Co je to tensor...

Vektorový prostor

Tato část je tu jen pro připomenutí, pokud nevíte co je to vektorový prostor, tak čtení tohoto textu ukončete na konci této věty, neb zbytek textu by pro Vás nebyl ničím jiným, než chaotickou směsí slov a matematických symbolů.

Definice 1. *Vektorový prostor V nad tělesem $\mathbb{K}$ (většinou $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$) je množina V, pro jejíž prvky je definováno násobení skalárem*

$$\alpha\mathbf{u} \in V, \qquad \alpha \in \mathbb{K}, \mathbf{u} \in V,$$

a sčítání

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V, \qquad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V.$$

Prvky vektorového prostoru nazýváme vektory. Násobení vektoru skalárem a sčítání vektorů má navíc tyto vlastnosti

$$\begin{aligned}
\alpha(\beta\mathbf{u}) &= (\alpha\beta)\mathbf{u}, \\
(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} &= \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \\
\mathbf{u} + \mathbf{v} &= \mathbf{v} + \mathbf{u} \\
\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}, \\
(\alpha + \beta)\mathbf{u} &= \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u}, \\
1\mathbf{u} &= \mathbf{u},
\end{aligned}$$

kde $\alpha, \beta \in \mathbb{K}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$. Dále zde existuje nulový prvek $\mathbf{0}$, pro který platí

$$\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{v} = \mathbf{v},$$

kde $\mathbf{v} \in V$. A ke každému vektoru $\mathbf{u} \in V$ existuje vektor $-\mathbf{u} \in V$, pro který platí

$$\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0} = (-\mathbf{u}) + \mathbf{u}.$$

Příklad 1. Příkladem vektorového prostoru nad reálnými čísly může být množina všech trojic reálných čísel $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, přičemž vektory sčítáme tak, že sečteme odpovídající složky a při násobení skalárem vynásobíme každou ze složek.

Příklad 2. Množina všech polynomů nejvýše druhého stupně s komplexními koeficienty, tj. polynomů tvaru $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ tvoří vektorový prostor nad $\mathbb{C}$, přičemž sčítání vektorů a násobení skalárem je sčítání polynomů a násobení polynomu číslem.

Definice 2. *Maximální lineárně nezávislý systém vektorů z vektorového prostoru (tj. takový, že když přidáme libovolný další vektor, tak dostaneme lineárně závislý systém) nazýváme báze.*

Věta 1. *Pokud existuje báze tvořená konečným počtem vektorů, pak všechny ostatní báze mají stejný počet vektorů a jejich počet nazýváme dimenzí vektorového prostoru.*

Věta 2. *Nechť V je n-dimenzionální vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ a $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ jeho báze. Každý vektor lze zapsat jako lineární kombinaci vektorů báze*

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{e}_i v^i,$$

přičemž $v^i \in \mathbb{K}$ nazýváme složkami vektoru $\mathbf{v}$ v bázi $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$.

Všimněte si, jakým způsobem jsme umístili indexy – dolů u bázových vektorů a nahoru u složek vektoru. Horní indexy budeme nazývat kontravariantními a spodní indexy kovariantními. (Za chvíli uvidíme, že existuje dobrý důvod proč rozlišovat indexy na kontravariantní a kovariantní.)

Příklad 3. Za bázi vektorového prostoru z příkladu 1 můžeme zvolit vektory $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$.

Příklad 4. Za bázi vektorového prostoru z příkladu 2 můžeme zvolit vektory $\mathbf{e}_1(x) = 1$, $\mathbf{e}_2(x) = x$, $\mathbf{e}_3(x) = x^2$.

Nechť $\{\mathbf{e}'_i\}_{i=1}^n$ je nějaká jiná báze vektorového prostoru V. Protože $\mathbf{e}'_i$ jsou vektory z V, můžeme každý z nich zapsat jako lineární kombinaci vektorů báze $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$, tj.

$$\mathbf{e}'_i = \sum_{j=1}^n \mathbf{e}_j \Lambda^j{}_i,$$

matici Λ, tvořenou tak, že $\Lambda^j{}_i$ je j-tá složka vektoru $\mathbf{e}'_i$ v bázi $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$, nazýváme maticí přechodu. Vektor $\mathbf{v} \in V$ lze zapsat jak v první tak v druhé bázi

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i v^i = \sum_{i=1}^n \mathbf{e}'_i v'^i,$$

přičemž mezi složkami vektoru v^i v první bázi a složkami vektoru v'^i v druhé bázi platí následující vztah:

Věta 3. *Nechť V je n-dimenzionální vektorový prostor a $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$, $\{\mathbf{e}'_i\}_{i=1}^n$ dvě báze V pro které platí*

$$\mathbf{e}'_i = \sum_{j=1}^n \mathbf{e}_j \Lambda^j{}_i,$$

pak pro složky vektoru $\mathbf{v} \in V$ v těchto bázích platí

$$v'^i = \sum_{j=1}^n (\Lambda^{-1})^i{}_j v^j,$$

kde Λ^{-1} je matice inverzní k Λ.

Platnost tohoto tvrzení lze ověřit tak, že dosadíme za $\mathbf{e}'_i$ a v'^i a zkontrolujeme, že dostaneme stejný vektor jako v případě vyjádření pomocí $\mathbf{e}_i$ a v^i.

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \mathbf{e}'_i v'^i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \mathbf{e}_j \Lambda^j{}_i (\Lambda^{-1})^i{}_k v^k = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \mathbf{e}_j \delta^j_k v^k = \sum_{j=1}^n \mathbf{e}_j v^j,$$

přičemž jsme využili toho, že

$$\sum_{i=1}^n \Lambda^j{}_i (\Lambda^{-1})^i{}_k = (\Lambda \Lambda^{-1})^j{}_k = (\mathbf{1})^j{}_k = \delta^j_k,$$

(δ^i_j jsou prvky jednotkové matice). Matice zapisujeme tak, že první index je řádkový a druhý sloupcový, což má tu výhodu, že při zápisu maticového násobení v indexové formě postupujeme tak, že matice zapíšeme za sebe a sčítáme přes indexy co jsou nejblíže u sebe – druhý index první matice a první index druhé matice. Například v i-tém řádku, m-tém sloupci součinu matic $ABCD$ je

$$(ABCD)^i{}_m = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} A^i{}_j B^j{}_k C^k{}_l D^l{}_m.$$

Navíc si všimněte, že vždy sčítáme přes jeden horní (kontravariantní) a jeden spodní (kovariantní) index. Pokud bychom si představili bázové vektory prostoru V jako řádkový vektor a složky vektoru jako sloupcový vektor, tak bychom mohli zapsat všechny výše uvedené výrazy pomocí maticového násobení.

Duální vektorový prostor

Definice 3. *Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$. Prostor všech lineárních zobrazení $V \to \mathbb{K}$, který budeme značit V^*, vybavený operacemi sčítání vektorů a násobení skalárem podle předpisu*

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\lambda})(\mathbf{v}) &= \boldsymbol{\eta}(\mathbf{v})+\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{v}), && \boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\lambda}\in V^*, \quad \mathbf{v}\in V,\\ (\alpha\boldsymbol{\eta})(\mathbf{v}) &= \alpha(\boldsymbol{\eta}(\mathbf{v})), && \boldsymbol{\eta}\in V^*, \quad \mathbf{v}\in V, \quad \alpha\in\mathbb{K},\end{aligned}$$

tvoří vektorový prostor, který budeme nazývat duálním vektorovým prostorem k V. Vektory z tohoto vektorového prostoru budeme nazývat 1-formy (někdy je také nazýváme kovektory).

V případě konečnědimenzionálního vektorového prostoru má vektorový prostor a k němu duální prostor stejnou dimenzi. Máme-li navíc zadánu bázi vektorového prostoru, tak k ní můžeme přiřadit bázi duálního prostoru:

Věta 4. *Nechť $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$ je báze n-dimenzionálního vektorového prostoru V. Za bázi duálního vektorového prostoru V^* můžeme zvolit vektory (tj. lineární zobrazení z V do $\mathbb{K}$) $\{\mathbf{e}^i\}_{i=1}^n = \{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ definované předpisem*

$$\mathbf{e}^i(\mathbf{e}_j) = \delta^i_j = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}.$$

Tuto bázi nazýváme duální bází k $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$.

Libovolnou 1-formu $\boldsymbol{\eta}\in V^*$ pak v této bázi zapíšeme jako

$$\boldsymbol{\eta} = \sum_{i=1}^{n} \eta_i \mathbf{e}^i,$$

kde η_i jsou složky 1-formy v duální bázi.

S užitím báze a duální báze lze vyjádřit složky vektoru $\mathbf{v}\in V$ a 1-formy $\boldsymbol{\eta}\in V^*$ zvláště jednoduchým způsobem

$$\boldsymbol{\eta}(\mathbf{e}_i) = \sum_{j=1}^{n} \eta_j \mathbf{e}^j(\mathbf{e}_i) = \sum_{j=1}^{n} \eta_j \delta^j_i = \eta_i, \qquad \mathbf{e}^i(\mathbf{v}) = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{e}^i(\mathbf{e}_j v^j) = \sum_{j=1}^{n} \delta^i_j v^j = v^i.$$

Příklad 5. Jak vypadá výraz $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{v})$ zapsaný pomocí složek $\boldsymbol{\eta}$ a $\mathbf{v}$? (*Odpověď:* $\sum_{i=1}^n \eta_i v^i$)

Příklad 6. Uvažujte vektorový prostor V z příkladu 2 a 1-formu $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{v}) = \int_0^1 x^2 \mathbf{v}(x) \mathrm{d}x$, $\mathbf{v} \in V$. Jaké složky má tato forma v duální bázi k bázi zavedené v příkladu 4? (*Odpověď:* $(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5})$)

Zvolíme-li jinou bázi vektorového prostoru způsobem popsaným ve větě 3, pak vztah mezi novými vektory duální báze a původními vektory duální báze musí být takový aby platilo

$$\mathbf{e}'^i(\mathbf{e}'_j) = \delta^i_j,$$

a vztah mezi složkami 1-formy musí být takový aby

$$\boldsymbol{\eta} = \sum_{i=1}^n \eta_i \mathbf{e}^i = \sum_{i=1}^n \eta'_i \mathbf{e}'^i.$$

To nastane právě když:

Věta 5. *Nechť V je n-dimenzionální vektorový prostor a $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$, $\{\mathbf{e}'_i\}_{i=1}^n$ dvě báze V pro které platí*

$$\mathbf{e}'_i = \sum_{j=1}^n \mathbf{e}_j \Lambda^j{}_i,$$

dále nechť $\{\mathbf{e}^i\}_{i=1}^n$, $\{\mathbf{e}'^i\}_{i=1}^n$ jsou k nim duální báze a $\boldsymbol{\eta} \in V^*$ je nějaká 1-forma. Pak pro vektory duální báze a pro složky 1-formy platí

$$\mathbf{e}^i = \sum_{j=1}^n (\Lambda^{-1})^i{}_j \mathbf{e}^j, \qquad \eta'_i = \sum_{j=1}^n \eta_j \Lambda^j{}_i,$$

kde Λ^{-1} je matice inverzní k Λ.

Platnost této věty lze ověřit podobným způsobem jako u věty 3.

Prohlédnete-li si pořádně věty 3 a 5, tak Vám neunikne, že objekty s horními (kontravariantními) indexy, tj. složky vektoru a vektory duální báze, transformujeme při změně báze pomocí matice Λ^{-1}, zatím co objekty s dolními (kovariantními) indexy, tj. složky formy a vektory báze, transformujeme pomocí matice Λ. To, že typ indexu (kontravariantní nebo kovariantní), kterým je daný objekt vybaven určuje jakým způsobem se chová při změně báze nám umožňuje podívat se na problematiku vektorů a 1-forem trochu jiným pohledem – méně matematickým zato pro fyziku často postačujícím (rozuměj méně teoretickým zato více praktickým). Můžeme zapomenout na vektorové prostory, bázi a duální prostor a dívat se na vektor a 1-formu jako na n-tici čísel, které indexujeme buď kontravariantním (u vektoru) nebo kovariantním (u 1-formy) indexem. Každou změnu báze (která často odpovídá změně vztažné soustavy) charakterizujeme maticí přechodu, vektory a formy pak transformujeme způsobem odpovídajícím typu indexu kterým je vybaven.

Tensorový prostor

Definice 4. *Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$, p-kontravariantní a q-kovariantní tensor $\mathbf{T}$ je multilineární zobrazení z $(V^*)^p \times V^q$ do $\mathbb{K}$. Multilineární znamená, že toto zobrazení je lineární* *v každé ze složek*

$$
\begin{aligned}
\mathbf{T}(\alpha\boldsymbol{\eta}_1 + \beta\boldsymbol{\lambda}_1, \ldots, \boldsymbol{\eta}_p, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_q) &= \alpha\mathbf{T}(\boldsymbol{\eta}_1, \ldots, \boldsymbol{\eta}_p, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_q) + \beta\mathbf{T}(\boldsymbol{\lambda}_1, \ldots, \boldsymbol{\eta}_p, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_q) \\
&\vdots \\
\mathbf{T}(\boldsymbol{\eta}_1, \ldots, \alpha\boldsymbol{\eta}_p + \beta\boldsymbol{\lambda}_p, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_q) &= \alpha\mathbf{T}(\boldsymbol{\eta}_1, \ldots, \boldsymbol{\eta}_p, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_q) + \beta\mathbf{T}(\boldsymbol{\eta}_1, \ldots, \boldsymbol{\lambda}_p, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_q) \\
\mathbf{T}(\boldsymbol{\eta}_1, \ldots, \boldsymbol{\eta}_p, \alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{v}_q) &= \alpha\mathbf{T}(\boldsymbol{\eta}_1, \ldots, \boldsymbol{\eta}_p, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_q) + \beta\mathbf{T}(\boldsymbol{\eta}_1, \ldots, \boldsymbol{\eta}_p, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{v}_q) \\
&\vdots \\
\mathbf{T}(\boldsymbol{\eta}_1, \ldots, \boldsymbol{\eta}_p, \mathbf{v}_1, \ldots, \alpha\mathbf{v}_q + \beta\mathbf{u}_q) &= \alpha\mathbf{T}(\boldsymbol{\eta}_1, \ldots, \boldsymbol{\eta}_p, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_q) + \beta\mathbf{T}(\boldsymbol{\eta}_1, \ldots, \boldsymbol{\eta}_p, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{u}_q)
\end{aligned}
$$

kde $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\boldsymbol{\eta}_1, \ldots, \boldsymbol{\eta}_p, \boldsymbol{\lambda}_1, \ldots, \boldsymbol{\lambda}_p \in V^*$ *a* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_q, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_q \in V$. *Množina všech tensorů vybavená operacemi sčítání tensorů a násobení tensoru skalárem podle předpisu*

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{T} + \mathbf{U})(\boldsymbol{\eta}_1, \ldots, \boldsymbol{\eta}_p, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_q) &= \mathbf{T}(\boldsymbol{\eta}_1, \ldots, \boldsymbol{\eta}_p, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_q) + \mathbf{U}(\boldsymbol{\eta}_1, \ldots, \boldsymbol{\eta}_p, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_q) \\
(\alpha\mathbf{T})(\boldsymbol{\eta}_1, \ldots, \boldsymbol{\eta}_p, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_q) &= \alpha\left(\mathbf{T}(\boldsymbol{\eta}_1, \ldots, \boldsymbol{\eta}_p, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_q)\right)
\end{aligned}
$$

tvoří vektorový prostor, který budeme značit $\tau_q^p(V)$.

Příklad 7. Nechť V je 3-dimenzionální Eukleidovský prostor. Můžeme definovat tensory $\mathbf{g} \in \tau_2(V)$ a $\boldsymbol{\epsilon} \in \tau_3(V)$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u^1v^1 + u^2v^2 + u^3v^3, \\
\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) &= \det \begin{pmatrix} u^1 & v^1 & w^1 \\ u^2 & v^2 & w^2 \\ u^3 & v^3 & w^3 \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

kde $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ a (u^1, u^2, u^3) atd. jsou složky vektorů v ortonormální bázi (za chvíli si ukážeme, že tyto definice nezáleží na volbě ortonormální báze, pokud mají stejnou orientaci). Ověřte multilinearitu těchto zobrazení. Ukažte, že platí

$$
\mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{g}(\mathbf{v}, \mathbf{u}), \qquad \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = -\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) = -\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v}).
$$

Příklad 8. Nechť V je vektorový prostor tvořený polynomy nejvýše druhého stupně popsaný v příkladu 2. Uvažujte tensor $\mathbf{T} \in \tau_2^1(V)$ definovaný předpisem $\mathbf{T}(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \boldsymbol{\eta}(\mathbf{u}'' \cdot \mathbf{v})$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, $\boldsymbol{\eta} \in V^*$, tj. první polynom dvakrát zderivovaný vynásobený druhým polynomem a to celé vyčíslené pomocí $\boldsymbol{\eta}$. Ověřte multilinearitu tohoto zobrazení. Co dostaneme pro $\mathbf{u}(x) = x^2$, $\mathbf{v}(x) = x - 1$ a $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{w}) = \mathbf{w}(-1)$ (funkční hodnota v -1). (*Odpověď:* $\mathbf{T}(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = -4$)

Definice 5. *Tensorový součin tensoru* $\mathbf{T} \in \tau_q^p(V)$ *a tensoru* $\mathbf{U} \in \tau_s^r(V)$ *je tensor* $\mathbf{T} \otimes \mathbf{U} \in \tau_{q+s}^{p+r}(V)$, *tj. multilineární zobrazení mající jako argumenty* $p + r$ *1-forem a* $q + s$ *vektorů. Tento tensor je definovaný tak, že první tensor* $\mathbf{T}$ *v tensorovém součinu vyčíslíme na prvních* p *1-formách a* q *vektorech, druhý tensor* $\mathbf{U}$ *v tensorovém součinu na zbylých* r *1-formách a* s *vektorech a výsledné hodnoty vynásobíme, tj.*

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{T} \otimes \mathbf{U})(\boldsymbol{\eta}_1, \ldots, \boldsymbol{\eta}_p, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_q, \boldsymbol{\eta}_{p+1}, \ldots, \boldsymbol{\eta}_{p+r}, \mathbf{v}_{q+1}, \ldots, \mathbf{v}_{q+s}) &= \\
\mathbf{T}(\boldsymbol{\eta}_1, \ldots, \boldsymbol{\eta}_p, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_q) \cdot \mathbf{U}(\boldsymbol{\eta}_{p+1}, \ldots, \boldsymbol{\eta}_{p+r}, \mathbf{v}_{q+1}, \ldots, \mathbf{v}_{q+s}),&
\end{aligned}
$$

kde $\boldsymbol{\eta}_1, \ldots, \boldsymbol{\eta}_{p+r} \in V^*$ *a* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{q+s} \in V$.

Zápis tensoru v bázi

Nechť V je n-dimenzionální vektorový prostor a $\mathbf{T} \in \tau^p_q(V)$ p-krát kontravariantní q-krát kovariantní tensor, a $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$ nějaká báze V. Vektory $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_q \in V$ a 1-formy $\boldsymbol{\eta}_1, \ldots, \boldsymbol{\eta}_p \in V^*$, můžeme zapsat v dané bázi jako

$$\mathbf{v}_I = \sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i (v_I)^i, \qquad I = 1, \ldots, q,$$
$$\boldsymbol{\eta}_J = \sum_{i=1}^n (\eta_J)_i \mathbf{e}^i, \qquad J = 1, \ldots, p,$$

kde $(v_I)^i$ a $(\eta_J)_i$ jsou složky I-tého vektoru a J-té 1-formy. Vyčíslíme-li tensor na těchto vektorech a 1-formách

$$\begin{aligned}
&\mathbf{T}(\boldsymbol{\eta}_1, \ldots, \boldsymbol{\eta}_p, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_q) = \\
&\sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_p=1}^n \sum_{j_1=1}^n \cdots \sum_{j_q=1}^n \mathbf{T}\left(\left[(\eta_1)_{i_1}\mathbf{e}^{i_1}\right], \ldots, \left[(\eta_p)_{i_p}\mathbf{e}^{i_p}\right], \left[\mathbf{e}_{j_1}(v_1)^{j_1}\right], \ldots, \left[\mathbf{e}_{j_q}(v_q)^{j_q}\right]\right) = \\
&\sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_p=1}^n \sum_{j_1=1}^n \cdots \sum_{j_q=1}^n (\eta_1)_{i_1} \cdots (\eta_p)_{i_p} \cdot (v_1)^{j_1} \cdots (v_q)^{j_q} \cdot \mathbf{T}(\mathbf{e}^{i_1}, \ldots, \mathbf{e}^{i_p}, \mathbf{e}_{j_1}, \ldots, \mathbf{e}_{j_q}) = \\
&\qquad\qquad \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_p=1}^n \sum_{j_1=1}^n \cdots \sum_{j_q=1}^n (\eta_1)_{i_1} \cdots (\eta_p)_{i_p} \cdot (v_1)^{j_1} \cdots (v_q)^{j_q} \cdot T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q},
\end{aligned}$$

přičemž jsme využili multilinearity k tomu, abychom dostali složky vektorů a 1-forem mimo tensor, takže tensor je vyčíslený pouze na bázových vektorech. Čísla $T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} = \mathbf{T}(\mathbf{e}^{i_1}, \ldots, \mathbf{e}^{i_p}, \mathbf{e}_{j_1}, \ldots, \mathbf{e}_{j_q})$ (celkem n^{p+q} čísel) zcela popisují daný tensor. Tato čísla jsou ve skutečnosti složky vektoru v bázi tensorového prostoru $\tau^p_q(V)$ tvořeného vektory $\{\mathbf{e}_{i_1} \otimes \mathbf{e}_{i_2} \otimes \cdots \mathbf{e}_{i_p} \otimes \mathbf{e}^{j_1} \otimes \mathbf{e}^{j_2} \otimes \cdots \mathbf{e}^{j_q}\}^n_{i_1,\ldots,i_p,j_1,\ldots,j_q=1}$. To znamená, že tensor lze zapsat ve tvaru

$$\mathbf{T} = \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_p=1}^n \sum_{j_1=1}^n \cdots \sum_{j_q=1}^n T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \mathbf{e}_{i_1} \otimes \cdots \mathbf{e}_{i_p} \otimes \mathbf{e}^{j_1} \otimes \cdots \mathbf{e}^{j_q}.$$

Je zřejmé, že vektor lze ztotožnit s 1-krát kontravariantním tensorem ($V \simeq \tau^1(V)$) a 1-formu lze ztotožnit s 1-krát kovariantním tensorem ($V^* \simeq \tau_1(V)$).

Změna báze

Věta 6. *Nechť V je n-dimenzionální vektorový prostor a $\mathbf{T} \in \tau^p_q(V)$ p-krát kontravariantní q-krát kovariantní tensor, $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$, $\{\mathbf{e}'_i\}_{i=1}^n$ dvě báze V pro které platí*

$$\mathbf{e}'_i = \sum_{j=1}^n \mathbf{e}_j \Lambda^j{}_i.$$

Pak pro složky tensoru v těchto bázích platí

$$T'^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} = \sum_{k_1=1}^n \cdots \sum_{k_p=1}^n \sum_{l_1=1}^n \cdots \sum_{l_q=1}^n (\Lambda^{-1})^{i_1}{}_{k_1} \cdots (\Lambda^{-1})^{i_p}{}_{k_p} \cdot \Lambda^{l_1}{}_{j_1} \cdots \Lambda^{l_q}{}_{j_q} \cdot T^{k_1 \ldots k_p}_{l_1 \ldots l_q}.$$

Výrazu pro transformaci složek tensoru lze rozumět tak, že každý index transformujeme odděleně a to způsobem odpovídajícím typu daného indexu – pomocí matice Λ^{-1} v případě kontravariantního indexu a pomocí matice Λ v případě kovariantního indexu.

Příklad 9. Ukažte, že vyjádření tensorů z příkladu 7 je stejné pro všechny ortonormální báze mající stejnou orientaci, tj. pro báze mezi nimiž matice přechodu Λ splňuje podmínky $\Lambda^T\Lambda = \mathbf{1}$ a $\det\Lambda = 1$.
Řešení: V bázi, kterou zvolíme pro definici tensorů, mají tensory složky

$$g_{ij} = \delta_{ij}, \qquad \epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & (ijk) \text{ je sudá permutace } (123) \\ -1 & (ijk) \text{ je lichá permutace } (123) \\ 0 & \text{pokud jsou alespoň dva indexy stejné} \end{cases}$$

Pokud změníme bázi způsobem odpovídajícím matici přechodu Λ tak

$$g'_{ij} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \Lambda^k{}_i \Lambda^l{}_j g_{kl} = \sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3} \Lambda^k{}_i \Lambda^l{}_j \delta_{kl} = \sum_{k=1}^{3} \Lambda^k{}_i \Lambda^k{}_j = \sum_{k=1}^{3} (\Lambda^T)_i{}^k \Lambda^k{}_j = (\Lambda^T\Lambda)_{ij} = \delta_{ij},$$
$$\epsilon'_{ijk} = \sum_{a=1}^{3}\sum_{b=1}^{3}\sum_{c=1}^{3} \Lambda^a{}_i \Lambda^b{}_j \Lambda^c{}_k \epsilon_{abc} = \det\Lambda \cdot \epsilon_{ijk} = \epsilon_{ijk}.$$

Díky tomu, že tensor $g_{ij} = \delta_{ij}$ a jeho inverze $(g^{-1})^{ij} = \delta^{ij}$ vypadají stejně ve všech ortonormálních bázích, nemusíme v případě Eukleidovského prostoru rozlišovat mezi spodními a horními indexy. Indexy můžeme snižovat pomocí δ_{ij} a δ^{ij}. Například v případě vektoru a 1-formy

$$v^i = \sum_{j=1}^{3} v_j \delta^{ji}, \qquad v_i = \sum_{j=1}^{3} \delta_{ij} v^j.$$

Kontrakce tensoru

Lineární zobrazení $m : V \to V$ reprezentujeme v bázi pomocí matice $M^i{}_j$ takové, že pro složky obrazu $\mathbf{w} = m(\mathbf{v}) \in V$ vektoru $\mathbf{v} \in V$ platí $w^i = \sum_{j=1}^{n} M^i{}_j v^j$. Tuto matici můžeme asociovat s 1-krát kontravariantním, 1-krát kovariantním tensorem

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} M^i{}_j \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j,$$

přičemž není těžké ukázat, že takto definovaný tensor se chová správným způsobem při změně báze.

Známým faktem z lineární algebry je, že stopa matice

$$\mathrm{tr}M = \sum_{i=1}^{n} M^i{}_i$$

je veličina nezávislá na volbě báze. Důležitým faktem pro nezávislost stopy na volbě báze je to, že sčítáme přes jeden horní a jeden spodní index. Zobecněním stopy pro případ tensoru je takzvaná kontrakce tensoru – operace při níž sčítáme přes jeden horní a jeden spodní index. Jelikož tensor může mít více horních a spodních indexů, musíme určit přes které indexy chceme sčítat.

Definice 6. *Nechť V je n-dimenzionální vektorový prostor a $\mathbf{T} \in \tau_q^p(V)$ p-krát kontravariantní q-krát kovariantní tensor. Kontrakce (stopa) tensoru je tensor z $\tau_{q-1}^{p-1}(V)$ definovaný tak, že pro jeho složky platí*

$$(\mathrm{tr}_s^r T)_{j_1 \dots j_{q-1}}^{i_1 \dots i_{p-1}} = \sum_{k=1}^{n} T_{j_1 \dots k \dots j_{q-1}}^{i_1 \dots k \dots i_{p-1}},$$

přičemž index k je na pozici r-tého kontravariantního a s-tého kovariantního indexu.

Ačkoliv se tato definice může zdáti nepřehledná, poselství je jasné – pokud sčítáme přes horní a spodní index, dostaneme výsledek nezávislý na volbě báze.