.

9. Určete rozložení elektrické intenzity a potenciál tvořený:

a Nekonečně dlouhým drátem homogenně nabitým délkovou hustotou náboje λ.

b Nekonečně velké rovné desky homogenně nabité plošnou hustotou náboje σ.

Výsledek určete pomocí

i Gaussovy věty.

ii Pomocí vzorce

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int \frac{\rho(\vec{r}\,')(\vec{r} - \vec{r}\,')}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} \mathrm{d}^3 r', \qquad \phi(\vec{r}) = \int \frac{\rho(\vec{r}\,')}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}\,'|} \mathrm{d}^3 r'.$$

10. Vypočtěte energii homogenně nabité koule o poloměru R, která má celkový náboj Q.

11. Z výrazu pro potenciál

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{x}\,')}{|\vec{x} - \vec{x}\,'|} \mathrm{d}^3 \vec{x}'$$

určete výraz pro magnetické pole.

12. Vypočtěte magnetické pole nekonečně dlouhého rovného vodiče, kterým protéká proud I. Určete hodnotu μ_0 pokud víte, že velikost síly mezi dvěma rovnoběžnými nekonečně dlouhými vodiči vzdálenými 1 m, kterými protéká proud 1 A je $2 \cdot 10^{-7}$ N na 1 m délky.

13. Určete kapacitu kondenzátoru tvořeného dvěma soustřednými koulemi. Poloměr vnitřní koule je a, poloměr vnější koule je b.

14. Přepište Laplaceův operátor $\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ do polárních souřadnic $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$.

15. Legenderova diferenciální rovnice má tvar

$$(1-x^2)P_l(x)'' - 2xP_l(x)' + l(l+1)P_l(x) = 0$$

A Dosaďte do rovnice rozvoj

$$P_l(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

a určete rekurzivní vztah pro koeficienty a_n. Jaká je podmínka, aby řešením byl polynom, to jest aby počet nenulových koeficientů byl konečný?
Ukažte, že polynomy získané pro $l = 0, 1, 2, 3$ jsou

$$P_0(x) = 1, \qquad P_1(x) = x, \qquad P_2(x) = -\frac{1}{2}\left(1-3x^2\right), \qquad P_3(x) = -\frac{3}{2}\left(x - \frac{5}{3}x^3\right),$$

polynomy jsou normalizované tak, aby platilo

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{2n+1}\delta_{mn}.$$

B Ukažte, že Legenderovu diferenciální rovnici lze zapsat jako

$$[(1-x^2)P_l(x)']' = -l(l+1)P_l(x),$$

dále dokažte, že platí

$$\int_{-1}^{1} \left(P_l(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_m(x)\right] - P_m(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_l(x)\right]\right)\mathrm{d}x = 0,$$

kombinací těchto výsledků ukažte, že

$$\int_{-1}^{1} P_l(x)P_m(x)\mathrm{d}x = 0 \qquad \text{pokud } l \neq m.$$

16. Dokažte identitu

$$\left[\vec{E}\,\mathrm{div}\,\vec{D} - \vec{D}\times\mathrm{rot}\,\vec{E}\right]_i = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(E_i D_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}\vec{E}\vec{D}\right),$$

za předpokladu lineárního vztahu mezi $\vec{D}$ a $\vec{E}$, tj. $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$.

17. Dokažte identitu

$$\iiint_V \vec{r}\times\left(\nabla\times\vec{M}\right)\mathrm{d}V = \iint_{\partial V}\vec{r}\times\left(\mathrm{d}\vec{S}\times\vec{M}\right) - \iiint_V \left(\vec{M}\times\nabla\right)\times\vec{r}\mathrm{d}V.$$

18. Uvažujte kruhovou smyčku poloměru R ležící v rovině $x - y$, jejíž osa splývá s osou z. V případě, že smyčkou protéká proud I, určete vektorový potenciál

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{\mathrm{d}r'}{|\vec{r} - \vec{r'}|},$$

pro velké vzdálenosti od smyčky $|\vec{r}| \gg R$. Určete magnetický moment $\vec{m}$, pomocí něhož lze výsledek zapsat jako

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3}.$$

19. Larmorova formule

$$P = \frac{q^2 a^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}$$

udává výkon vyzářený nerelativistickým bodovým nábojem q pohybujícím se se zrychlením a. Určete jak dlouho by podle tohoto vzorce trvalo elektron v jádru vodíku, aby spadl na jádro. Odvoďte diferenciální pro závislost poloměru dráhy elektronu na čase. Za počáteční poloměr zvolte Bohrův poloměr $a_0 \doteq 5.3 \cdot 10^{-11}$ m, náboj elektronu je $q \doteq 1.6 \cdot 10^{-19}$ C, hmotnost elektronu $m \doteq 9.1 \cdot 10^{-31}$ m, $\epsilon_0 \doteq 8.9 \cdot 10^{-12}$ F/m.

20. Uvažujte model dielektrika, kde jsou elektrony vázány harmonickými silami, pohybovou rovnici jednoho elektronu tedy můžeme zapsat jako

$$m\left(\ddot{\vec{x}} + \gamma\dot{\vec{x}} + \omega_0^2\vec{x}\right) = q\vec{E}.$$

Pro případ, kdy je tento systém buzen vnějším elektrickým polem $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\omega t}$ ($\vec{E}_0$ je konstanta) vyřešte pohybovou rovnici. Určete indukovaný dipólový moment $\vec{P}$ za předpokladu, že jednotkový objem obsahuje N elektronů. Z dipólového momentu určete dielektrickou konstantu ϵ.

21. Ukažte, že elektromagnetické potenciály ϕ, $\vec{A}$ lze zvolit tak, aby splňovali Lorentzovu kalibrační podmínku

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\phi + \operatorname{div}\vec{A} = 0.$$

To znamená, že když budeme mít zadané libovolné potenciály ϕ, $\vec{A}$, které nemusí splňovat tuto podmínku, pak můžeme najít funkci f takovou, že kalibrační transformace

$$\phi' = \phi - \frac{\partial}{\partial t}f, \qquad \vec{A}' = \vec{A} + \operatorname{grad} f,$$

vede k potenciálům ϕ', $\vec{A}'$, které tuto podmínku splňují.

Zjistěte zda jsou potenciály určeny touto kalibrační podmínkou jednoznačně (existují kalibrační transformace zachovávající kalibrační podmínku?).

22. Řešení D'Alambertovy rovnice

$$\Box f(\vec{x},t) = \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \triangle\right) f(\vec{x},t) = g(\vec{x},t),$$

můžeme najít jako

$$f(\vec{x},t) = \int \mathrm{d}t' \iiint \mathrm{d}^3x' G(|\vec{x}-\vec{x}\,'|, t-t'),$$

kde G je Greenova funkce, kterou lze zvolit tak, aby závisela pouze na $t-t'$ a $|\vec{x}-\vec{x}\,'|$ (invariance vůči posunu v čase a posunu a rotacím v prostoru). Tato Greenova funkce musí splňovat rovnici

$$\Box G(|\vec{x}|,t) = \delta^3(\vec{x})\delta(t).$$

Najděte tuto funkci.

A Proveďte Fourierovu transformaci přes čas

$$G(|\vec{x}|,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega \tilde{G}(|\vec{x}|,\omega)e^{-i\omega t}, \qquad \tilde{G}(|\vec{x}|,\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t G(|\vec{x}|,t)e^{i\omega t},$$

přičemž delta-funkci lze zapsat jako

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega e^{-i\omega t}.$$

B Najděte řešení pro $\tilde{G}$ a odtud také pro G pro případ, kdy $\vec{x} \neq \vec{0}$. Laplaceův operátor ve sférických souřadnicích lze zapsat jako

$$\triangle = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}.$$

C Zapište jak vypadá řešení D'Alambertovy rovnice, které řešení je vhodné pro řešení Maxwellových rovnic? Jak bude vypadat případ, kdy pravá strana nezávisí na čase? Zapište výsledné řešení.

23. Uvažujte šíření vlny $\psi(\vec{x},t)$ popsanou D'Alambertovou rovnicí (např. šíření záblesku světla).

A Jak se bude šířit vlna, pokud jako pravou stranu zvolíme $\delta^3(\vec{x})\delta(t)$ (záblesk v počátku v čase $t=0$).

B Jak se bude šířit vlna, pokud jako pravou stranu zvolíme $\delta(x)\delta(y)\delta(t)$ (záblesk podél osy z v čase $t=0$).

24. Poincarého transformace je zadaná pomocí čtyřvektoru a a matice L splňující podmínku

$$L^T \eta L = \eta, \qquad \eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Skládání Poincarého transformací je dáno předpisem

$$(a', L') \cdot (a, L) = (L'a + a', L'L).$$

Ukažte, že množina $\mathcal{P}$ všech Poincarého transformací tvoří grupu, tj.

A Složením dvou Poincarého transformací je opět Poincarého transformace.

B Existuje jednotkový prvek e takový, že pro všechny Poincarého transformace $p \in \mathcal{P}$ platí $p \cdot e = p = e \cdot p$.

C Ke každému prvku $p \in \mathcal{P}$ existuje inverzní prvek p^{-1} takový, že $p \cdot p^{-1} = e$.

D Operace skládání transformací je asociativní, tj. pro všechny $p, p', p'' \in \mathcal{P}$ platí $(p \cdot p') \cdot p'' = p \cdot (p' \cdot p'')$.

25. V systému S je měřena délka pohybujícího se měřítka délky l. K tomuto účelu je spuštěna řada bleskových světel, tak, že měřítko vrhá stín na fotografickou desku. Ukažte, že pozorovatel pohybující se spolu s měřítkem vysvětluje Lorentzovu kontrakci tak, že blesková světla nejsou z jeho pohledu spuštěna současně.

26. Člověk běžící rychlostí $\frac{\sqrt{3}}{2}c$, který před sebou nese žebřík o délce 2.1 m, vběhne do místnosti délky 1 m a zavře za sebou dveře.

A Proč je to možné?

B Jak vypadá tato situace z hlediska člověka nesoucího žebřík a z hlediska pozorovatele spojeného s místností?

C Nakreslete časoprostorové diagramy (jeden pro soustavu spojenou s člověkem nesoucím žebřík a jeden pro soustavu spojenou s místností).

D Co se stane potom?

27. Zapište, jak vypadá Lorentzova transformace pro případ, kdy se soustava $(t', \vec{x}\,')$ pohybuje vůči soustavě $(t, \vec{x})$ rychlostí $\vec{v}$ v libovolném směru.

28. Odvoďte jak se transformují složky rychlosti $\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}$ pokud se čárkovaná soustava $(t', \vec{x}')$ pohybuje rychlostí $(u, 0, 0)$ vůči nečárkované soustavě $(t, \vec{x})$.

29. Hustota náboje a proudu nepohybujícího se bodového náboje velikosti q je

$$\rho(x, y, z, t) = q\delta(x)\delta(y)\delta(z), \qquad \vec{j}(x, y, z, t) = \vec{0}.$$

Pomocí Lorentzovy transformace čtyřvektoru proudu $j^i = (c\rho, \vec{j})$ určete hustotu náboje a proudu náboje pohybujícího se rychlostí $\vec{v}$ (pro jednoduchost uvažujte pohyb rychlostí v podél osy z).

30. V soustavě S uvažujte nekonečně dlouhý (nepohybující se) drát splývající s osou z, kterým protéká proud I, v této soustavě není drát nabitý. Dále uvažujte soustavu S', takovou, že drát se v ní drát pohybuje rychlostí v podél osy z.

A Pomocí Ampérova zákona a Gaussovy věty určete magnetickou indukci $\vec{B}$ a elektrickou intenzitu $\vec{E}$ ve vzdálenosti $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ od osy drátu.

B Zapište matici Λ popisující Lorentzovu transformaci ze soustavy S do soustavy S' a matici Λ^{-1} popisující Lorentzovu transformaci ze soustavy S' do soustavy S.

C Tenzor elektromagnetického pole má tvar

$$F^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Určete elektrickou intenzitu $\vec{E}\,'$ a magnetickou indukci $\vec{B}\,'$ tvořenou drátem v soustavě S'.

D Elektrickou intenzitu $\vec{E}\,'$ v soustavě S' lze vysvětlit tak, že drát má v této soustavě nenulový náboj. Určete náboj drátu.

31. Pomocí vzorce

$$\epsilon^{iklm}\epsilon_{prsm} = -\begin{vmatrix} \delta^i_p & \delta^i_r & \delta^i_s \\ \delta^k_p & \delta^k_r & \delta^k_s \\ \delta^l_p & \delta^l_r & \delta^l_s \end{vmatrix}$$

odvoďte výrazy pro

$$\epsilon^{iklm}\epsilon_{prlm}, \qquad \epsilon^{iklm}\epsilon_{pklm}, \qquad \epsilon^{iklm}\epsilon_{iklm}.$$

32. Hodgeův duál antisymetrického tenzoru p-tého řádu T je antisymetrický tenzor $\star T$ řádu $n - p$ (n je dimenze prostoru) definovaný předpisem

$$(\star T)_{i_{p+1} \ldots i_n} = \frac{1}{p!}\epsilon_{i_1 \ldots i_n} T^{i_1 \ldots i_p}.$$

Pro Minkowského prostor dokažte platnost relace

$$\star\star T = (-1)^{p-1} T.$$