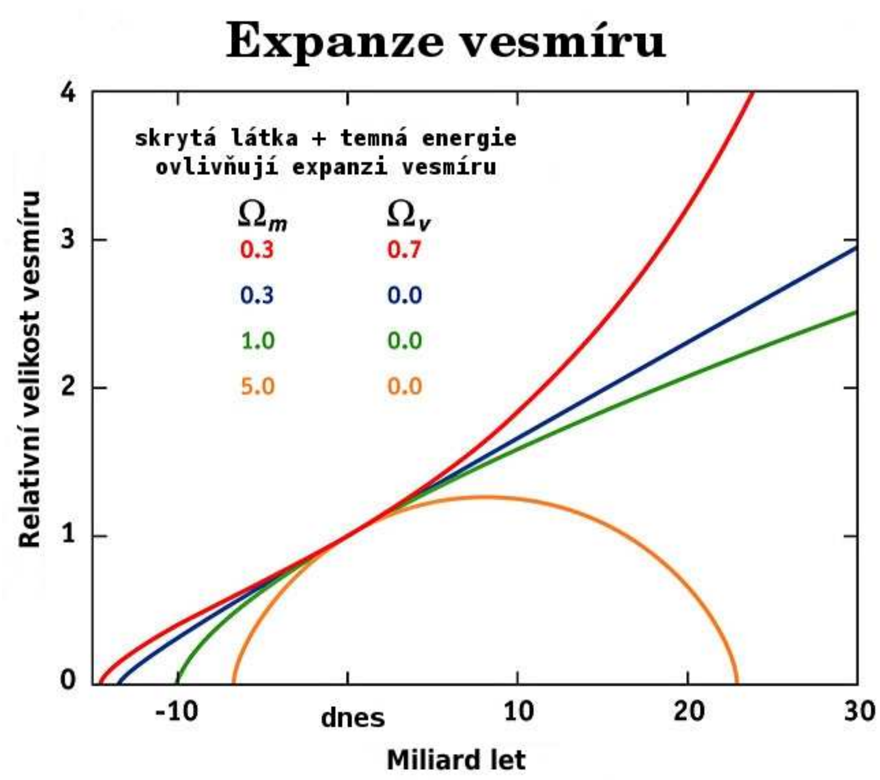
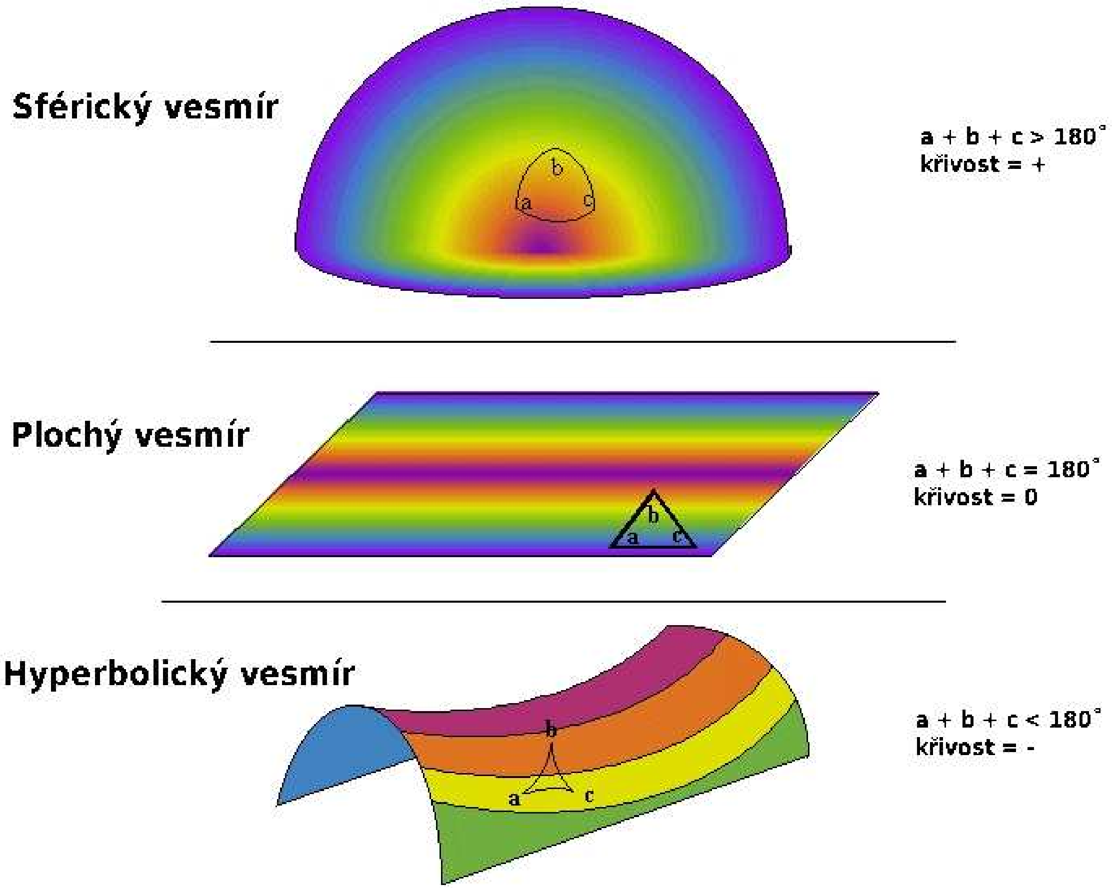

Expanze vesmíru
skrytá látka + temná energie
ovlivňují expanzi vesmíru
Ωm Ωv
0.3 0.7
0.3 0.0
1.0 0.0
5.0 0.0
Relativní velikost vesmíru
0
1
2
3
4
-10
dnes
10
20
30
Miliard let

Geometrie vesmíru

9. března 2008

Plochý vs. zakřivený prostor



Vzdálenost

- 2D - rovina

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2$$

Vzdálenost

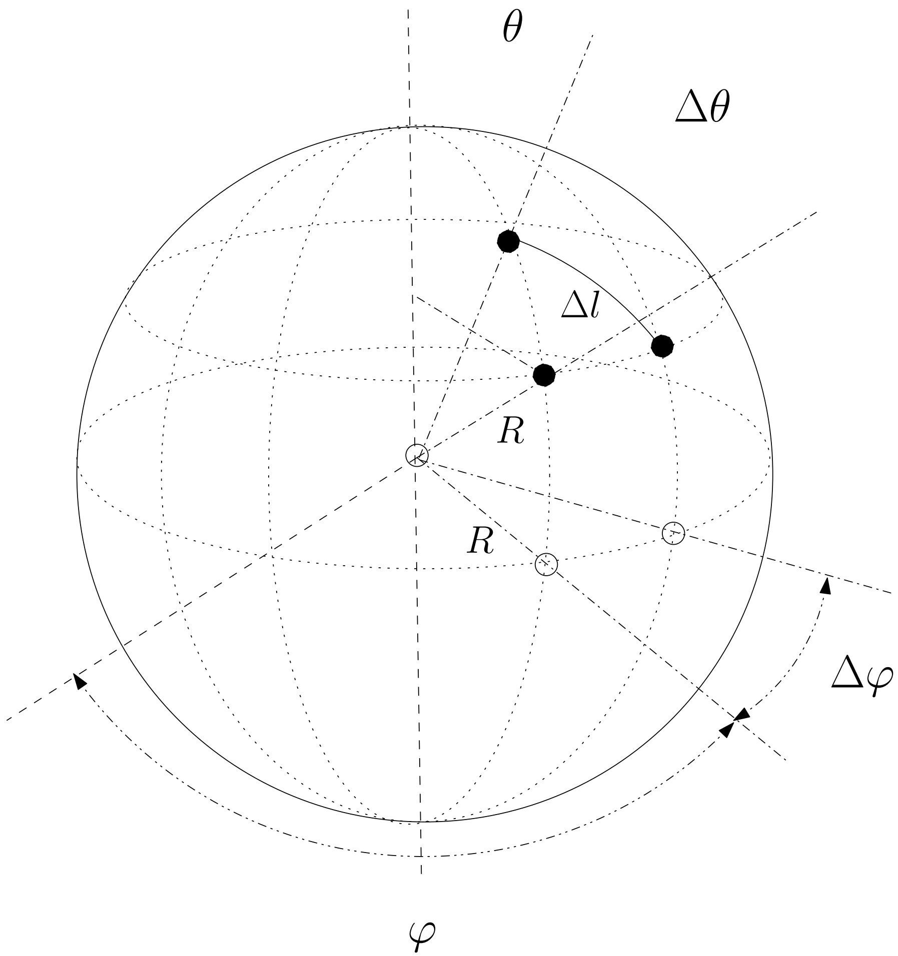
- 2D - rovina

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2$$

- 2D povrch sféry

$$\mathrm{d}s^2 = R^2\mathrm{d}\theta^2 + R^2\sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2$$

2-Sféra



2-Sféra

- V 3D euklidovském prostoru lze 2-sféru popsat rovnicí

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

2-Sféra

- V 3D euklidovském prostoru lze 2-sféru popsat rovnicí

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

- diferenciací rovnice, dostáváme vztah mezi jednotlivými diferenciály

$$\mathrm{d}z = -\frac{x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y}{z} = \pm\frac{x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}.$$

2-Sféra

- V 3D euklidovském prostoru lze 2-sféru popsat rovnicí

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

- diferenciací rovnice, dostáváme vztah mezi jednotlivými diferenciály

$$\mathrm{d}z = -\frac{x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y}{z} = \pm\frac{x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}.$$

- Vzdálenost je dána

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \frac{(x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y)^2}{R^2 - x^2 - y^2}$$

2-Sféra

- Použijeme polárních souřadnic

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad x^2 + y^2 = r^2$$

2-Sféra

- Použijeme polárních souřadnic

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad x^2 + y^2 = r^2$$

- Pro diferenciály dostáváme

$$x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y = r\mathrm{d}r$$

2-Sféra

- Použijeme polárních souřadnic

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad x^2 + y^2 = r^2$$

- Pro diferenciály dostáváme

$$x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y = r\mathrm{d}r$$

- a pro součet kvadrátů vztah

$$\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\varphi^2.$$

2-Sféra

- Použijeme polárních souřadnic

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad x^2 + y^2 = r^2$$

- Pro diferenciály dostáváme

$$x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y = r\mathrm{d}r$$

- a pro součet kvadrátů vztah

$$\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\varphi^2.$$

- Vzdálenost na 2-sféře je tedy dána

$$\boxed{\mathrm{d}s^2 = \frac{\mathrm{d}r^2}{1-r^2/R^2} + r^2\mathrm{d}\varphi^2}$$

2-Sféra

- Pro $R^2 \to \infty$ popisuje vztah vzdálenost na rovině

2-Sféra

- Pro $R^2 \to \infty$ popisuje vztah vzdálenost na rovině
- Pro $R^2 < 0 : \quad R \to \mathrm{i}R$ popisuje pseudosféru s zápornou křivostí

2-Sféra

- Pro $R^2 \to \infty$ popisuje vztah vzdálenost na rovině
- Pro $R^2 < 0 : \quad R \to \mathrm{i}R$ popisuje pseudosféru s zápornou křivostí
- Přeškálováním jednotek

$$r = \frac{r}{\sqrt{|R^2|}}$$

2-Sféra

- Pro $R^2 \to \infty$ popisuje vztah vzdálenost na rovině
- Pro $R^2 < 0 : \quad R \to \mathrm{i}R$ popisuje pseudosféru s zápornou křivostí
- Přeškálováním jednotek

$$r = \frac{r}{\sqrt{|R^2|}}$$

- dostáváme pro vzdálenost na 2-sféře vztah

$$\mathrm{d}s^2 = |R^2| \left(\frac{\mathrm{d}r^2}{1 - kr^2} + r^2 \mathrm{d}\varphi^2 \right)$$

kde k je $0, \pm 1$

Vícerozměrné prostory

- Analogickým postupem dostaneme vztah pro 3-sféru

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{\mathrm{d}r^2}{1 - kr^2} + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\varphi^2)$$

Vícerozměrné prostory

- Analogickým postupem dostaneme vztah pro 3-sféru

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{\mathrm{d}r^2}{1 - kr^2} + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\varphi^2)$$

- Obecně vztah

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_{\mu,\nu} g_{\nu\mu} \mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu$$

vyjadřující vzdálenost mezi dvěma blízkými body nazýváme metrikou a $g_{\nu\mu}$ metrickým koeficientem.

Prostoročas

- Plochý prostoročas speciální teorie relativity (Minkovskiho)

$$\mathrm{d}s^2 = -c^2\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$$

Prostoročas

- Plochý prostoročas speciální teorie relativity (Minkovskiho)

$$\mathrm{d}s^2 = -c^2\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$$

- Zobecnění na nejjednoduší neplochý homogenní a isotropní prostoročas

$$\boxed{\mathrm{d}s^2 = -c^2\mathrm{d}t^2 + \left[\frac{\mathrm{d}r^2}{1-kr^2} + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2)\right]}$$

Robertsonova - Walkerova metrika

Nejjednoduší metrika pro rozpínající se homogenní a isotropní vesmír

Robertsonova - Walkerova metrika

Nejjednoduší metrika pro rozpínající se homogenní a isotropní vesmír

$$\boxed{\mathrm{d}s^2 = -c^2\mathrm{d}t^2 + a(t)\left[\tfrac{\mathrm{d}r^2}{1-kr^2} + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2)\right],}$$

kde $a(t)$ je škálovací faktor

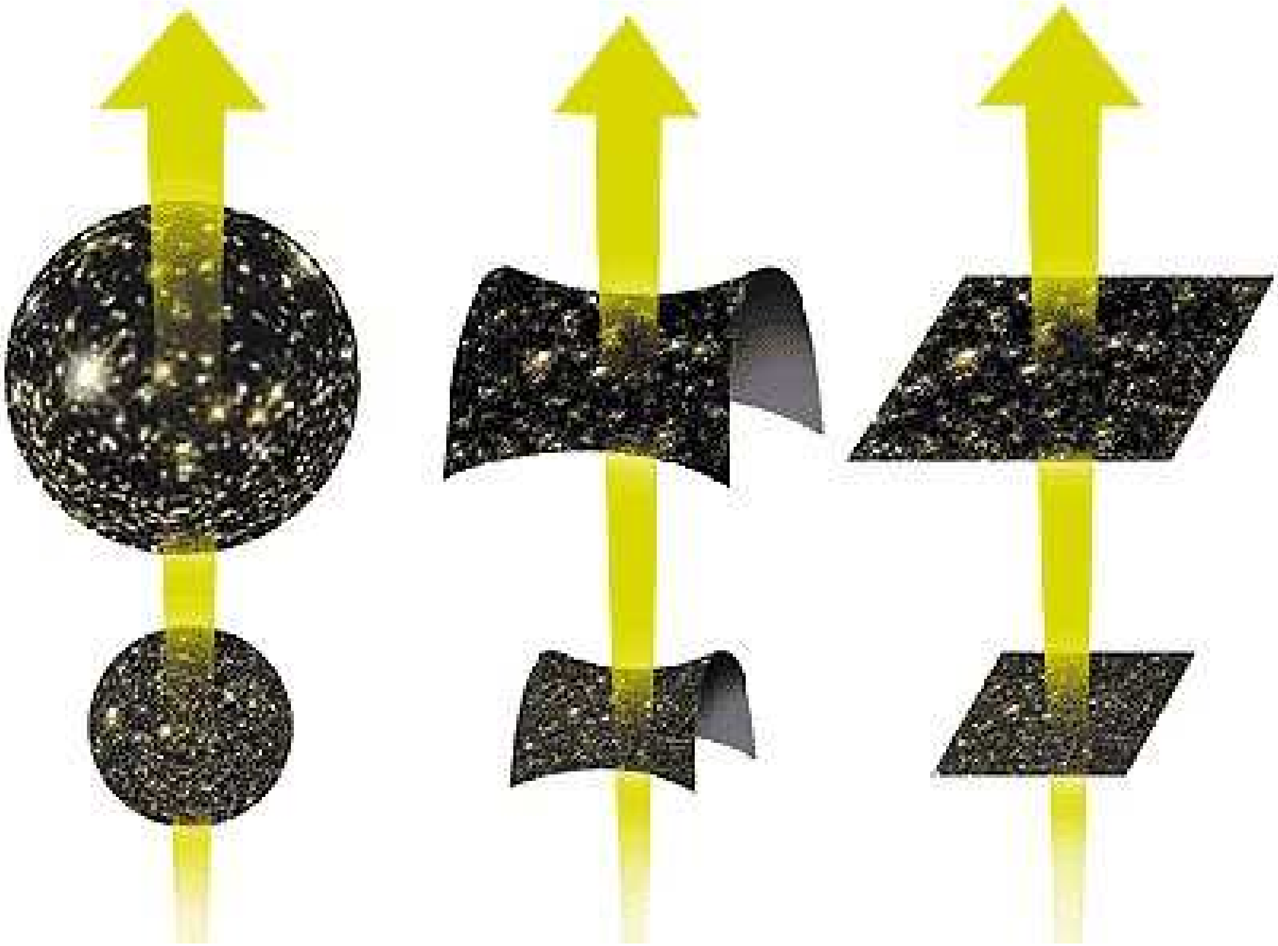
Geometrie vesmíru

Poměr celkové střední hustoty ke kritické hustotě

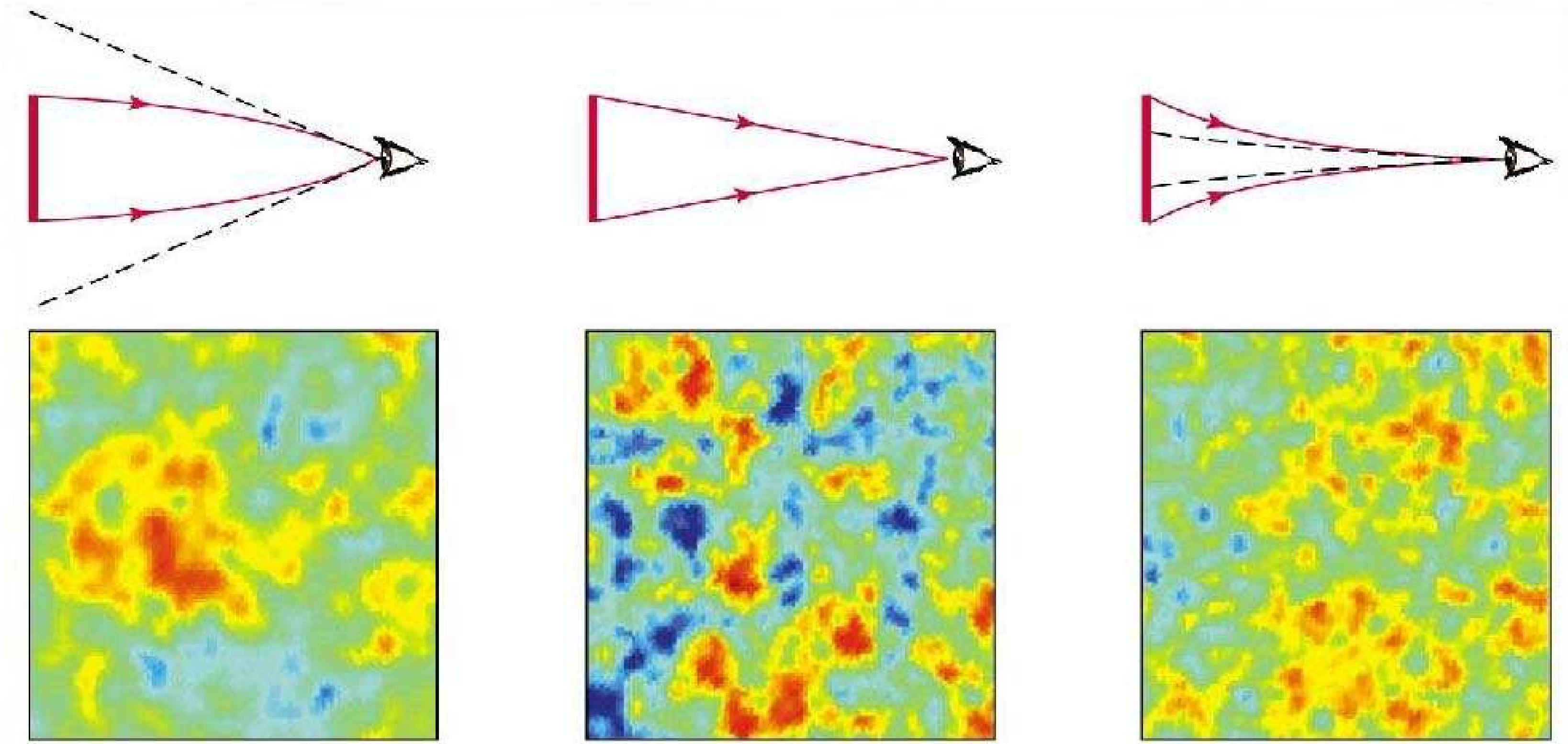
$$\Omega = \frac{\rho_b + \rho_m + \rho_\nu}{\rho_k} = \frac{\rho}{\rho_k}$$

- $\Omega_0 = 1$: Plochý prostor s nulovou křivostí
- $\Omega_0 > 1$: Zakřivený prostor s kladnou křivostí
- $\Omega_0 < 1$: Zakřivený prostor se zápornou křivostí

Geometrie vesmíru



Jaký je právě teď?

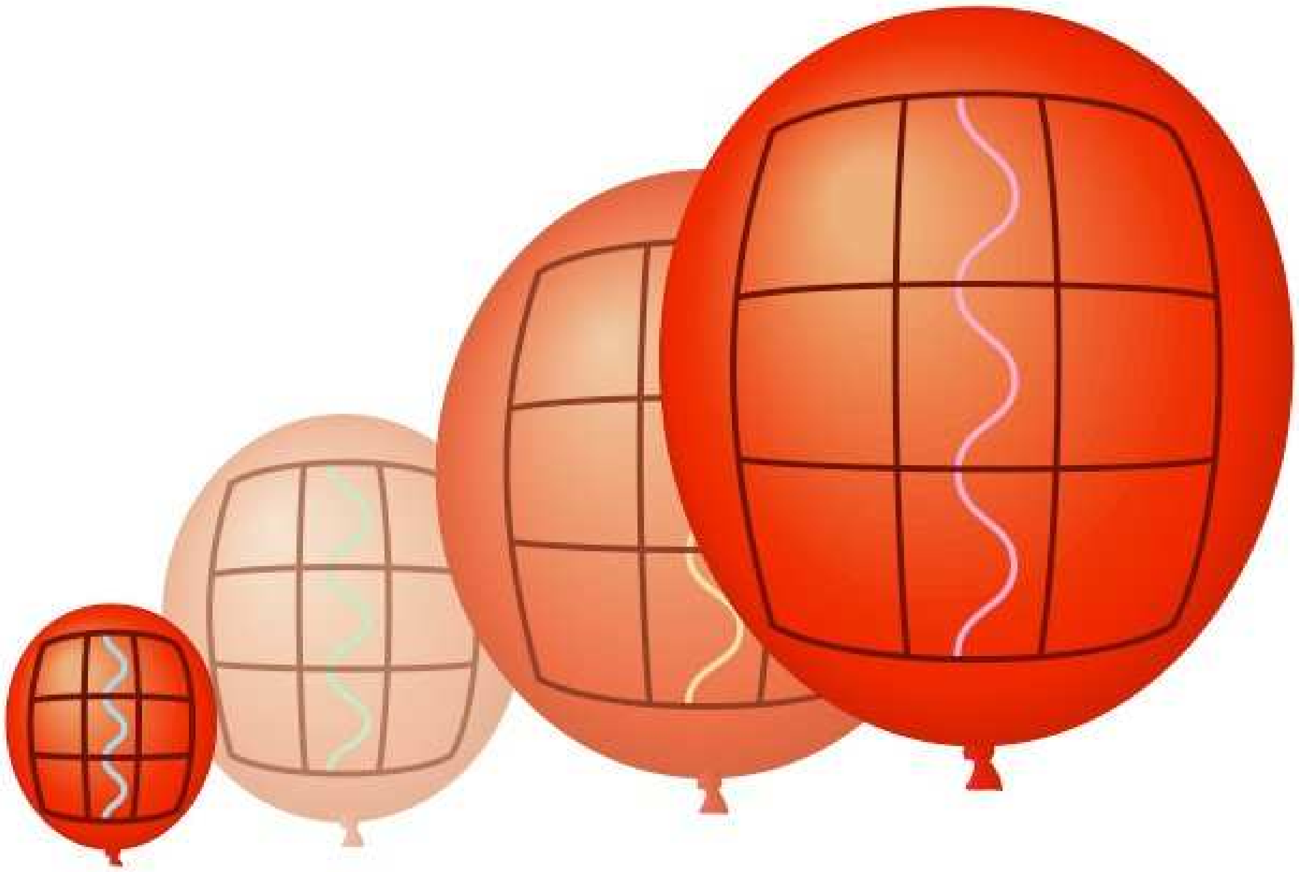


V uzavřeném vesmíru se horké skvrny zdají být větší než ve skutečnosti

V plochém vesmíru jsou horké skvrny stejně veliké jako ve skutečnosti

V otevřeném vesmíru se horké skvrny zdají být menší než ve skutečnosti

Kosmologický rudý posuv



Kosmologický rudý posuv

- Definice rudého posuvu

$$z = \frac{\lambda_{\rm obs} - \lambda_{\rm em}}{\lambda_{\rm em}}$$

Kosmologický rudý posuv

- Definice rudého posuvu

$$z = \frac{\lambda_{\text{obs}} - \lambda_{\text{em}}}{\lambda_{\text{em}}}$$

- Pro malé hodnoty rychlostí lze použít klasický Dopplerův vztah pro relaci mezi rudým posuvem a rychlostí

$$z = \frac{v}{c}$$

Kosmologický rudý posuv

- Definice rudého posuvu

$$z = \frac{\lambda_{\mathrm{obs}} - \lambda_{\mathrm{em}}}{\lambda_{\mathrm{em}}}$$

- Pro malé hodnoty rychlostí lze použít klasický Dopplerův vztah pro relaci mezi rudým posuvem a rychlostí

$$z = \frac{v}{c}$$

- který po dosazení do definice pro rychlost v důsledku rozpínání

$$v = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} r(t) \quad cz = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} r(t)$$

Kosmologický rudý posuv

- Rudý posuv lze zapsat pomocí škálovacího faktoru

$$z = \frac{a(t_{\mathrm{obs}}) - a(t_{\mathrm{em}})}{a(t_{\mathrm{em}})}$$

Kosmologický rudý posuv

- Rudý posuv lze zapsat pomocí škálovacího faktoru

$$z = \frac{a(t_{\mathrm{obs}}) - a(t_{\mathrm{em}})}{a(t_{\mathrm{em}})}$$

- S použitím Robertsonovy - Walkerovy metriky pro nulový paprsek (geodetickou čáru) dostáváme

$$c\frac{\mathrm{d}t}{a} = -\frac{\mathrm{d}r}{(1 - kr^2)^{1/2}}$$

Kosmologický rudý posuv

- Rudý posuv lze zapsat pomocí škálovacího faktoru

$$z = \frac{a(t_{\mathrm{obs}}) - a(t_{\mathrm{em}})}{a(t_{\mathrm{em}})}$$

- S použitím Robertsonovy - Walkerovy metriky pro nulový paprsek (geodetickou čáru) dostáváme

$$c\frac{\mathrm{d}t}{a} = -\frac{\mathrm{d}r}{(1 - kr^2)^{1/2}}$$

- Po integraci obdržíme

$$c\int_{t_e}^{t_0} \frac{\mathrm{d}t}{a} = -\int_{r_e}^{r_0} \frac{\mathrm{d}r}{(1 - kr^2)^{1/2}}$$

- Pro druhý "hřeben" elektromagnetické vlny můžeme psát obdobně

$$c\int_{t_e+\mathrm{d}t_e}^{t_0+\mathrm{d}t_0} \frac{\mathrm{d}t}{a} = -\int_{r_e}^{r_0} \frac{\mathrm{d}r}{(1-kr^2)^{1/2}}$$

- pravé strany obou rovnic popisující tyto dvě po sobě jdoucí události jsou stejné , takže platí

$$c\int_{t_0}^{t_0+\mathrm{d}t_0} \frac{\mathrm{d}t}{a} = c\int_{t_e}^{t_e+\mathrm{d}t_e} \frac{\mathrm{d}t}{a}$$

- jelikož časové intervaly $\mathrm{d}t_e, \mathrm{d}t_0$ zanedbatelné v porovnání s časy t_e, t_0, lze psát

$$\frac{\mathrm{d}t_e}{a(t_e)} = \frac{\mathrm{d}t_0}{a(t_0)}$$

Kosmologický rudý posuv

- Jelikož intervaly $\mathrm{d}t_e, \mathrm{d}t_o$ vyjadřují periodu vlnění, můžeme psát

$$1 + z = \frac{\lambda_0}{\lambda_e} = \frac{\nu_e}{\nu_0} = \frac{a(t_{\mathrm{obs}})}{a(t_{\mathrm{em}})}$$

Což je výsledný vztah pro rudý posuv. Vývoj škálovacího faktoru v závislosti na čase obdržíme z kosmologického řešení.