Domácí úkoly z Elektrodynamiky a teorie relativity (F4090)

1. Ukažte, že platí

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}(\vec{u}\times\vec{v}) &= \vec{u}\operatorname{div}\vec{v} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{u} - \vec{v}\operatorname{div}\vec{u} - (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{v},\\ \operatorname{div}(\vec{u}\times\vec{v}) &= \vec{v}\operatorname{rot}\vec{u} - \vec{u}\operatorname{rot}\vec{v}.\end{aligned}$$

2. Uvažujte plášť kužele poloměru R a výšky h umístěný tak, že jeho osa splývá s osou z a jeho podstava leží v rovině $x-y$. Pro vektorové pole $\vec{v}=(-y,x,z^2)$ ověřte platnost

$$\oint_{\partial S}\vec{v}\mathrm{d}\vec{l} = \iint_S \operatorname{rot}\vec{v}\mathrm{d}\vec{S},$$

přičemž na levé straně integrujte přes hranici pláště kužele - tj. přes kružnici poloměru R ležící v rovině $x-y$. Na pravé straně integrujte přes plášť kužele.
Výsledek: Parametrizace kružnice $x=R\cos\phi$, $y=R\sin\phi$, $z=0$, $\phi\in[0,2\pi]$
Parametrizace pláště kužele $x=R(1-t)\cos\phi$, $y=R(1-t)\sin\phi$, $z=ht$, $\phi\in[0,2\pi]$, $t\in[0,1]$
Výsledek integrálů $2\pi R^2$.

3. Pro kuli poloměru R a vektorové pole $\vec{v}=(0,0,z^3)$ ověřte platnost

$$\iint_{\partial V}\vec{v}\mathrm{d}\vec{S} = \iiint_V \operatorname{div}\vec{v}\mathrm{d}V.$$

Výsledek: $\frac{4}{5}\pi R^5$

4. Vypočtěte integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2\delta(x^2-x-2)\mathrm{d}x$$

Výsledek: $\frac{5}{3}$

5. Převeďte δ-distribuci $\delta(x-3)\delta(y-4)$ z Kartézských souřadnic (x,y) do parabolických souřadnic (u,v) (na oblasti, kde $u\geq 0$). Pro parabolické souřadnice platí

$$x=uv, \qquad y=\frac{1}{2}(u^2-v^2)$$

Výsledek: $\dfrac{\delta(u-3)\delta(v-1)}{10}$

6. Zapište rozložení náboje pomocí Diracovy δ funkce a Heavysidovy funkce.

i Kruhovou smyčku rovnoměrně nabitou tak, že celkový náboj je Q, ve válcových souřadnicích. Poloměr smyčky je R, střed smyčky je umístěn v počátku souřadnic a smyčka leží v rovině $x-y$.

ii Kouli poloměru R rovnoměrně nabitou tak, že celkový náboj je Q, střed koule je v počátku souřadnic. Výsledek zapište ve sférických souřadnicích.

iii Kouli poloměru R rovnoměrně nabitou tak, že celkový náboj je Q, střed koule je v počátku souřadnic. Výsledek zapište ve válcových souřadnicích.

iv (trochu obtížnější) Kruhovou smyčku rovnoměrně nabitou tak, že celkový náboj je Q, v kartézských souřadnicích. Poloměr smyčky je R, střed smyčky je umístěn v počátku souřadnic a smyčka leží v rovině $x - y$.

Výsledek:

i $\rho(r, \phi, z) = \frac{Q}{2\pi R}\delta(r - R)\delta(z)$

ii $\rho(r, \theta, \phi) = \frac{3Q}{4\pi R^3} H(R - r)$

iii $\rho(r, \phi, z) = \frac{3Q}{4\pi R^3} H(R^2 - r^2 - z^2)$

iv $\rho(x, y, z) = \frac{Q}{2\pi R} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} \left[\delta(y - \sqrt{R^2 - x^2}) + \delta(y + \sqrt{R^2 - x^2})\right] \delta(z) = \frac{Q}{\pi}\delta(R^2 - x^2 - y^2)\delta(z)$

7. Pomocí Gaussovy věty určete intenzitu elektrického pole uvnitř a vně náslledujících těles:

A Nekonečně dlouhý plný válec poloměru R jehož osa splývá s osou z rovnoměrně nabitý hustotou náboje ρ.

B Plnou kouli s poloměrem R umístěnou v počátku rovnoměrně nabitou hustotou náboje ρ.

C Povrch koule poloměru R umístěné v počátku rovnoměrně nabitou plošnou hustotou náboje σ. z elektrické intenzity určete potenciál.

Pro případ C vypočtěte potenciál také pomocí plošného integrálu. (Dejte pozor na případ, kdy počítáme intenzitu uvnitř a vně kulové slupky.)
Výsledek:

A $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\vec{n} = \frac{1}{r}(x, y, 0)$

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \frac{\rho r}{2\epsilon_0}\vec{n} & r < R \\ \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r}\vec{n} & r > R \end{cases}, \qquad \phi(r) = \begin{cases} -\frac{\rho r^2}{4\epsilon_0} & r < R \\ -\frac{\rho R^2}{4\epsilon_0} - \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0}\ln\frac{r}{R} & r > R \end{cases},$$

B $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\vec{n} = \frac{1}{r}(x, y, z)$

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \frac{\rho r}{3\epsilon_0}\vec{n} & r < R \\ \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2}\vec{n} & r > R \end{cases}, \qquad \phi(r) = \begin{cases} -\frac{\rho}{6\epsilon_0}(r^2 - 3R^2) & r < R \\ \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r} & r > R \end{cases},$$

C $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\vec{n} = \frac{1}{r}(x, y, z)$

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \vec{0} & r < R \\ \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2}\vec{n} & r > R \end{cases}, \qquad \phi(r) = \begin{cases} \frac{\sigma R}{\epsilon_0} & r < R \\ \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r} & r > R \end{cases},$$

8. Spočtěte kapacitu na jednotku délky pro kondenzátor, jehož elektrody jsou tvořeny dvěma nekonečně dlouhými válci poloměru R, které jsou umístěny tak, že jejich osy jsou rovnoběžné a osová vzdálenost je rovna $2D$. Při výpočtu užijte faktu, že elektrické pole tvořené takto umístěnými válci je stejné, jako elektrické pole od dvou nekonečně dlouhých rovnoběžných vodičů s osovou vzdáleností $2\sqrt{D^2 - R^2}$.
Výsledek:

$$\frac{C}{l} = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln\left(\frac{D}{R} + \sqrt{\left(\frac{D}{R}\right)^2 - 1}\right)}$$

9. Spočtěte indukčnost toroidní cívky s vinutím čtvercového průřezu. Vinutí cívky má N závitů, vnitřní poloměr toroidu je a, vnější poloměr toroidu je b a výška cívky je h.
Výsledek:

$$L = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln\frac{b}{a}$$

10. Určete magnetickou indukci pro kruhovou smyčku poloměru R v rovině $x-y$, kterou protéká proud I, a jejíž osa splývá s osou z, pro body ležící na ose z.
Výsledek:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}(0, 0, 1),$$

11. Najděte Taylorův rozvoj funkce $\dfrac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$ kolem bodu $\vec{x}' = \vec{0}$ do druhého řádu v $\vec{x}'$.
Výsledek: $\dfrac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \dfrac{1}{|\vec{x}|} + \dfrac{\vec{x}\vec{x}'}{|\vec{x}|^3} - \dfrac{(\vec{x}')^2}{|\vec{x}|^3} + 3\dfrac{(\vec{x}\vec{x}')^2}{|\vec{x}|^5} + \cdots$

12. V soustavě S uvažujte dvě události, událost A která nastane v bodě $(t_A, x_A, y_A, z_A) = (3a/c, 2a, 0, 0)$ a událost B, která nastane v bodě $(t_B, x_B, y_B, z_B) = (-2a/c, -a, 0, 0)$. Nalezněte Lorentzovu transformaci do soustavy S', kde obě události nastanou ve stejném bodě ale v různých časech. Určete souřadnice těchto událostí v soustavě S'.
Výsledek: S' se pohybuje rychlostí $v = \dfrac{3}{5}c$ podél osy x vůči S

$$t' = \frac{5}{4}\left(t - \frac{3}{5}\frac{x}{c}\right), \qquad x' = \frac{5}{4}\left(x - \frac{3}{5}ct\right), \qquad y' = y, \qquad z' = z,$$

$$(t'_A, x'_A, y'_A, z'_A) = \left(\frac{9}{4}\frac{a}{c}, \frac{1}{4}a, 0, 0\right), (t'_B, x'_B, y'_B, z'_B) = \left(-\frac{7}{4}\frac{a}{c}, \frac{1}{4}a, 0, 0\right).$$

13. Uvažujte soustavy $S^{(1)}$, $S^{(2)}$, a $S^{(3)}$ takové, že soustava $S^{(2)}$ se pohybuje vůči soustavě $S^{(1)}$ rychlostí v podél osy x a soustava $S^{(3)}$ se pohybuje vůči soustavě $S^{(2)}$ rychlostí w podél osy x. Zapište matice které reprezentují Lorentzovu transformaci ze soustavy $S^{(1)}$ do $S^{(2)}$ dále pak ze soustavy $S^{(2)}$ do $S^{(3)}$ a z nich určete matici reprezentující Lorentzovu transformaci ze soustavy $S^{(1)}$ do $S^{(3)}$. Určete rychlost, kterou se pohybuje soustava $S^{(3)}$ vůči soustavě $S^{(1)}$. (Můžete

potlačit souřadnice y a z se kterými se nic neděje.)
Výsledek:

$$\Lambda^{(2)\leftarrow(1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & \frac{-v}{c\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ \frac{-v}{c\sqrt{1-v^2/c^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \end{pmatrix} \qquad \Lambda^{(3)\leftarrow(2)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-w^2/c^2}} & \frac{-w}{c\sqrt{1-w^2/c^2}} \\ \frac{-w}{c\sqrt{1-w^2/c^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-w^2/c^2}} \end{pmatrix}$$

$$\Lambda^{(3)\leftarrow(1)} = \Lambda^{(3)\leftarrow(2)}\Lambda^{(2)\leftarrow(1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} & \frac{-u}{c\sqrt{1-u^2/c^2}} \\ \frac{-w}{c\sqrt{1-u^2/c^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \end{pmatrix}$$

kde $u = \dfrac{v+w}{1+\frac{vw}{c^2}}$ je rychlost pohybu soustavy $S^{(3)}$ vůči soustavě $S^{(1)}$.

14. Hustota náboje a proudu je zadána v soustavě S následujícím způsobem

A Nekonečně dlouhý drát splývající s osou z nabitý délkovou hustotou náboje λ

$$\rho(x,y,z,t) = \lambda\delta(x)\delta(y), \qquad \vec{j} = \vec{0}.$$

B Nekonečně velká deska v rovině $y - z$ nabitá plošnou hustotou náboje σ

$$\rho(x,y,z,t) = \sigma\delta(x), \qquad \vec{j} = \vec{0}.$$

Určete hustotu náboje $\rho'(x',y',z',t')$ a proudu $\vec{j}\,'(x',y',z',t')$ v soustavě S', která se vůči soustavě S pohybuje rychlostí $-v$ podél osy z.
Výsledek:

A $\rho'(x',y',z',t') = \gamma\lambda\delta(x')\delta(y')$, $\qquad \vec{j}\,'(x',y',z',t') = (0,0,v)\gamma\lambda\delta(x')\delta(y')$

B $\rho'(x',y',z',t') = \gamma\sigma\delta(x')$, $\qquad \vec{j}\,'(x',y',z',t') = (0,0,v)\gamma\sigma\delta(x')$

kde $\gamma = \left(1 - v^2/c^2\right)^{-1/2}$.

15. V soustavě S uvažujte částici s nábojem q pohybující se rychlostí v po ose z, v čase $t = 0$ splývá poloha částice s počátkem. Určete elektrickou intenzitu a magnetickou indukci od tohoto náboje. Postupujte tak, že nejdříve určete elektrické a magnetické pole v soustavě S' ve které je částice v klidu, zapište matice přechodu ze soustavy S do S' a matici přechodu z S' do S a proveďte transformaci elektrického a magnetického pole do soustavy S. Tenzor elektromagnetického pole má tvar

$$F^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Výsledek: Matice Lorentzových transformací $\gamma = \left(1 - v^2/c^2\right)^{-1/2}$

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\frac{v}{c}\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{v}{c}\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \frac{v}{c}\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{v}{c}\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

V soustavě S'

$$\vec{E}\,' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'^2}(x', y', z'), \qquad \vec{B}\,' = 0, \qquad r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2},$$

v soustavě S

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'^2}(\gamma x', \gamma y', z') = \frac{q\gamma}{4\pi\epsilon_0} \frac{(x, y, z - vt)}{[x^2 + y^2 + \gamma^2(z - vt)^2]}, \\
\vec{B} &= \frac{qv\gamma}{4\pi\epsilon_0 c^2 r'^2}(-y', x', 0) = \frac{qv\gamma}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{(-y, x, 0)}{[x^2 + y^2 + \gamma^2(z - vt)^2]}.
\end{aligned}$$