

Ústav fyzikální elektroniky  
Přírodovědecké fakulty Masarykovy univerzity

# Fyzikální praktikum 1

Návody k ulohám

Zdeněk Bochníček, Jana Jurmanová, Pavel Konečný,  
Zdeněk Navrátil a Luboš Poláček

Brno 2021

# Předmluva

*Fyzici se dělí na dvě základní skupiny: fyziky teoretické a experimentální. Na některých pracovištích je možné zástupce těchto skupin odlišit již vizuálně: fyzici experimentální se proti všemu očekávání šatí vybraně elegantními obleky (přes které prakticky přehazují kdysi bílý plášť), zatímco fyzici teoretičtí působí svým vzhledem mírně řečeno excentricky.*

*Častěji však dojde k identifikaci zaměření kandidáta fyziky až při prvním vstupu do laboratoře: relé výstražně zacvakají, ručky přístrojů se zastaví o zabudovanou zádržku, jističe vypadnou a olejová vývěva si s chutí odplivne na příchozího – ve dveřích stojí čistokrevný teoretik. Klimatizace zapřede, destilační jednotka mile zabublá, jističe se samy překlopí do polohy I a multimetr, který doteď stávkoval a protestoval proti nutnosti měřit, ukáže jak hodnotu, tak i jednotku – právě do laboratoře vstoupilo požeňnání v podobě rozeného experimentátora.*

Experimentální zdatnost fyzika se projevuje především při práci v laboratoři. Většina studentů sem vstupuje se dvěma přáními:

- nic nerozbít,
- něco naměřit.

**Jak v laboratoři nic nerozbít.** Vemte si za své „Dříve než použiji ruce, použiji hlavu.“ V první hodině absolvujete školení bezpečnosti práce, které slouží jako návod, jak neublížit sobě ani laboratornímu zařízení. Použijete-li informace získané při tomto školení, zdravý selský rozum a trochu fyzikální úvahy, nemělo by se nikomu ani ničemu nic stát. A pokud si neporadíte vlastními silami, stačí oslovit vyučujícího a požádat ho o radu či o pomoc. Jistě neodmítne.

**Jak v laboratoři něco naměřit.** Zde platí heslo „Nebát se a myslet.“ Přečtěte si před hodinou návod, promyslete si, co vám není jasné, a pokuste se získat na své otázky odpovědi – nejprve sami, posléze s pomocí vyučujícího. A hlavně: nestůjte a pracujte, čas pracuje proti vám.

Úspěšně strávený čas v laboratoři a radost z experimentování vám přeje autoři.



# Seznam úloh

1	Měření hustoty válečku, měření laboratorních podmínek	1
2	Měření odporu rezistoru	10
3	Měření viskozity, hustoty a povrchového napětí kapalin	17
4	Měření gravitační konstanty a tíhového zrychlení	27
5	Měření modulu pružnosti pevných látek	42
6	Tepelné vlastnosti kapalin – elektrický kalorimetr	48
7	Měření Poissonovy konstanty vzduchu	55
8	Měření teploty	61
9	Měření elektrického napětí a proudu	80
10	Tepelná vodivost pevných látek	94



# Úloha 1

## Měření hustoty válečku, měření laboratorních podmínek

*Cílem úlohy je vyzkoušet si jednoduchá měření délky a hmotnosti, naučit se tato měření statisticky zpracovat a konečně seznámit se s měřením laboratorních podmínek ve Fyzikálním praktiku 1.*

### 1.1 Měření délky

Měření délky patří k nejběžněji prováděným fyzikálním měřením. Některá základní měřidla délky jsou vyobrazena na obr. 1.1, s většinou z nich se seznámíte v některé z úloh Fyzikálního praktika 1. Pro měření délky těles menších rozměrů (cca do 50 cm) se často používá posuvné měřítko. Pro přesnější měření menších rozměrů, typicky několik cm, lze použít mikrometr (mikrometrický šroub); naopak větší délky lze měřit, i když s menší přesností, svinovacím metrem. Pro přesné měření malých *změn* délky se používá úchylkoměr (tzv. indikátorové hodinky, digitální indikátor). Časté měření větších rozměrů, vzdáleností, obsahů ploch, úhlů apod. zjednodušuje laserový dálkoměr. Špatně přístupné rozměry lze na dálku změřit pomocí speciálního dalekohledu umístěného na stojanu s měřítkem, tzv. katetometru.<sup>1</sup>

V současné době se lze setkat s analogovými a digitálními měřidly délky. Zatímco u analogového měřidla je nutné provést odečet vlastními silami, digitální měřidlo svoji hodnotu zobrazuje přímo na LCD displeji. Kromě zjednodušeného čtení měřidla je další výhodou přirozená možnost propojení digitálního čidla s počítačem.<sup>2</sup>

K měření rozměrů v této úloze využijete dvou přístrojů – posuvného měřítka a mikrometru.

#### 1.1.1 Měření posuvkou

Důležitým parametrem analogového měřidla je velikost nejmenšího dílku, která u pravítek či příložných měřítek činí obvykle 1 mm. Při měření s tímto měřítkem však můžeme dosáhnout mnohem větší přesnosti než udávaných 1 mm. Zkušený pozorovatel dokáže na milimetrovém měřítku odhadovat desetiny, příp. i dvacetiny nejmenšího dílku [1].<sup>3</sup> Dobře se odhadují zejména hodnoty kolem poloviny dílku, hodnoty blízko ryskám jsou z důvodu šířky rysek přeceňovány nebo podceňovány.

K pohodlnému a přesnému odečtu zlomků dílku stupnice se u posuvného měřítka (posuvky) používá pomocná stupnice, tzv. nonius nebo vernier, umístěná pod či nad stupnicí hlavní (viz obr.

<sup>1</sup>Kromě uvedených přístrojů, které využijeme v laboratoři, existuje mnoho dalších měřidel specializovaných pro konkrétní účel – např. měřidla křivosti, tloušťky, výšky, hloubky, měřicí mikroskopy, . . . V některých případech je vhodnější rozměr získat porovnáním s kalibrovanými měrkami.

<sup>2</sup>Ukázkovým příkladem může být již zmíněný přesný úchylkoměr, který v digitální verzi na displeji zobrazuje údaj na tisícinu mm a svoji hodnotu dokáže předávat do počítače pomocí sériové linky. S přístrojem se seznámíte v úloze č. 5 – *Měření modulu pružnosti pevných látek*. Naopak u analogové verze bylo kromě ručičky potřeba sledovat i počet celých otáček ručičky při větší změně délky.

<sup>3</sup>Je zřejmé, že nemá velký smysl se pokoušet o přesnější odečet v situacích, kdy kvalita přiložení či např. průhyb svinovacího metru mohou způsobovat větší chyby měření.

1.2). Princip nonia je ten, že oko snadněji posoudí vzájemné vyrovnaní dvou rysek než odhad malé vzdálenosti. Nejmenší dílek nonia je úmyslně menší (např. 0,9 mm při 1/10 dělení, 0,95 mm při 1/20 dělení, obecně  $\frac{n-1}{n}u$ , kde  $u$  je velikost dílku hlavní stupnice a  $n = 10, 20, 50$ ). Kryje-li se nula na noniu s celým dílkem stupnice hlavní (viz obr. 1.3), k dalšímu vyrovnaní rysek obou stupnic může dojít až na konci nonia, neboť čísla  $n$  a  $n - 1$  jsou nesoudělná. Např. při dělení hlavní a pomocné stupnice po 1 mm a 0,9 mm shoda nastane až na desátém dílku nonia

$$10 \times 0,9 \text{ mm} = 9 \times 1 \text{ mm}.$$

Bude-li však nonius posunut slabě doprava, např. o 0,1 mm, k vyrovnaní stupnic dojde už na prvním dílku, neboť vzdálenosti rysek obou stupnic od nuly na noniu jsou

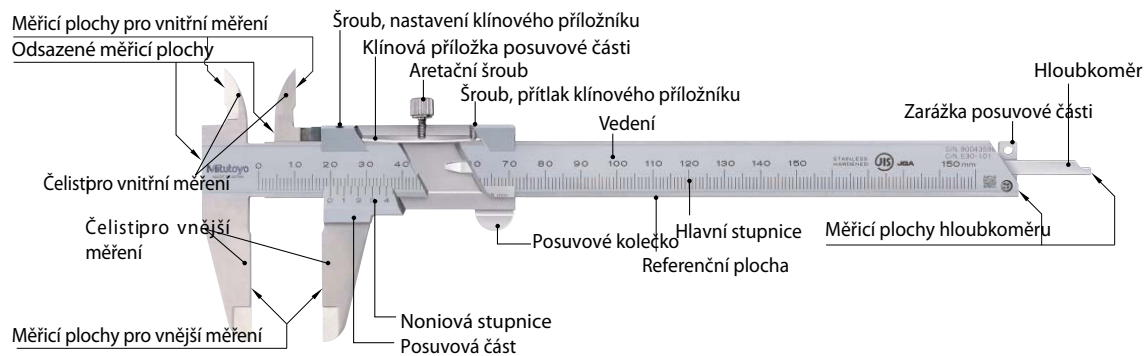
$$\begin{array}{llll} 0,9 \text{ mm}, & 1,9 \text{ mm}, & 2,9 \text{ mm}, & \dots \quad (\text{na hlavní stupnici}) \\ 0,9 \text{ mm}, & 1,8 \text{ mm}, & 2,7 \text{ mm}, & \dots \quad (\text{na noniu}). \end{array}$$

Výsledek měření s tímto posunem je tedy 1,1 mm. Pokud bude nula nonia posunuta o 0,3 mm, k vyrovnaní stupnic dojde na třetím dílku, neboť vzdálenosti rysek obou stupnic od nuly na noniu jsou

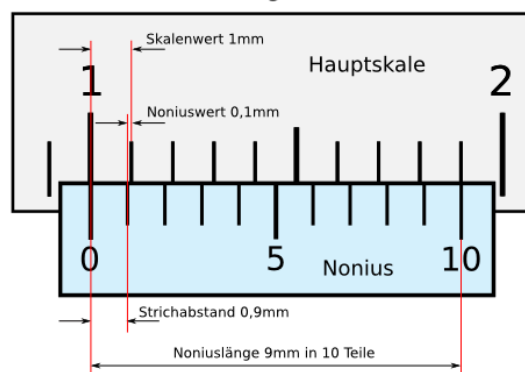
$$\begin{array}{llll} 0,7 \text{ mm}, & 1,7 \text{ mm}, & 2,7 \text{ mm}, & \dots \quad (\text{na hlavní stupnici}) \\ 0,9 \text{ mm}, & 1,8 \text{ mm}, & 2,7 \text{ mm}, & \dots \quad (\text{na noniu}). \end{array}$$



Obrázek 1.1: Měřidla délky: a) posuvné měřítko, b) mikrometr, c) úchylkoměr, d) laserový dálkoměr, e) koncové měřky, f) katetometr.



Obrázek 1.2: Analogové posuvné měřítko s 1/20 noniem. V elektronické verzi si lze obrázek prohlédnout při větším zvětšení.



Obrázek 1.3: 1/10 nonius. Velikost dílku hlavní stupnice 1 mm, nonia 0,9 mm. Stupnice se vyrovnávají na 9. dílku stupnice hlavní a 10. dílku nonia.

Je-li posunutí obecně rovno  $x$ , potom při vyrovnání na  $m$ -tém dílku nonia u hlavní stupnice velikosti  $u$  jsou stejně dlouhé úseky

$$m \cdot u - x = m \cdot \frac{n-1}{n} u.$$

Po úpravě

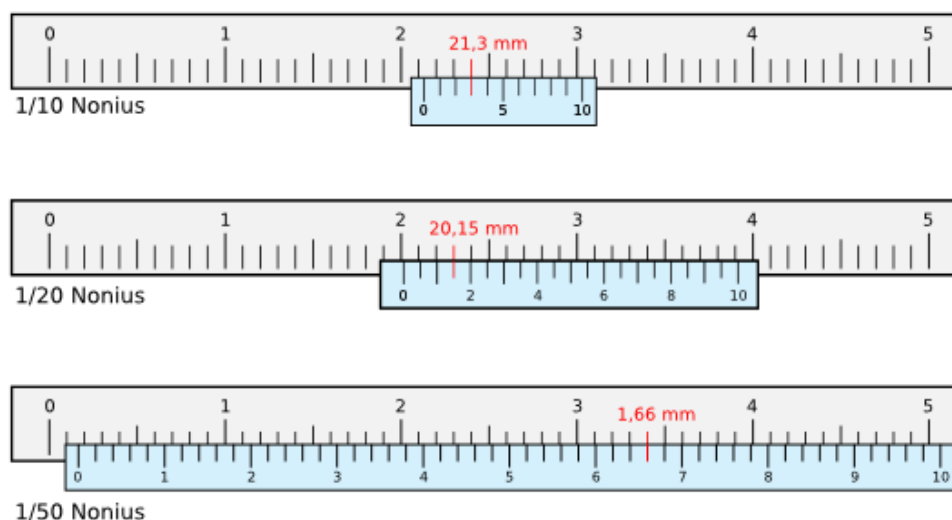
$$x = \frac{m}{n} u.$$

Pro 1/20 nonius ( $n = 20$ ,  $u = 1$  mm) a při vyrovnání na třetím dílku ( $m = 3$ ) je posunutí tedy  $x = 0,15$  mm.

Způsob měření s posuvkou je takový, že nejprve zjistíme, jaký celý počet dílků na stupnici hlavní nám ukazuje nula na noniu. Na obr. 1.4 b) je to 20 mm. (Je vhodné údaj odečítat v milimetrech, nepřipravíme se tak o některá místa.) K vyrovnání dochází na třetím dílku 1/20 nonia, děleném po 0,05 mm, výsledek měření je tedy 20,15 mm.

Nejistotu měření typu B při měření analogovým posuvným měřítkem stanovíme z rozlišitelnosti, tj. z nejmenšího dílku udávaného noniem ( $b = 0,05$  mm nebo 0,02 mm), přitom předpokládáme rovnoměrné rozdělení

$$u_B = \frac{b}{2\sqrt{3}}. \quad (1.1)$$



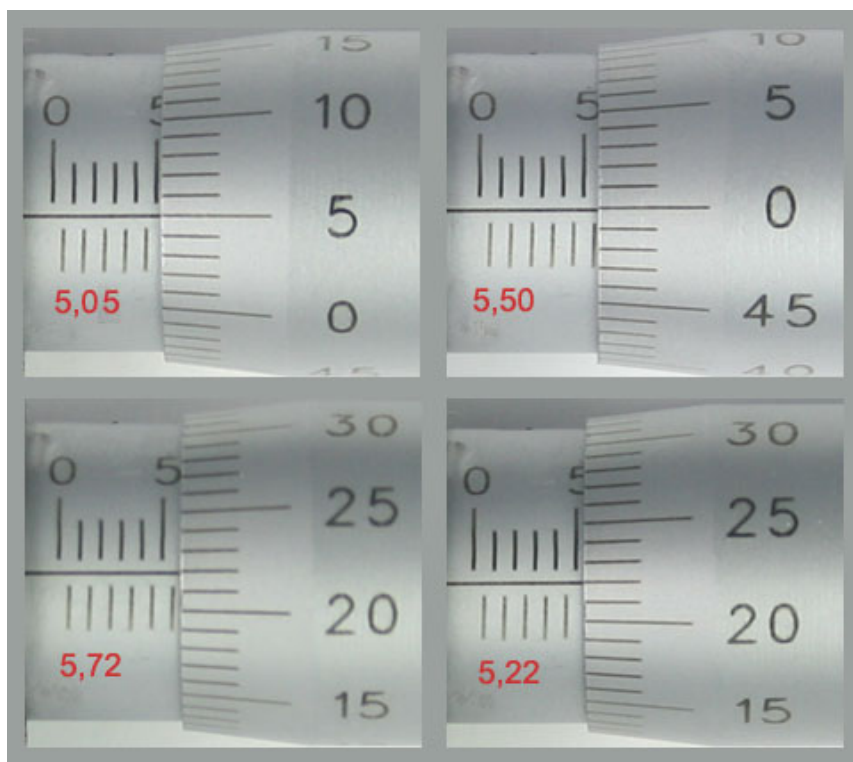
Obrázek 1.4: Měřítka s noniem umožňujícím čtení na a) 0,1 mm, b) 0,05 mm a c) 0,02 mm. Zkontrolujte si, jestli správně odečtete údaj na stupnici!



Obrázek 1.5: Mikrometr s analogovými stupnicemi a digitálním displejem. V elektronické verzi si lze obrázek prohlédnout při větším zvětšení.

U měřidel splňujících normu DIN 862 je do 10 cm měřené délky dovolená chyba rovna 0,05 mm (měřítka 1/10 a 1/20) a 0,02 mm (měřítka 1/50), tedy prakticky rovna rozlišitelnosti, což je přibližně ve shodě s (1.1). Naproti tomu při měření delších rozměrů je chyba dovolená normou větší, výše stanovený údaj může být spíše dolním odhadem. U digitálních měřitek je často dovolená chyba větší než rozlišitelnost (nejnižší zobrazený řád na displeji). Při pohledu na displej je proto potřeba se ubránit falešné představě o dokonalém měření.

Předpokladem pro dosažení uvedené přesnosti je dobrý stav měřidla a kvalifikovanost obsluhy. Před samotným měřením proto zkontrolujeme, zda jsou čelisti měřidla rovnoběžná, čistá a nejvíce průsvit. Při měření se pokoušíme co nejvíce srovnat osu měřítka s měřeným rozměrem. Nezařucitelnost shodnosti osy měřítka a měřeného rozměru, požadované tzv. Abbeho principem, je podstatným zdrojem chyby měření zejména větších rozměrů.



Obrázek 1.6: Čtení hodnoty analogového mikrometru.

### 1.1.2 Měření mikrometrem

Přesnějšího měření délky lze dosáhnout s přístrojem zvaným mikrometr (viz obr. 1.5). Tento přístroj je vybaven stupnicí pouzdra, dovolující odečítat údaj na poloviny mm, a stupnicí na otočném bubínku, dělenou na 50 dílků odpovídajících 0,01 mm ( $10\ \mu\text{m}$ ). Výsledek měření se získá jako součet hodnot čtených na obou stupnicích.

**Příklad.** Na obrázku 1.6 je zobrazeno několik čtení hodnoty mikrometru. Např. u c) je počet celých milimetrů pět, vidíme však ještě polovinu dalšího milimetru. Stupnice pouzdra tedy udává 5,5 mm. Na otočném bubínku vidíme proti základní rysce 22 dílků, tj. 0,22 mm. Výsledek je tedy 5,72 mm. Ověřte si schopnost čtení na mikrometru na ostatních obrázcích! Typickou hrubou chybou při čtení hodnoty mikrometru je špatné posouzení toho, zda je dolní ryska udávající polovinu mm již vidět či nikoliv, viz obr. 1.6b). Odečtený údaj potom je o 0,5 mm menší nebo větší. Pro eliminaci této chyby je vhodné bubínek dootočit na hodnotu nula a ujistit se, že výsledek je ve shodě s očekáváním.

Nejistotu typu B měření mikrometrem můžeme stanovit z nejmenšího dílku stupnice rovného  $10\ \mu\text{m}$ , s předpokladem rovnoměrného rozdělení. U měřidel splňujících normu DIN 863 s rozsahem měřené délky 0–25 mm je dovolená chyba rovna  $4\ \mu\text{m}$ , čtený výsledek v celých dílcích by tedy měl být zaručen. Dosažitelnost této hodnoty je však podmíněna zachováváním čistoty při měření a jemnou prací s mikrometrem.

#### Obecné zásady při práci s mikrometrem [2]:

1. Pečlivě zkontrolujte typ, rozsah měření, přesnost a další specifikace výběru vhodného modelu pro danou aplikaci.
2. Před provedením měření ponechte mikrometr a měřený předmět při pokojové teplotě tak dlouho, dokud se jejich teploty nevyrovnej před provedením měření.

3. Při odečítání proti bubínku s dělením se na základní rysku dívejte přímo. Pokud jsou rysky stupnice pozorovány pod úhlem, správné zarovnání pozice rysek nelze odečíst v důsledku paralaxní chyby.
4. Měřicí plochu pevného doteku a vřetena otřete papírem nepouštějící vlákna a před měřením nastavte počáteční (nulový) bod. Případně si počáteční hodnotu poznamenejte.
5. Setřete veškerý prach, piliny a jiné nečistoty z obvodu a měřicí plochy vřetena jako součást denní údržby. Kromě toho dostatečně otřete veškeré nečistoty a otisky prstů na každé části suchým hadříkem.
6. Používejte správnou konstantní sílu přístroje tak, aby měření byla prováděna správnou měřicí silou.
7. Při upevňování mikrometru do stojanu by stojan měl upínat mikrometr za střed rámu. Neupínejte jej příliš pevně.
8. Dávejte pozor, abyste neupustili nebo nenarazili mikrometrem na cokoliv. Neotáčejte bubínkem mikrometru použitím nadměrné síly. Pokud se domníváte, že mikrometr může být poškozen v důsledku náhodného nesprávného zacházení, zajistěte, aby byla provedena kontrola jeho přesnosti před dalším použitím.
9. Po dlouhé době skladování nebo pokud není vidět ochranný olejový film, zlehka naneste na mikrometr antikorozi olej pomocí hadříku v něm namočeným.
10. Poznámky ke skladování: Neskladujte mikrometr na přímém slunci. Skladujte mikrometr na dobře větraném místě s malou prašností a nízkou vlhkostí. Skladujte mikrometr v pouzdru nebo jiném obalu, který by neměl být uchovávan na podlaze. Neskladujte mikrometr v upnutém stavu, vždy ponechte mezeru 0,1 až 1 mm mezi měřicími plochami.

## 1.2 Měření hmotnosti

V současnosti se v laboratorní praxi k měření hmotnosti dominantně používají digitální váhy. Digitální váhy patří k nejpřesnějším přístrojům v praktiku.<sup>4</sup> Jako takové, váhy požadují speciální podmínky při instalaci a provozu – umístění na stabilním vodorovném povrchu bez otřesů při měření, v prostředí bez průvanu, teplotních výkyvů, nadměrné vlhkosti, prašnosti a elmg. rušení (např. mobily). Čím přesnější váhy, tím složitější procedury je zapotřebí konat k zajištění udávané přesnosti měření. U vah nalezneme tři důležité údaje:

**váživost** Maximální hmotnost, kterou lze na vahách zvážit. Vyšší hmotnost může nenávratně poškodit přístroj.

**citlivost/rozlišení/přesnost  $d$**  Nejnížší hodnota/řád zobrazený na displeji. Může být shodná s opakovatelností, ta ale může být i  $2\times$  větší.

**ověřovací/cejchovní dílek  $e$**  Nejvyšší dovolený rozdíl mezi údajem vah a etalony hmotnosti použitými při ověření vah.

Z uvedeného plyne, že dílek  $d$  udává změny, kterou váhy ještě zaregistrují, případně náhodnou chybu. Dílek  $e$  může pokrývat i některé systematické chyby.

I při digitálním charakteru zařízení váhy stále fungují na principu srovnávání tíhy zkoumaného tělesa s tíhou závaží. Rozdíl je v tom, že srovnání obou hmot je nesoučasné a nepřímé, srovnání probíhá přes měření jiné veličiny. Výhodou je, že díky měření této veličiny postačuje srovnání s jediným kalibračním závažím. Používají se dva principy měření:

**elektromagnetický** Tíha je porovnáována s elektromagnetickou silou, která je zapotřebí k vyvážení (kompenzaci) vah. Z proudu tekoucího cívkou lze vyvodit hmotnost měřeného objektu.

<sup>4</sup>Kupř. analytické váhy Kern X mají váživost 220 g a rozlišení 0,1 mg. Citlivost tedy dosahuje  $5 \cdot 10^{-7}$  rozsahu. Naproti tomu nejpřesnější multimetry v praktiku Keysight U3402A jsou „jen“ 5,5-místné.



**tenzometrický** Tíha měřeného objektu deformuje závěs držící miskou vah. Tenzometr na něm umístěný převádí vzniklé mechanické napětí na měření odporu.

Výsledkem těchto měření je jednoduchý údaj o hmotnosti na displeji. Protože však stále měříme tíhu objektu, digitální váhy postihují stejné problémy jako rovnoramenné váhy:

1. Nevodorovnost misky. Se šikmou miskou měříme v lepším případě jen normálovou složku tíhy. Odchýlení o  $1^\circ$  způsobí relativní systematickou chybu  $\delta_r = 1,5 \cdot 10^{-4}$ , což na 100 g představuje 15 mg ( $150\times$  násobek citlivosti analytických vah 0,1 mg). K nastavení vodorovné polohy slouží stavitelné nožky a vodováha na přístroji.
2. Vztlak vzduchu. Jak na zkoumaný objekt při vlastním měření, tak i na závaží při kalibraci vah působí aerostatická vztlaková síla. Protože kalibrační závaží jsou obvykle z nerez, digitální váhy poskytující správnou hodnotu neovlivněnou vztlakovou silou pouze při vážení objektů ze stejného materiálu (stejná hmotnost  $\rightarrow$  stejný objem  $\rightarrow$  stejný vztlak). Korekce na vztlak  $\zeta$ , přičítaná k ukazované hodnotě  $Z$ ,

$$M = Z + \zeta,$$

je rovna

$$\zeta = \left( \frac{M}{\rho_M} - \frac{Z}{\rho_Z} \right) \rho,$$

kde  $\rho_Z$ ,  $\rho_M$  a  $\rho$  je po řadě hustota kalibračního závaží, měřeného objektu a vzduchu. Přibližně

$$\zeta = Z \left( \frac{1}{\rho_M} - \frac{1}{\rho_Z} \right) \rho.$$

Např. pro vodní těleso je podíl  $\zeta/Z \approx 1 \cdot 10^{-3}$ . Při navážení 100 g vody tedy ve skutečnosti navážeme o 100 mg ( $\approx 0,1$  ml) vody více. Efekt je velmi podstatný, vážíme-li výrazně řidší (nebo případně hustší) materiály, kupř. polystyren.

Z toho také plyne, že odlišnost hustoty vzduchu během kalibrace a při měření může způsobit odchylku i při měření nerez. V extrémních případech je proto nutné kalibraci periodicky opakovat, viz níže.

3. Hodnota tíhového zrychlení. Protože tíhového zrychlení je na různých místech Země různé, je zapotřebí, aby kalibrace ve výrobním závodě byla prováděna pro danou oblast, nebo lépe, aby byla provedena v místě měření. Analytické váhy (i ty naše) jsou proto vybaveny vnitřním kalibračním závažím. Stiskem jednoho tlačítka dojde k přesunu tohoto závaží do měřicího prostoru, k jeho zvážení a ke kalibraci vah. Tuto proceduru je vhodné provést, dojde-li např. k výrazné změně teploty.

**Postup měření.** Zkontrolujeme vyrovnanost vah. Po zapnutí vyčkáme na jejich ustálení. Váhy vytárujeme, případně zkalibrujeme. Porovnáme váživost s odhadem hmotnosti předmětu. Vážený předmět poté ručně a opatrně položíme do středu misky a počkáme na ustálení údaje. U analytických vah před měřením zavřeme skleněnou skříňku. Zapišeme si celý údaj na displeji, poznamenejeme si dílky  $e$  a  $d$  a zhodnotíme systematické vlivy. Po celém měření váhy vypneme do režimu standby.

Měření provádíme jen jedenkrát. Nejistota měření bude proto tvořena jen nejistotou typu B, kterou spočteme jako  $u_B = e/3$ .

**Poznámka.** Vzhledem k digitální povaze zařízení mají současné váhy často sériový digitální výstup, dovolující připojení počítače či tiskárny. Některé typy vah mají tzv. podvěsné vážení – možnost zvážení zavěšeného tělesa. Hodí se tím i na měření silového působení, které ovšem nesmí být proměnného charakteru. S tímto využitím se seznámíte v úloze č. 3 – *Měření viskozity, hustoty a povrchového napětí kapalin*.

## 1.3 Měření laboratorních podmínek

### 1.3.1 Měření tlaku

K přesnému měření atmosférického tlaku v laboratoři byl v dřívější době používán rtuťový barometr na principu Torricelliho experimentu. Atmosférický tlak se stanovil měřením výšky rtuťového sloupce v uzavřené trubici ponořené do nádoby se rtuťí. V souvislosti s omezováním použití rtuti je však nákup rtuťových barometrů problematický. Další nevýhodou je nutnost provádět řadu korekcí (např. na teplotní roztažnost) či komplikovanější automatizace měření. Pro měření atmosférického tlaku jsou dnes proto používána průmyslová čidla s kalibrovaným digitálním nebo analogovým výstupem.

Atmosférický tlak v laboratoři Fyzikálního praktika 1 je měřen pomocí přesného mikrokontrolerového barometru Vaisala PTB110. Barometr je vybaven křemíkovým senzorem pracujícím na kapacitním principu. Přístroj má analogový napěťový ( $0-5\text{ V}$  na rozsah  $800-1060\text{ hPa}$ ) a frekvenční výstup ( $\text{Hz} = \text{hPa}$ ). V našem praktiku je frekvenční výstup barometru přiveden na čítač obsažený v mikrokontroleru Arduino Uno. Tento mikrokontroler, doplněný o ethernetové připojení a *www* server, generuje stránky na adrese <http://fp1.physics.muni.cz>.

Garantovaná přesnost měření tlaku přístrojem je PTB110 je  $\pm 0,3\text{ hPa}$  při  $+20\text{ }^\circ\text{C}$ . Dlouhodobá stabilita je  $\pm 0,1\text{ hPa/rok}$ . Čidlo bylo zakoupeno na jaře 2017.

K přibližnému odhadu atmosférického tlaku v místě laboratoře lze využít blízké stanice Českého hydrometeorologického ústavu (ČMI). Naše nejbližší profesionální stanice je Brno-Tuřany, 241 m. n. m. Při využívání dat ČMI je nutné brát v potaz, že standardně udávanou hodnotou je tlak vzduchu přepočtený na hladinu moře. Nejnovější verze stránek (r. 2017) zobrazuje rovněž skutečný tlak naměřený na stanici. Pro přesnější odhad je zapotřebí zvážit rozdílnou nadmořskou výšku laboratoře (nadmořská výška pracovní plochy stolů laboratoře je 249,8 m. n. m.).

Poznámka. Atmosférický tlak naměřený v laboratoři může být slabě nižší než venku. Příčinou je nucené větrání laboratoře, které z místnosti více vzduchu odsává než přivádí. Přesvědčete se o tom!

### 1.3.2 Měření teploty a vlhkosti

K měření teploty a vlhkosti slouží v laboratoři Fyzikálního praktika 1 několik míst (Ethernetové čidlo vlhkosti v místnosti A, rtuťový teploměr v místnosti B, barometrické čidlo). Na rozdíl od měření tlaku se naměřená teplota (příp. i vlhkost) může místa od místa lišit. Potřebujeme-li tedy přesný údaj o okolní teplotě ( $t_0$ ), provedeme raději vlastní měření v blízkosti samotného experimentu. Měříme-li v experimentu současně i teplotu jiných objektů ( $t$ ), je výhodné, použijeme-li stejného typu čidla, měřidla či dokonce rozdílového měření přímo teplotního rozdílu  $t - t_0$ . Tímto způsobem lze potlačit případné systematické odchylky měření teploty. Nejistota měření teploty digitálními čidly se může pohybovat okolo  $\pm 0,5\text{ }^\circ\text{C}$ .

## Úkoly

1. Stanovte hustotu aspoň jednoho válečku s otvorem.

- Proveďte měření rozměrů válečku. Každé měření opakujte  $10\times$ , hodnoty zapisujte do tabulky. Poznamenejte si použitá měřidla, jejich nejmenší dílek, stanovte nejistotu typu B.
- Stanovte hmotnost válečku vážením na digitálních vahách. Před položením válečku na misku vah porovnejte svůj odhad hmotnosti s váživostí vah. Měření stačí provést  $1\times$ . Poznačte si celý údaj na displeji, typ přístroje, opakovatelnost  $d$ , ověřovací dílek  $e$ .
- Měření statisticky zpracujte. Určete kombinované nejistoty přímo měřených veličin, výslednou hustotu a její kombinovanou nejistotu. Výsledek porovnejte s tabulkami.

- 
2. Změřte teplotu, atmosférický tlak a relativní vlhkost v laboratoři. Laboratorní podmínky budete měřit při každém dalším měření.

## Literatura

- [1] Brož. Základy fyzikálního měření.
- [2] Mitutoyo (2017) Metrologická příručka pro přesné měřicí přístroje. PRC 1389.

## Úloha 2

# Měření odporu rezistoru

Elektrický odpor rezistoru můžeme stanovit z Ohmova zákona

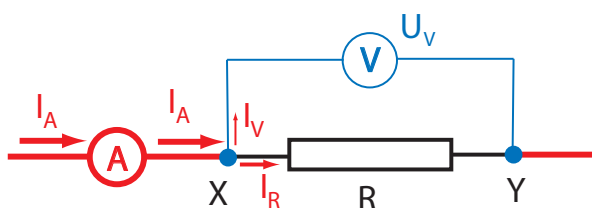
$$R = \frac{U_R}{I_R}, \quad (2.1)$$

kde  $U_R$  je napětí na odporu  $R$  a  $I_R$  proud, který odporem protéká. Současně tedy potřebujeme měřit napětí a proud. Napětí měříme voltmetrem, který připojujeme paralelně k prvku, na kterém potřebujeme znát napětí. Proud měříme ampérmetrem, který vkládáme do větve, ve které potřebujeme proud změřit (tedy sériově se zátěží). Samotný ampérmetr obvykle do obvodu nesmíme bez zátěže zapojit. Máme ale dvě možnosti, jak zapojit voltmetr a ampérmetr při současném měření napětí a proudu.

## 2.1 Metody současného zapojení voltmetru a ampérmetru

### 2.1.1 Metoda A

Zapojení lze uskutečnit například podle obr. 2.1 (zapojení budeme v dalším textu nazývat metodou A).



Obrázek 2.1: Měření odporu z Ohmova zákona metodou A

Napětí, které naměří voltmetr, je skutečně správné napětí na odporu  $R$ , tedy  $U_R = U_V$ . Ovšem ampérmetr měří proud  $I_A$ , který není roven proudu  $I_R$  tekoucímu odporem  $R$ , protože v uzlových bodech X a Y se proud dělí na proud tekoucí odporem a proud tekoucí voltmetrem.

Hodnoty, které zjistíme měřicími přístroji, tedy nelze přímo dosadit do rovnice. Pokud bychom tak učinili, dopustili bychom se systematické chyby, která trvale posune měřenou hodnotu k vyšším nebo nižším hodnotám.

### Kontrolní otázka

Jak je tomu v případě měření odporu metodou A při dosazení přímo měřených hodnot do vztahu? Bude námi spočtený odpor systematicky větší nebo menší než odpor skutečný?

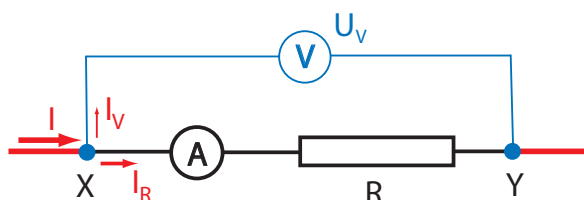
Při výpočtu skutečné hodnoty měřeného odporu  $R$  musíme vzít do úvahy, že i voltmetr má vnitřní odpor  $R_V$ , a tedy hodnota proudu tekoucího rezistorem se liší od hodnoty proudu tekoucího ampérmetrem o  $I_V = \frac{U_V}{R_V}$ . Známe-li vnitřní odpor voltmetru  $R_V$ , můžeme podle vztahu 2.1 z naměřených hodnot proudu  $I_A$  a napětí  $U_V$  určit hodnotu odporu rezistoru jako

$$R \equiv \frac{U_R}{I_R} = \frac{U_V}{I_A - I_V} = \frac{U_V}{I_A - \frac{U_V}{R_V}}. \quad (2.2)$$

Odpor, takto změřený a spočítaný metodou A, není zatížen výše zmíněnou systematickou chybou.

### 2.1.2 Metoda B

Metoda A není jedinou možností, jak současně zapojit ampérmetr a voltmetr. Problém, kdy ampérmetr neměří skutečný proud procházející odporem, snadno vyřešíme tak, že ampérmetr zapojíme přímo do odporové větve dle obr. 2.2. Pak ampérmetr skutečně měří správný proud,



Obrázek 2.2: Měření odporu z Ohmova zákona metodou B

protože mezi přístrojem a odporem  $R$  již není žádný uzel, kde by se mohl proud dělit. Ovšem jeden problém jsme vyřešili a druhý způsobili. Nyní voltmetr neměří napětí na odporu, ale měří součet napětí na odporu a ampérmetru  $U_V = U_A + U_R$ .

#### Kontrolní otázka

Jaké je znaménko systematické chyby při vyhodnocení metody B bez korekce vlivu ampérmetru?

Napětí na ampérmetru určíme ze známého vnitřního odporu přístroje  $R_A$  jako  $U_A = R_A I_A$  a z rovnice 2.1 dostaneme pro hodnotu odporu nezatíženého systematickou chybou

$$R = \frac{U_V - R_A I_A}{I_A} = \frac{U_V}{I_A} - R_A. \quad (2.3)$$

### 2.1.3 A nebo B?

Teď se nabízí důležitá otázka: Která metoda, A nebo B, je pro měření odporu výhodnější? Při prvním pohledu by se zdálo, že je to lhostejné. Oba vztahy jsou přesné a při jejich odvození nebyly učiněny žádné aproximace.

Pro minimalizaci chyby měření odporu je však důležité, aby druhý (korekční) člen v rozdílu byl mnohem menší, než člen první. Pokud totiž počítáme výslednou veličinu jako rozdíl veličin měřených, může chyba výsledku dramaticky narůst.

Metoda A bude výhodnější, pokud proud tekoucí voltmetrem bude mnohem menší než proud tekoucí měřeným odporem (nebo-li vnitřní odpor voltmetru bude mnohem větší než měřený odpor). Metoda B bude výhodná v případě, že napětí na ampérmetru bude mnohem menší než napětí na měřeném odporu (tj. vnitřní odpor ampérmetru bude mnohem menší než měřený odpor). Ve většině případů nám jako rozhodující kritérium postačí následující jednoduché pravidlo: **malé odpory měříme metodou A a velké odpory metodou B.**

t



Obrázek 2.3: Multimetry Keysight U3401A a U3402A

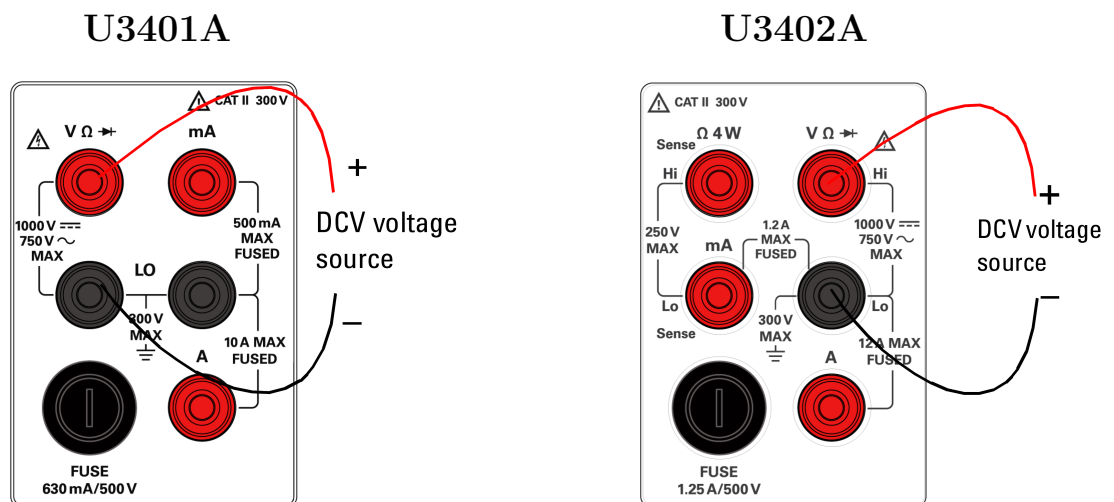
## 2.2 Přístrojové vybavení v úloze

Jako oba přístroje, voltmetr a ampérmetr, použijeme dva univerzální multimetry, oba dovolující měření napětí a proudu: stolní multimetr Keysight U3401A/U3402A a příruční multimetr, např. Escort 119.

### 2.2.1 Stolní multimetry Keysight U3401A/U3402A

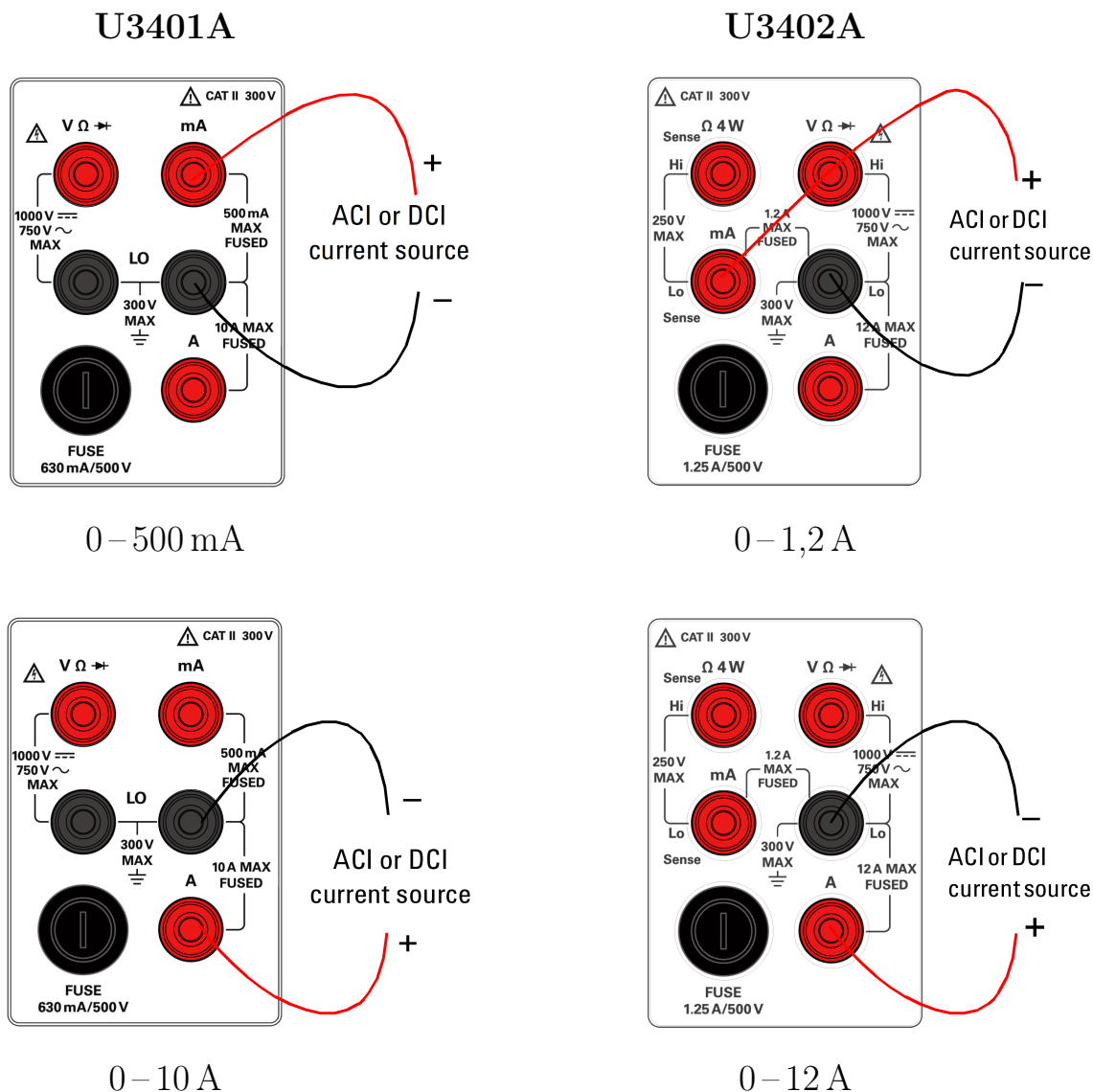
V praktiku je k dispozici celkem pět přístrojů: tři 4 $\frac{1}{2}$ místné multimetry U3401A a dva 5 $\frac{1}{2}$ místné multimetry U3402A (viz obr. 2.3<sup>1</sup>). Oba typy se navzájem mírně liší, ať už rozmístěním svorek, přesností měření či maximálními povolenými hodnotami.

**Měření napětí** Při měření napětí přístroj připojíme podle obrázku 2.4. Na přístroji zvolíme možnost **DCV**. K měření napětí se používá A/D převodník Sigma Delta. K dispozici je několik rozsahů, mezi nimiž přístroj dokáže automaticky přepínat. U verze U3402A lze navíc volit pomalé, střední a rychlé měření, viz tlačítko **Shift** + **Rate**. Vstupní impedance přístroje při měření DCV je  $10\text{ M}\Omega \pm 2\%$ .



Obrázek 2.4: Zapojení přístrojů při měření napětí

<sup>1</sup>V elektronické verzi tohoto textu si přístroje můžete detailně prohlédnout při velkém zvětšení obrázku.



Obrázek 2.5: Zapojení přístrojů při měření proudu

**Měření proudu** Při měření proudu přístroj připojíme podle obrázku 2.5. Podle očekávané hodnoty proudu zvolíme vhodné zdířky. Zkontrolujeme, zda předpokládaný proud nepřesahuje dovolenou maximální hodnotu zobrazenou na panelu. Pokud hodnotu proudu předem neznáme, použijeme největší rozsah. Na přístroji zvolíme možnost DCI. Při měření malých proudů je k dispozici několik rozsahů s automatickým přepínáním. V zapojené velkých proudů je k dispozici pouze jeden měřicí rozsah. Hodnota bočníku použitého v přístroji (a tedy i vstupní odpor) se liší podle zvoleného rozsahu v řádu 0,01–100 Ω pro U3401A, příp. či 0,01–10 Ω pro U3402A.

Maximální hodnoty proudu lze na terminál přivést po dobu max. 30 s!

**Přesnost měření** Přesnost měření (*accuracy*) multimetrů Keysight při měření napětí a proudu je uvedena v přílohách 2.B a 2.C. Přesnost měření je specifikována pro teplotní rozsah  $\pm 5^\circ\text{C}$  kolem udané kalibrační teploty  $t_{\text{cal}} = 23^\circ\text{C}$ . Pokud je multimetr používán mimo tento interval, při teplotách 0–18 °C a 28–50 °C je zapotřebí při výpočtu nejistoty zahrnout přídatnou teplotní chybu

$$0,15 \cdot \text{vypočtená nejistota} \cdot (t - t_{\text{cal}}).$$

Mimo tento interval není funkce přístroje zaručena. Požadované laboratorní podmínky pro provoz přístroje jsou:

- teplota  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$  až  $+50\text{ }^{\circ}\text{C}$ ,
- relativní vlhkost 80 % při  $28\text{ }^{\circ}\text{C}$ ,
- nadmořská výška do 2000 m. n. m.,
- vnitřní prostory,
- stupeň znečištění 2.

## Úkoly

1. Nalezněte na obou přístrojích svorky pro měření napětí a proudu. Identifikujte zdířky, které lze použít pro měření malých proudů (desítky mA) a které pro měření velkých proudů (desetiny až jednotky A). Zjistěte si a zapište povolené maximální hodnoty obou veličin. **Tyto hodnoty při měření nesmíte překročit.**
2. Změřte v zapojení A a B odpory dvou rezistorů  $R_1$ ,  $R_2$ . Na zdroji nastavte napětí do 20 V. U každého měření si zapište měřené hodnoty proudu a napětí, použité rozsahy voltmetru a ampérmetru, nejistoty měření napětí a proudu a vnitřní odpor přístrojů na těchto rozsazích (liši se). Naměřená data vyhodnoťte vždy z 2.1 a podle metody i z rovnice 2.2 nebo 2.3. Ke každé výsledné hodnotě odporu určete i její nejistotu.
3. Změřte voltampérovou charakteristiku žárovky. Napětí měňte v rozsahu 0–24 V. **Věnujte pozornost volbě proudového rozsahu. Nižší rozsah je obvykle jištěn pojistkou kolem 400 mA!** Jaké zapojení pro měření využijeme? Jaké zapojení bychom použili při měření voltampérové charakteristiky diody v propustném a v závěrném směru?

## 2.A Příklad vyhodnocení odporů rezistoru a systematické chyby měření

Rezistor	Metoda A		Metoda B	
	$R = \frac{U_V}{I_A}$	$R = \frac{U_V}{I_A - \frac{U_V}{R_V}}$	$R = \frac{U_V}{I_A}$	$R = \frac{U_V}{I_A} - R_A$
$R_1$	( ± ) $\Omega$	( ± ) $\Omega$	( ± ) $\Omega$	( ± ) $\Omega$
$R_2$	( ± ) k $\Omega$	( ± ) k $\Omega$	( ± ) k $\Omega$	( ± ) k $\Omega$



## 2.B Specifikace multimetru Keysight U3401A

Přesnost měření je vyjádřena ve formě  $\% \text{ of reading} + \text{count}$ . Hodnoty jsou platné po dobu jednoho roku v rozmezí  $\pm 5^\circ\text{C}$  od kalibrační teploty ( $23^\circ\text{C}$ ). Mimo tento interval je potřeba k vypočtené hodnotě připočíst přídatnou teplotní chybu ve formě  $0,15 \cdot \text{vypočtená nejistota} \cdot (t - t_{\text{cal}})$ .

### Měření stejnosměrného napětí

Range	Resolution	Maximum reading	Accuracy (One year; $23^\circ\text{C} \pm 5^\circ\text{C}$ )	Typical input impedance <sup>[2]</sup>
500 mV	10 $\mu\text{V}$	510.00	0.02% + 4	10.0 M $\Omega$
5 V	100 $\mu\text{V}$	5.1000	0.02% + 4	11.1 M $\Omega$
50 V	1 mV	51.000	0.02% + 4	10.1 M $\Omega$
500 V	10 mV	510.00	0.02% + 4	10.0 M $\Omega$
1000 V	100 mV	1200.0 <sup>[1]</sup>	0.02% + 4	10.0 M $\Omega$

<sup>[1]</sup> In 1000 V range, 1200 V is readable with audio warning.

<sup>[2]</sup> Input impedance is in paralleled with capacitance <100 pF.

### Měření stejnosměrného proudu

Range	Resolution	Maximum reading	Accuracy (One year; $23^\circ\text{C} \pm 5^\circ\text{C}$ )	Burden voltage <sup>[1]</sup> & shunt resistor
500 $\mu\text{A}$	10 nA	510.00	0.05% + 5	<0.06 V / 100 $\Omega$
5 mA	100 nA	5.1000	0.05% + 4	<0.6 V / 100 $\Omega$
50 mA	1 $\mu\text{A}$	51.000	0.05% + 4	<0.08 V / 1 $\Omega$
500 mA	10 $\mu\text{A}$	510.00	0.05% + 4	<0.8 V / 1 $\Omega$
5 A	100 $\mu\text{A}$	5.1000	0.25% + 5	<0.3 V / 0.01 $\Omega$
10 A	1 mA	20.000 <sup>[2]</sup>	0.25% + 5	<0.6 V / 0.01 $\Omega$

<sup>[1]</sup> Typical at full scale reading and voltage across the input terminals.

<sup>[2]</sup> In 10 A range, >10-20 Adc is readable for 20 seconds maximum with audio warning.

## 2.C Specifikace multimetru Keysight U3402A

### Měření stejnosměrného napětí

Rate	Range	Resolution	Maximum reading	Accuracy (One year; 23°C ± 5°C)	Typical input impedance <sup>[1]</sup>
Slow	120.000 mV	1 µV	119.999	±0.012% + 8 <sup>[2]</sup>	10.0 MΩ
	1.20000 V	10. µV	1.19999	±0.012% + 5	10.0 MΩ
	12.0000 V	100 µV	11.9999	±0.012% + 5	11.1 MΩ
	120.000 V	1 mV	119.999	±0.012% + 5	10.1 MΩ
	1000.00 V	10 mV	1000.00 <sup>[3]</sup>	±0.012% + 5	10.0 MΩ
Medium	400.00 mV	10 µV	399.99	±0.012% + 5	10.0 MΩ
	4.0000 V	100 µV	3.9999	±0.012% + 5	11.1 MΩ
	40.000 V	1 mV	39.999	±0.012% + 5	10.1 MΩ
	400.00 V	10 mV	399.99	±0.012% + 5	10.0 MΩ
	1000.0 V	100 mV	1000.0 <sup>[3]</sup>	±0.012% + 5	10.0 MΩ
Fast	400.0 mV	100 µV	399.9	±0.012% + 2	10.0 MΩ
	4.000 V	1 mV	3.999	±0.012% + 2	11.1 MΩ
	40.00 V	10 mV	39.99	±0.012% + 2	10.1 MΩ
	400.0 V	100 mV	399.9	±0.012% + 2	10.0 MΩ
	1000 V	1 V	1000 <sup>[3]</sup>	±0.012% + 2	10.0 MΩ

<sup>[1]</sup> Input impedance is in paralleled with capacitance <120 pF.

### Měření stejnosměrného proudu

Rate	Range	Resolution	Maximum reading	Accuracy (One year; 23°C ± 5°C)	Burden voltage <sup>[1]</sup> and shunt resistor
Slow	12.0000 mA	0.1 µA	11.9999	0.05% + 15 <sup>[2]</sup>	<0.15 V/10 Ω
	120.000 mA	1 µA	119.9999	0.05% + 5	<1.5 V/10 Ω
	1200.00 mA	10 µA	1199.99	0.2% + 5	<0.3 V/0.1 Ω
	12.0000 A	100 µA	11.9999	0.2% + 5	<0.6 V/0.01 Ω
Medium	40.000 mA	1 µA	39.999	0.1% + 6	<0.5 V/10 Ω
	120.00 mA	10 µA	119.99	0.1% + 3	<1.5 V/10 Ω
	1200.0 mA	100 µA	1199.9	0.2% + 3	<0.3 V/0.1 Ω
	12.000 A	1 mA	11.999	0.2% + 3	<0.6 V/0.01 Ω
Fast	40.00 mA	10 µA	39.99	0.1% + 2	<0.5 V/10 Ω
	120.0 mA	100 µA	119.9	0.1% + 2	<1.5 V/10 Ω
	1200 mA	1 mA	1199	0.2% + 2	<0.3 V/0.1 Ω
	12.00 A	10 mA	11.99	0.2% + 2	<0.6 V/0.01 Ω

<sup>[1]</sup> Typical at full scale reading and voltage across the input terminals.

<sup>[2]</sup> Use Rel operation.

## Úloha 3

# Měření viskozity, hustoty a povrchového napětí kapalin

### 3.1 Úvod

Mechanické vlastnosti kapalin hrají důležitou roli v běžném životě i v průmyslové praxi. Veličiny jako hustota, viskozita, či povrchové napětí kapalin jsou podstatné pro transport kapalin, vstříkávání, mísení, při povrchových úpravách materiálů, slouží pro odhad složení kapalin a stanovení jiných fyzikálních vlastností, mají význam v dopravě, energetice apod.

V této části si veličiny popisující základní fyzikální vlastnosti kapalin nejprve zopakujeme. Následně se podíváme na metody jejich měření.

**Hustota (měrná hmotnost)  $\rho$**  je definována jako

$$\rho = \frac{m}{V},$$

kde  $m$  je hmotnost elementu látky o objemu  $V$ .

**Dynamická viskozita  $\eta$**  je definována Newtonovým zákonem

$$\tau = \eta \frac{dv_x}{dy}, \quad (3.1)$$

kde  $\tau$  je smykové napětí mezi vrstvami kapaliny a  $\frac{dv_x}{dy}$  je derivace rychlosti proudění kapaliny ve směru normály k rovině smykového napětí  $\tau$ .

Její jednotkou je v soustavě SI pascalsekunda, Pa.s. V praxi se používá jednotka poise, P = 0,1Pa.s a zejména její díl centipoise, cP =  $10^{-3}$ Pa.s, v jehož řádu se pohybuje dynamická viskozita vody.

Viskozita (vazkost) tekutiny je způsobena vnitřním třením mezi jednotlivými vrstvami kapaliny. Je mírou toho, jak se reálná tekutina brání tečení. Převrácenou hodnotou viskozity je tekutost (fluidita).

Kapaliny, které se řídí Newtonovým zákonem (3.1), se nazývají newtonské kapaliny. Jejich dynamická viskozita nezávisí na smykovém napětí, je ale funkcí teploty a tlaku. U neneutonských kapalin viskozita závisí i na smykovém napětí. Jsou to např. různé suspenze, taveniny polymerů, plasty apod.

**Kinematická viskozita  $\nu$**  je definována jako podíl dynamické viskozity a hustoty kapaliny:

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}.$$

Jednotkou kinematické viskozity v soustavě SI je  $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$ . V praxi se často používá jednotka stokes, St,  $\text{St} = 1 \text{cm}^2 \text{s}^{-1} = 10^{-4} \text{m}^2 \text{s}^{-1}$  a její díl centistokes, cSt  $= 10^{-2} \text{St} = 10^{-6} \text{m}^2 \text{s}^{-1} = \text{mm}^2 \text{s}^{-1}$ , v jehož řádu se opět pohybuje kinematická viskozita vody.

Využívá se s výhodou tam, kde současně hraje roli jak viskozita, tak i tíha a setrvačnost kapaliny.

**Povrchové napětí, povrchová energie.** Povrchové napětí je definováno jako síla působící v rovině povrchu kapaliny kolmo na libovolnou délkovou jednotku v povrchu kapaliny, vztažená na tuto délku

$$\sigma = \frac{F}{l}.$$

Napětí v povrchové vrstvě kapaliny je důsledkem přitažlivých mezimolekulárních (kohezních) sil uvnitř kapaliny, neboť k odhalení většího počtu molekul a ke zvětšení povrchu kapaliny je zapotřebí vykonat práci. Protože na zvětšení povrchu o  $dS = l dx$  je zapotřebí vykonat práci

$$dW = F dx = \sigma l dx = \sigma dS,$$

je povrchové napětí rovno povrchové energii, tj. plošné hustotě energie, kterou kapalina zvětšením povrchu získává

$$\sigma = \frac{dW}{dS}.$$

Z termodynamického hlediska je povrchová energie volnou energií potřebnou ke zvětšení povrchu za konstantního objemu, teploty a počtu částic

$$\sigma = \left( \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial S} \right)_{T, V, N}.$$

Takto může být zavedena nejen u kapalin, ale i u pevných látek.

Povrchové napětí se běžně vyjadřuje v jednotce  $\text{mN m}^{-1}$ , která je shodná s jednotkou povrchové energie  $\text{mJ m}^{-2}$ .

Chceme-li studovat, jak se bude chovat rozhraní dvou látek (např. dvou nemísících se kapalin, kapaliny a pevné látky, apod.), musíme znát, jaké mezimolekulární síly uvnitř obou látek existují a zda-li jejich molekuly mohou vzájemně interagovat. Podle Fowkese a van Osse *et al.* je volná povrchová energie látky tvořena nezávislými aditivními komponentami, které odpovídají různým mezimolekulárním interakcím

$$\sigma = \sigma^{\text{lw}} + \sigma^{\text{ab}}, \quad (3.2)$$

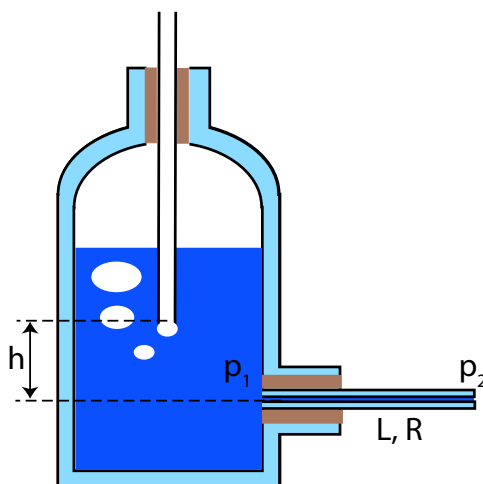
kde  $\sigma^{\text{lw}}$  je část odpovídající Van der Waalovým silám (Londonovým disperzním silám mezi fluktuujícími dipóly, Keesomovým silám mezi trvalými dipóly a Debyeovým silám mezi trvalým a indukovaným dipólem) a  $\sigma^{\text{ab}}$  acidobazickým interakcím (interakce mezi kyselinami a zásadami podle Lewisovy teorie, vodíková vazba apod.).

Vzájemnou interakci mezi dvěma fázemi s, l popisuje adhezní práce, pro kterou platí Berthelotovo kombinační pravidlo

$$W_{\text{sl}}^{\text{a}} = 2\sqrt{\sigma_{\text{s}}^{\text{lw}} \sigma_{\text{l}}^{\text{lw}}} + 2\sqrt{\sigma_{\text{s}}^{\text{ab}} \sigma_{\text{l}}^{\text{ab}}} \quad (3.3)$$

a mezifázovou povrchovou energii (tj. i např. povrchové napětí na rozhraní mezi dvěma kapalinami) můžeme dopočítat dosazením (3.3) do Duprého rovnice

$$\sigma_{\text{sl}} = \sigma_{\text{s}} + \sigma_{\text{l}} - W_{\text{sl}}^{\text{a}} = \sigma_{\text{s}} + \sigma_{\text{l}} - 2(\sqrt{\sigma_{\text{s}}^{\text{lw}} \sigma_{\text{l}}^{\text{lw}}} + \sqrt{\sigma_{\text{s}}^{\text{ab}} \sigma_{\text{l}}^{\text{ab}}}). \quad (3.4)$$



Obrázek 3.1: Mariottova láhev s kapilárou pro absolutní měření viskozity.

## 3.2 Měření viskozity kapalin

Měření viskozity provádíme pomocí tzv. viskozimetrů. Konstrukce těchto přístrojů lze rozdělit do tří základních skupin:

1. přístroje výtokové,
2. přístroje tělískové,
3. přístroje rotační a torzní.

V dalším textu se blíže podíváme pouze na výtokové přístroje, které jsou v praktiku k dispozici.

### 3.2.1 Absolutní měření viskozity

Princip funkce výtokových přístrojů spočívá v měření objemu  $V$ , který proteče trubicí délky  $L$  a poloměru  $R$  za dobu  $t$  při tlakovém spádu  $p = p_1 - p_2$  mezi konci trubice. Pro proudění blízké laminárnímu platí Hagenova – Poiseuillova rovnice

$$\eta = \frac{\pi R^4 p t}{8 V L} - \frac{n \rho V}{8 \pi L t} \quad (3.5)$$

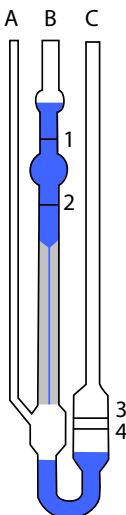
kde  $n$  je přibližně 1,1. Je-li Reynoldsovo číslo  $Re = \frac{2R\rho v}{\eta} < 2000$ , kde  $\rho$  je hustota,  $v$  je střední rychlost proudění v kapiláře, pak lze proudění považovat za čistě laminární a výraz pro viskozitu se zjednodušuje na tvar

$$\eta = \frac{\pi R^4 p t}{8 V L}, \quad (3.6)$$

Absolutní měření viskozity lze provést pomocí Mariottovy láhve a kapiláry vhodného průměru (viz obr. 3.1). Mariottova láhev zajišťuje stálý tlakový spád, nezávislý na množství odečtené kapaliny. Objemové množství kapaliny, které vyteče za čas  $t$ , určíme při známé hustotě kapaliny  $\rho$  vážením. Poloměr  $R$  a délka kapiláry  $L$  jsou uvedeny na láhvi.

### 3.2.2 Ubbelohdeho viskozimetr

Ubbelohdeho viskozimetr je skleněný výtokový kapilární viskozimetr pro přesné relativní a s kalibrací i absolutní měření kinematické viskozity newtonských kapalin (viz obr. 3.2). Měření je opět založeno na využití Poiseuillova vztahu (3.6). Díky přítomnosti trubice A nezávisí doba průtoku na celkovém objemu kapaliny ve viskozimetru.



Obrázek 3.2: Ubbelohdeho kapilární viskozimetr

### Postup měření

1. **Pozor, viskozimetr je velmi křehké a také velmi drahé zařízení. Pracujte s ním velmi opatrně. Hrozí zejména nebezpečí ulomení trubice A!**
2. Nejprve naplníme viskozimetr kapalinou přes trubici C tak, aby hladina sahala mezi rysky 3, 4.
3. Na trubici B nasadíme hadičku s balónkem.
4. Trubicí A zakryjeme prstem jedné ruky a pomocí balónku (druhou rukou balónek stlačíme, palcem zakryjeme otvor v balónku a balónek uvolníme) nasajeme kapalinu do trubice B tak, aby sahala poněkud nad rysku 1, budeme mít více času, když zaplní i horní nádobku.
5. Uvolníme otvor v balónku a poté i prst z trubice A.
6. Stopkami změříme dobu  $t$ , za kterou hladina v trubici B poklesne z rysky 1 na rysku 2.

Kinematickou viskozitu stanovíme ze vztahu

$$\nu = K \cdot t, \quad (3.7)$$

kde  $K$  je časová konstanta viskozimetru. Přehled různých tříd viskozimetrů včetně značení, přibližné hodnoty konstanty a rozsahu použitelnosti podává tabulka 3.1.

Neznáme-li konstantu viskozimetru, můžeme si jej zkalibrovat pomocí kapaliny o známé viskozitě  $\nu_{\text{známé}}$

$$\nu = \frac{t}{t_{\text{známé}}} \nu_{\text{známé}}.$$

## 3.3 Měření hustoty kapalin

### 3.3.1 Měření hustoty metodou ponorného tělíska

Pro operativní měření hustoty lze použít digitální váhy s podvěsným vážením, případně speciální hrazdičkou, dovolující měření hmotnosti zavěšeného předmětu. Dříve se používaly speciální nerovnoramenné Mohrovy vážky. Měření je založeno na srovnání vztlakové síly působící na ponorné tělísko v kapalině o známé a neznámé hustotě.

## Postup měření

1. Na spodní závěs zavěsíme ponorné tělísko v podobě krátkého teploměru.
2. Váhy vytárujeme.
3. Kapalinu o neznámé hustotě nalijeme do vhodného odměrného válce a postavíme pod váhy tak, aby tělísko bylo plně ponořeno. Získáme údaj  $m$ .
4. Totéž provedeme s kalibrační kapalinou o známé hustotě (destilovaná voda). Získáme údaj  $m_{\text{známé}}$ .
5. Hustotu neznámé kapaliny stanovíme ze vztahu

$$\rho = \frac{m}{m_{\text{známé}}} \rho_{\text{známé}}.$$

### 3.3.2 Pyknometrická metoda

Přesné měření měrné hmotnosti kapalin provádíme pyknometrickou metodou. Pyknometr je skleněná nádoba se zabroušeným uzávěrem. V uzávěru je tenká kapilára, kterou může unikat při zavírání pyknometru přebytečné množství kapaliny. Určení hustoty neznámé kapaliny spočívá v porovnání hmotnosti této kapaliny s hmotností stejného objemu kapaliny o známé hustotě. Označíme-li

- neznámou hustotu kapaliny  $\rho_1$ ,
- hustotu známé kapaliny  $\rho_2$ ,
- údaj vah s pyknometrem naplněný kapalinou s neznámou hustotou  $m_1$ ,
- údaj vah s pyknometrem naplněný kapalinou se známou hustotou  $m_2$ ,
- hmotnost prázdného pyknometru  $m$ ,
- hustotu vzduchu  $\rho_v$ ,

pro neznámou hustotu platí vztah

$$\rho_1 = (\rho_2 - \rho_v) \frac{m_1 - m}{m_2 - m} + \rho_v.$$

Relativní nejistota vymezení objemu kapaliny pyknometrem  $r(V)$  je dána

- relativní nejistotou  $r_t(V)$  v závislosti na odchylce  $\Delta t$  teploty pyknometru od teploty, pro kterou byl pyknometr kalibrován

$$r_t(V) = 3\alpha\Delta t,$$

kde  $\alpha$  je součinitel teplotní roztažnosti skla, ze kterého je pyknometr vyroben. Nejistota není významná, porovnáváme-li při relativní metodě měření kapaliny o stejné laboratorní teplotě,

- relativní nejistotou  $r_k(V)$  danou nejistotou polohy hladiny v kapiláře

$$r_k(V) = \frac{\Delta V_{\text{kap}}}{V_{\text{pyknometru}}}$$

Je-li průměr kapiláry 1 mm a objem pyknometru  $10 \text{ cm}^3$ , je relativní nejistota vymezení objemu řádu  $r_k(V) \approx 10^{-4}$ .

## 3.4 Měření povrchového napětí

### 3.4.1 Měření povrchového napětí du Noüyho metodou

Měření povrchového napětí metodou měření síly je založeno na vnoření vhodného objektu do studované kapaliny, stanovení smáčeného obvodu objektu a na měření přidané síly působící na objekt vlivem jeho kontaktu s kapalinou. Přitom se předpokládá, že

1. povrchové napětí nezávisí na křivosti povrchu kapaliny,
2. kapalina na ponořenou část tělesa působí pouze hydrostatickou silou (kromě povrchového napětí)
3. kontaktní úhel mezi povrchem kapaliny a svislicí na rozhraní všech tří fází je znám, případně lze předpokládat, že je roven nule.

Typicky se do kapaliny vnořují kovové objekty z platiny a iridia, u kterých je dobře splněna třetí podmínka: svislá destička (Wilhelmyho metoda), rámeček (Lenardova metoda) či kroužek (du Noüyho metoda). Nejčastěji používaný kroužek má výhodu hlavně v neexistenci problematických konců, metoda však pro přesné měření povrchového napětí vyžaduje korekce počítané numericky.

#### Postup měření

1. Na digitální váhy s podvěsným vážením zavěsíme aluminiový kroužek. Povrch kroužku nesmí být znečištěn. **Samotného kroužku se rukou zásadně nedotýkejte**.
2. Spustíme program *Tensionmeter* a váhy s kroužkem ve vzduchu vytárujeme.
3. Kapalinu nalijeme do nádoby o dostatečném průměru (kolem 11 cm) a nádobku umístíme pod váhy na destičku s jemným vertikálním posuvem. Destičku nastavíme hrubým posuvem do takové polohy, kdy lze jemným posuvem nádoby kroužek zanořit do kapaliny a opět jej vytáhnout.
4. V programu *Tensionmeter* spustíme záznam měření (logování).
5. Spustíme kroužek zcela do kapaliny a pomalu a plynule ho vytahujeme. Je třeba dbát na to, aby kroužek ani kapalina nebyly při vytahování kroužku vystaveny otřesům.
6. Po odtrhnutí kroužku měření zastavíme. Naměřený průběh srovnáme s vývojem na obr. 3.3.

U du Noüyho metody vyhodnocujeme maximální sílu působící na kroužek, *nikoliv sílu potřebnou k odtržení kroužku*. Povrchové napětí pak stanovíme ze vztahu

$$\sigma = \frac{F_{\max}}{4\pi R} \cdot f(R^3/V, R/r),$$

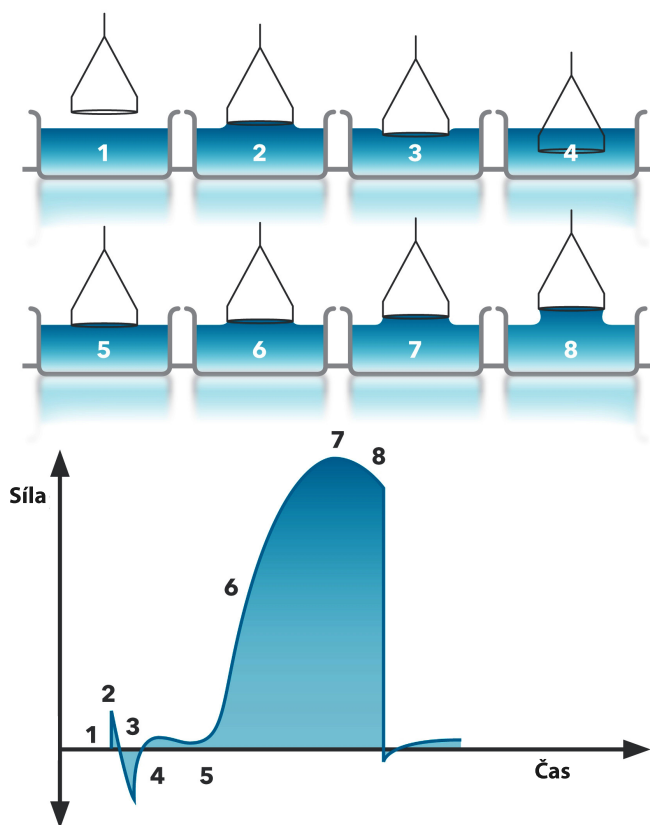
kde  $F_{\max}$  je maximální síla působící na kroužek,  $2\pi R$  obvod kroužku a  $f(R^3/V, R/r)$  Harkinsův-Jordanův korekční faktor, který je tabelován pro bezrozměrné veličiny  $R^3/V$  a  $R/r$ ;  $V = \frac{F_{\max}}{(\rho - \rho_v)g}$  a  $r$  je poloměr drátku, ze kterého je kroužek vyroben.

### 3.4.2 Měření složek povrchového napětí metodou kontaktního úhlu přisedlé kapky

Při této metodě je na vodorovný očištěný vzorek pevné látky o vhodné povrchové energii nanášena jedna nebo více kapek testovacích kapalin a je měřen kontaktní úhel, který svírá tečna k profilu kapky v místě styku všech tří fází (pevná látka, kapalina a její pára) s rovinou povrchu pevné látky (viz obr. 3.4). V rovnováze, která se ustaví do několika sekund od nakápnutí, platí Youngova rovnice

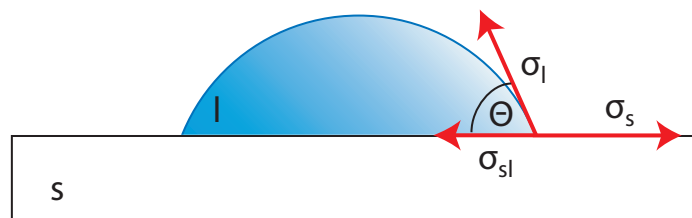
$$\sigma_s = \sigma_{sl} + \sigma_l \cos \Theta, \quad (3.8)$$





1. Kroužek je nad hladinou, váhy jsou vytárovány.
2. Kroužek se dotýká hladiny a působí na něj slabá kladná síla (směrem dolů) vlivem adheze mezi kroužkem a povrchem kapaliny.
3. Kroužek je tlačěn do kapaliny. Vlivem povrchového napětí na něj působí záporná síla (směrem vzhůru).
4. Kroužek v kapalině, malá kladná síla vlivem působení kapaliny na podpůrné drátky.
5. Při zvedání kroužku síla působící na kroužek začíná růst.
6. Růst síly se začíná zpomalovat.
7. Maximální síla.
8. Pokles síly následovaný odtržením kroužku.

Obrázek 3.3: Závislost síly působící na kroužek při jeho ponoru a vytahování. Převzato z <http://www.attension.com>.



Obrázek 3.4: Youngova rovnováha na rozhraní tří fází u přisedlé kapky

kde  $\sigma_l$  a  $\sigma_s$  jsou volné povrchové mezifázové energie kapaliny a pevné látky vůči páře kapaliny a  $\sigma_{sl}$  mezifázová povrchové energie rozhraní kapalina – pevná látka.  $\Theta$  je již zmiňovaný rovnovážný kontaktní úhel.

Kombinací Youngovy a Dupreho rovnice (3.4) dostaneme rovnici Youngovu-Dupreho

$$(1 + \cos \Theta)\sigma_l = 2(\sqrt{\sigma_s^{lw}\sigma_l^{lw}} + \sqrt{\sigma_s^{ab}\sigma_l^{ab}} + \dots) \quad (3.9)$$

kteřou lze použít ke stanovení povrchové energie a jejích složek z hodnoty kontaktního úhlu.

Chceme-li změřit disperzní složku povrchového napětí vody, zvolíme si povrch, který má povrchovou energii pouze disperzního charakteru  $\sigma_s = \sigma_s^{lw}$ , např. teflon. Na pravé straně Youngovy-Dupreho rovnice pak bude vystupovat pouze jedna odmocnina ze součinu disperzních složek, ostatní odmocniny budou rovny nule. Změříme-li na tomto povrchu kontaktní úhel s vodou  $\Theta_{H_2O}$

a s jinou kapalinou se známou disperzní složkou  $\Theta_{\text{kal}}$ , dvojnásobnou aplikací Youngovy-Dupreho rovnice dostaneme

$$\begin{aligned}(1 + \cos \Theta_{\text{H}_2\text{O}})\sigma_{\text{H}_2\text{O}} &= 2\sqrt{\sigma_{\text{s}}^{\text{lw}}\sigma_{\text{H}_2\text{O}}^{\text{lw}}} \\ (1 + \cos \Theta_{\text{kal}})\sigma_{\text{kal}} &= 2\sqrt{\sigma_{\text{s}}^{\text{lw}}\sigma_{\text{kal}}^{\text{lw}}}\end{aligned}$$

Po vydělení obou rovnic pro poměr disperzní a celkové povrchové energie vody platí

$$\frac{\sigma_{\text{H}_2\text{O}}^{\text{lw}}}{\sigma_{\text{H}_2\text{O}}} = \frac{\sigma_{\text{kal}}^{\text{lw}}}{\sigma_{\text{kal}}} \frac{\sigma_{\text{H}_2\text{O}}}{\sigma_{\text{kal}}} \left( \frac{1 + \cos \Theta_{\text{H}_2\text{O}}}{1 + \cos \Theta_{\text{kal}}} \right)^2. \quad (3.10)$$

Jako kalibrační kapalinu je výhodné použít např. metylenjodid ( $\text{CH}_2\text{I}_2$ ), který má povrchovou energii rovněž čistě disperzního charakteru, a tedy  $\sigma_{\text{kal}} = \sigma_{\text{kal}}^{\text{lw}}$ .

K měření využijeme měřič kontaktního úhlu.

### Postup měření

1. Spustíme ovládací program, na stůl položíme vzorek a mikropipetou nakápneme kapky. **Pro každou kapalinu použijeme zvláštní špičku!**
2. Kapky posunem stolku zaostříme, zvolíme si vhodné jméno souboru a obě kapky sejmeme (*Capture*).
3. Přejdeme do záložky *Analysis*. Vpravo zvolíme soubor se snímkem kapky. Klikneme do obrazu tak, abychom označili oba krajní body kapky, kde se stýkají všechny tři fáze, a třetí bod zvolíme v horní části kapky. Program při třetím bodu vykreslí proloženou kružnici a vypíše hodnotu kontaktního úhlu. Nejsme-li však s proložením profilu kapky spokojeni, bod smažeme pravým kliknutím na něj a umístíme jej znovu.

### Úkoly

1. Určete teplotní závislost viskozity vody Ubbelohdeho viskozimetrem. Viskozimetr naplňte podle potřeby destilovanou vodou a ponořte do skleněného válce naplněného kohoutkovou vodou o vhodné teplotě. Počkejte, až se kapalina uvnitř viskozimetru ohřeje a proveďte měření. Viskozitu stanovte pro tři teploty (kolem 20, 30 a 40 °C). Doba průtoku je cca 15 minut, takže měření skombinujte s dalšími experimenty. Konstanta viskozimetru Schott je  $K = 1,063 \cdot 10^{-3} \text{ mm}^2 \text{ s}^{-2}$ ,  $r(K) = 0,65\%$  (p 95%). **Do viskozimetru dávejte jen destilovanou vodu!**
2. Změřte čas, za jaký vyteče určité množství vody z Mariottovy láhve. Čas měřte stopkami, množství vody určete vážením. Výšku „hladiny“ nad úroveň ústí kapiláry určete katetometrem. Vypočtete viskozitu vody podle vztahu (3.6), stanovte nejistotu měření.
3. Určete hustotu lihu na základě známé hustoty vody pomocí pyknometru. Nejprve určete hmotnost prázdného a suchého pyknometru. Pak hmotnost pyknometru naplněného lihem a nakonec **destilovanou** vodou. Při tomto postupu se neztrácí čas vysoušením pyknometru a zbytků lihu v pyknometru se lze zbavit opakovaným výplachem vodou, která je dostupnější než líh.
4. Určete hustotu lihu metodou ponorného tělíska. Použijte digitální váhy s podvěsným vážením, na spodní závěs zavěste ponorný teploměr. Pokud na závěsu zůstal z předešlého měření platinový kroužek, opatrně ho sejměte, aniž byste se samotného kroužku dotýkali, a zavěste na odkladný stojánek. Ke čtení hodnot vah můžete využít digitální displej nebo program *Tensionmeter*. Jako známou kapalinu použijte **destilovanou** vodu.
5. Určete povrchové napětí **destilované** vody a lihu du Noüyho metodou kroužku. Měření opakuje 10×. Průměr kroužku je  $D = (58,0 \pm 0,1) \text{ mm}$ . Harkinsův-Jordanův korekční faktor je přibližně  $f(R^3/V, R/r) = 0,77$ .

6. Pomocí měřiče kontaktního úhlu změřte disperzní složku povrchové energie vody metodou kontaktního úhlu přisedlé kapky. Jako vzorek použijte destičku z teflonu, kalibrační kapalinou je glycerol nebo metylen jodid. (Metylen jodid sami nepoužívejte, kapku vám kápne vyučující.) Na očištěný a vysušený vzorek naneste mikropipetou kapku o objemu cca  $1 \mu\text{l}$ . **Pro každou kapalinu použijte zvláštní špičku!** Přístrojem určete oba kontaktní úhly. Dopočítejte zbylou polární složku povrchové energie vody ( $\sigma^{\text{ab}} = \sigma - \sigma^{\text{lw}}$ ) a porovnejte výsledky s tabulkovými hodnotami.

### 3.A Užití v praxi

Co se týče měření hustoty kapalin, kromě metod uvedených v této úloze a jejich variant se zejména v různých odvětvích průmyslu hojně využívá další metoda – měření tzv. oscilačním hustoměrem. Při měření touto metodou se přivede malé množství kapaliny do kapiláry, která je nejčastěji tvaru U. Tato kapilára se následně na jednom místě rozkmitává a na jiném místě se měří frekvence jejích kmitů. Ze zjištěné rezonanční frekvence kapiláry, která závisí na hmotnosti její kapalné náplně, a z jejích geometrických vlastností lze následně určit hustotu kapalné náplně. Tato metoda se vyznačuje vysokou přesností (např. u přístroje „Anton Paar DMA 5000 M“ výrobce uvádí přesnost  $5 \cdot 10^{-6} \text{ g cm}^{-3}$ ) a malou spotřebou vzorku.

### 3.B Tabulky

Značení		Průměr kapiláry (mm)	Konstanta K (přibl.)	Rozsah $\nu$ ( $\text{mm}^2 \text{ s}^{-1}$ )
DIN	ISO			
0	-	0.36	0.001	0.3 – 1
0c	-	0.47	0.003	0.5 – 3
0a	-	0.53	0.005	0.8 – 5
I	I	0.63	0.01	1.2 – 10
Ic	Ia	0.84	0.03	3 – 30
Ia	-	0.95	0.05	5 – 20
II	II	1.13	0.1	10 – 100
IIC	IIa	1.50	0.3	30 – 300
IIa	-	1.69	0.5	50 – 500
III	III	2.01	1	100 – 1000
IIIc	IIIa	2.65	3	300 – 3000
IIIa	-	3.00	5	500 – 5000
IV	IV	3.60	10	1000 – 10000
IVc	IVa	4.70	30	3000 – 30000
IVa	-	5.34	50	6000 – 30000
-	V	6.30	100	> 10000

Tabulka 3.1: Ubbelohdeho viskozimetr – třídy. Podle materiálů firmy Schott.

Kapalina	$\sigma$	$\sigma^{\text{lw}}$	$\sigma^{\text{ab}}$	$\sigma^+$	$\sigma^-$	$\eta$ [poise]
Water	72.8	21.8	51.0	25.5	25.5	0.010
Glycerol	64.0	34.0	30.0	3.92	57.4	14.90
Formamide	58.0	39.0	19.0	2.28	39.6	0.0455
Ethylene glycol	48.0	29.0	19.0	1.92	47.0	0.199
Methylene iodide	50.8	50.8	0	0	0	0.028
$\alpha$ -Bromonaphthalene	44.4	43.4	$\approx 0$	0	0	0.0489
Chloroform	27.15	27.15	0	3.8	0	0.00473
Ethanol	22.4	18.8	$\approx 2.6$	$\approx 0.019$	$\approx 68$	0.01074
Methanol	22.5	18.2	4.3	$\approx 0.06$	$\approx 77$	0.00544
Toluene	28.5	28.5	0	0	2.3	0.00604
Benzene	28.9	27.1	$\approx 0$	0	2.8	0.00604
Carbone tetrachloride	27.0	27.0	0	0	0	0.00908
Cyclohexane	25.5	25.5	0	0	0	0.00912
Tetradecane	26.6	26.6	0	0	0	0.0218
Dodecane	25.35	25.35	0	0	0	0.01493
Decane	23.8	23.8	0	0	0	0.00907
Octane	21.6	21.6	0	0	0	0.00542
Heptane	20.3	20.3	0	0	0	0.00409
Hexane	18.4	18.4	0	0	0	0.00326

Pevná látka	$\sigma$	$\sigma^{\text{lw}}$	$\sigma^{\text{ab}}$	$\sigma^+$	$\sigma^-$
Teflon	18.5	18.5	0	0	0
Polyisobutylene	25.0	25.0	0	0	0
Polypropylene	25.7	25.7	0	0	0
Polyethylene	33.0	33.0	0	0	0
Nylon 6,6	37.7	37.7	0	0	0
PMMA	40.6	40.6	0	0	12.0
Polystyrene	42.0	42.0	0	0	1.1
Polyvinyl alcohol	42.0	42.0	0	0	17–57
Polyvinylchloride	43.8	43.0	0.75	0.04	3.5
Coal	39.8	39.8	0	0	2.5
Talc	41.6	37.4	4.2	2.0	2.2
Calcium Carbonate	48.0	48.0	0	0	79.0
Quartz	191.0	76.0	115.0	–	–
Silica gel	48.8	42.0	6.8	58.4	0.2
Bentonite clay	55.5	41.2	14.3	1.5	33.3
$\alpha$ -Alumina	44.8	43.7	1.1	0.004	80.5
Barite	52.9	26.2	26.7	1.5	118.9

Povrchové energie kapalin a pevných látek (v  $\text{mJ m}^{-2}$ ).

## Úloha 4

# Měření gravitační konstanty a tíhového zrychlení

### 4.1 Měření tíhového zrychlení reverzním kyvadlem

#### 4.1.1 Tíhové zrychlení na Zemi

Tíhové zrychlení  $g$  je definováno jako zrychlení volného pádu tělesa ve vakuu. V daném bodě je pro všechna tělesa stejné. Tíhové zrychlení obecně závisí na zeměpisné šířce  $\phi$  a nadmořské výšce  $H$  dle empirické relace <sup>1</sup>

$$g = [9,780\,356(1 + 0,005\,288\,5 \sin^2 \phi - 0,000\,005\,9 \sin^2 2\phi) - 0,000\,003\,086 H] \text{ ms}^{-2}. \quad (4.1)$$

Zrychlení může navíc kolísat dle lokálních nepravidlostí a nehomogenit zemského tělesa v řádu  $10^{-3} \text{ ms}^{-2}$  od hodnoty určené pomocí (4.1). Fyzikální tabulky [6] udávají pro Brno  $g = 9,809\,980 \text{ ms}^{-2}$ .

#### 4.1.2 Možné postupy k určení tíhového zrychlení

Měření tíhového zrychlení přímo z definice, tj. měřením zrychlení volného pádu, je přístrojově velmi náročné. Poměrně přesné a přitom přístrojově nenáročné měření využívá kyvadel. Obecně lze použít libovolné fyzické kyvadlo, jehož perioda je dána vztahem

$$T(\varphi_m) = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgx}} \left( 1 + \frac{1}{16} \varphi_m^2 + \frac{11}{3072} \varphi_m^4 + \frac{173}{737280} \varphi_m^6 \dots \right), \quad (4.2)$$

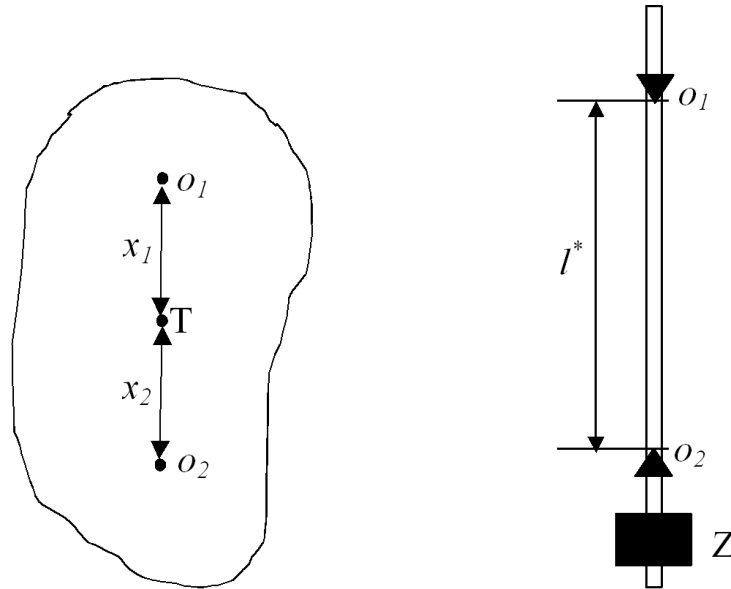
kde  $g$  je tíhové zrychlení,  $J$  je moment setrvačnosti kyvadla vzhledem k ose otáčení,  $m$  jeho hmotnost,  $x$  vzdálenost osy otáčení (závěsu) od těžiště kyvadla,  $\varphi_m$  amplituda kmitů v obloukové míře. Pro amplitudu kmitů jdoucí limitně k nule (tzv. nulové kmitů) dostaneme

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgx}}. \quad (4.3)$$

Nerespektování závislosti periody na amplitudě je jedním z potenciálních zdrojů systematické chyby. Například relativní odchylka periody pro amplitudu  $5^\circ$  (tj.  $\varphi_m \approx 8,7 \cdot 10^{-2}$  rad) od periody nulových kmitů

$$\frac{\Delta T}{T} \cong \frac{1}{16} (\varphi_m)^2 \cong 5 \cdot 10^{-4} \quad (4.4)$$

je srovnatelná s relativní nejistotou způsobenou 0,1% nejistotou určení délky matematického kyvadla.



Obrázek 4.1: Fyzické kyvadlo a reverzní kyvadlo. Symboly  $x_1$ ,  $x_2$  označují vzdálenosti os  $o_1$ ,  $o_2$  od těžiště T.

Uvažujme těleso libovolného tvaru, které může kmitat vzhledem ke dvěma různým osám  $o_1$ ,  $o_2$  tak, že doby kmitu k příslušným osám jsou shodné  $T_1 = T_2$  (viz obr. 4.1). Pro doby kmitu vzhledem k osám  $o_1$  a  $o_2$  můžeme psát

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{J_0 + mx_1^2}{mgx_1}}, \quad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{J_0 + mx_2^2}{mgx_2}}. \quad (4.5)$$

Podmínka rovnosti dob kmitu vede na rovnici

$$\frac{J_0 + mx_1^2}{mgx_1} = \frac{J_0 + mx_2^2}{mgx_2}. \quad (4.6)$$

Zaveďme redukovanou délku  $l = x_1 + x_2$ . Pokud vyjádříme např.  $x_2 = l - x_1$ , dostaneme z rovnice (4.6) vztah

$$l = \frac{J_0 + mx_1^2}{mx_1}. \quad (4.7)$$

Porovnáním rovnice (4.7) s rovnicí (4.5) dostaneme výslednou periodu

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (4.8)$$

Obdobný postupem bychom získali stejný vztah i pro  $T_2$

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (4.9)$$

K tomuto výsledku lze dospět ještě jiným způsobem, ze kterého je zřejmější, jak ovlivňuje vzdálenost osy otáčení od těžiště výslednou periodu. Výpočet je uveden v příloze 4.D.

K praktickému provedení měření tíhového zrychlení pomocí kyvadla je zapotřebí speciální konstrukce kyvadla – tzv. reverzní kyvadlo.

<sup>1</sup>Jursa, A. S. Ed., *Handbook of Geophysics and the Space Environment*, 4th ed. Air Force Geophysics Laboratory, 1985, p. 14-17

### 4.1.3 Postup měření

Rovnice (4.8) a (4.9) platí zcela obecně pro fyzické kyvadlo libovolného tvaru. Jedinou podmínkou je rovnost dob kmitu ke dvěma různým osám. Pro měření tíhového zrychlení tedy stačí

1. zajistit platnost rovnosti  $T_1 = T_2$ ,
2. změřit dobu kmitu,
3. určit redukovanou délku  $l = x_1 + x_2$ , která je přímo rovna vzdálenosti os otáčení, pokud obě osy a těžiště leží v jedné přímce.

Největší problém je zajistit rovnost dob kmitu ke dvěma různým osám. Technicky jednodušší než měnit polohu osy rotace je měnit polohu těžiště kyvadla při konstrukčně pevných osách rotace. Tento postup umožňuje reverzní kyvadlo (viz obr. 4.1). Kyvadlo kýve zavěšeno na břitech, polohu těžiště je možné měnit posuvem přidavného závaží Z. Má-li být redukovaná délka rovna vzdálenosti os otáčení, musí těžiště ležet na přímce mezi průsečíky této přímky s osami otáčení. U reverzního kyvadla je to zajištěno symetrií konstrukce.

Při vlastním měření postupujeme tak, že měříme závislost doby kmitu na poloze závaží pro obě osy. Polohu závaží určujeme pomocí lineárního měřítka vzhledem k nějaké vhodně zvolené referenční pozici  $y$ .

V principu by měřítko nemuselo být ani metrické, jedinou podmínkou je linearita a dostatečně jemné dělení k zajištění potřebné přesnosti. Jednou z možností je využít mm stupnici vyrytou na tyči, jejíž nevýhoda je v malé přesnosti odečtu i nastavení, ne lepší než 0,5 mm. Druhou možností je vztáhnout pozici spodní hrany závaží k hraně bližšího břitu a pozici odměřovat posuvným měřítkem. Dosažitelná přesnost je pod 0,1 mm.

Po vynesení obou závislostí do grafu najdeme polohu závaží  $y_0$  takovou, při které obě doby kmitu splynou (viz obr. 4.2). Do této polohy můžeme závaží vrátit a změřit ještě jednou a co nejpečlivěji doby kmitu  $T_1$  a  $T_2$  k oběma osám. Tato operace má ovšem smysl, jen když použijeme k stanovení polohy závaží posuvku.

Jsou-li obě periody dostatečně blízké, můžeme použít pro výpočet tíhového zrychlení ze vztahu (4.8) jednu z naměřených hodnot anebo průměr z takto získaných hodnot (promyslete si sami). Kritériem blízkosti je srovnatelnost rozdílů period s diferencí periody odpovídající posunutí závaží o nejistotu, s jakou lze závaží nastavit na danou pozici.

Pro úspěšné provedení celého měření je nutné během praktika zkonstruovat graf  $T(y)$  a získat hodnotu  $y_0$  (viz obr. 4.2). K dispozici je počítač s programem *QtiPlot*.

### 4.1.4 Měření času pomocí počítače

Doby kmitu kyvadla měříme pomocí optické závory, připojené na sériový port počítače. Při průchodu kyvadla závorou dojde k zastínění fotodiody a ke zvýšení jejího odporu (je zapojena v záporném směru). K záznamu průchodů kyvadla závorou a ke stanovení doby kmitu slouží program *Stopky*. Po rozkmitání kyvadla spustíme měření tlačítkem Start. Program registruje jednotlivé průchody, měří jejich časy  $t_i$  a vynáší je do grafu. Rozlišuje průchody tam a zpět. Po zaznamenání asi deseti průchodů prokládá body v grafu lineární závislosti

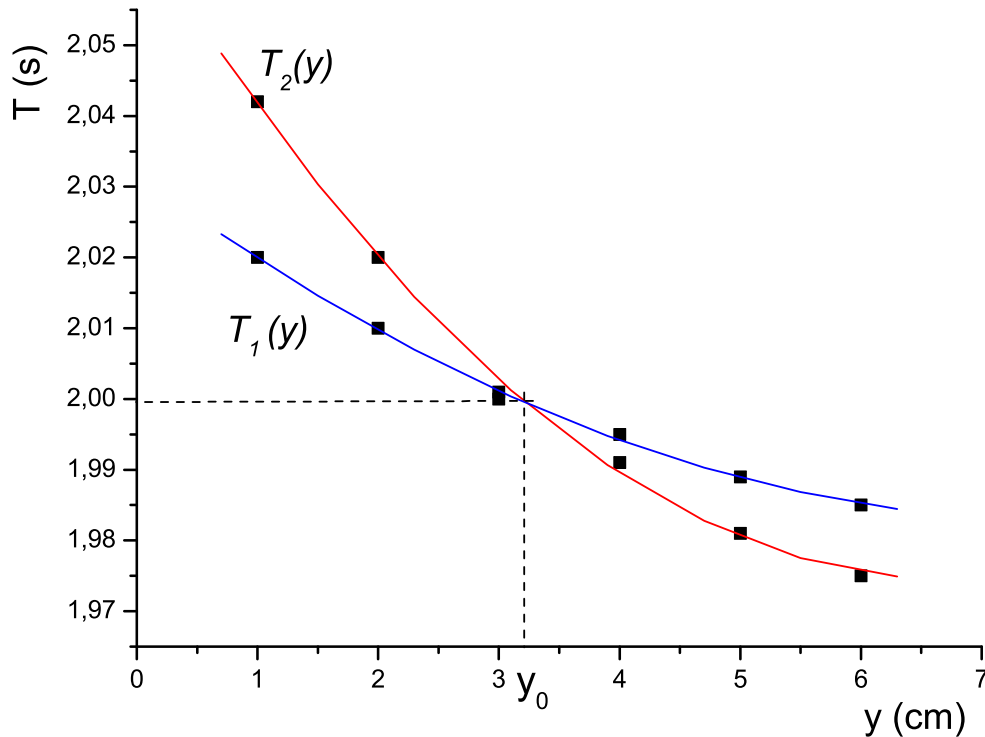
$$t(i) = b_0 + b_1 i$$

kde  $t$  je čas průchodu a  $i$  index průchodu, a vypisuje parametry  $b_0$  a  $b_1$  stanovené metodou nejmenších čtverců. Časy průchodů lze v programu uložit do textového souboru a nezávisle vyhodnotit např. v programu *QtiPlot*.

#### Před měřením odpovězte na otázku:

Jak se stanoví doba kmitu a její nejistota z parametrů  $b_0$  a  $b_1$ ? Uvažte, že směrnice přímky je rovna

$$b_1 = \frac{t(i + \Delta i) - t(i)}{\Delta i}.$$



Obrázek 4.2: Ukázka nalezení polohy závaží se stejnou dobou kmitu  $T_1$ ,  $T_2$ .

#### 4.1.5 Měření redukované délky

Za osu otáčení můžeme v prvním přiblížení brát hranu břitu. Přesnější určení polohy vyžaduje kinematickou analýzu závěsu. Nejistotu určení redukované délky v důsledku této aproximace lze odhadnout na 0,05 mm.

## 4.2 Měření gravitační konstanty Cavendishovou metodou

### 4.2.1 Gravitační síla

Každé dvě částice o hmotnosti  $m_1$  a  $m_2$  ve vzdálenosti  $r$ , které lze považovat s dostatečnou přesností za hmotné body, se přitahují silou danou Newtonovým gravitačním zákonem

$$F = \kappa \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (4.10)$$

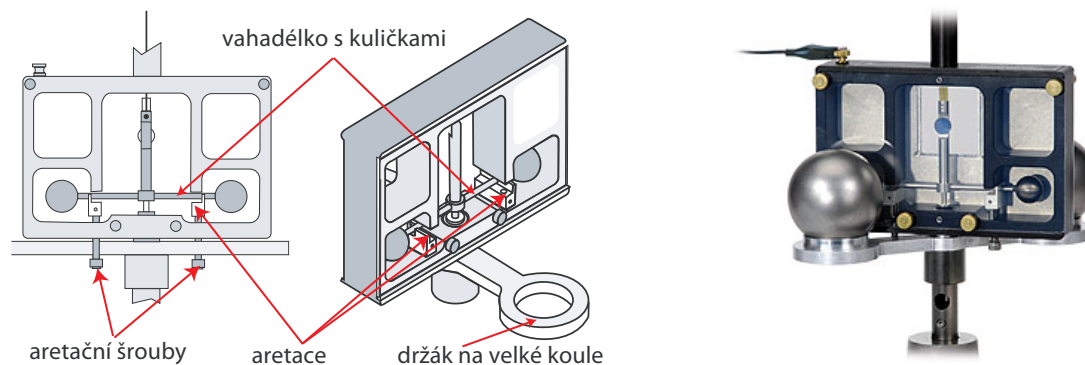
kde  $\kappa$  je gravitační konstanta ( $\kappa = 6,673\,84(80) \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$  s relativní nejistotou udávanou v současné době (leden 2012) na  $1,2 \cdot 10^{-4}$ ). Stejný vztah platí i pro tělesa s kulově symetrickým rozložením hustoty,  $r$  pak představuje vzdálenost středů kulové symetrie těles.

Pro představu o velikosti této síly uvažujme dvě koule o hmotnosti 1 kg ve vzdálenosti středů 0,1 m. Výsledná síla bude podle Newtonova gravitačního zákona rovna  $6,67 \cdot 10^{-9}$  N. To odpovídá tíhové síle působící na závaží o hmotnosti 0,667 ng.

Z toho je zřejmé, že tak malou sílu lze na pozadí tíhové síly měřit jen obtížně. Pro představu: znamenalo by to, že váhy s jednokilogramovým závažím na misce zvaží hmotnost přidaného přívazku 0,667 ng, tj. relativní citlivost vah by byla lepší než  $10^{-13}$ .

Avšak pohyb, který by tato síla sama o sobě způsobila, měřitelný je. Například za 100 s by síla rovnoměrně zrychleným pohybem posunula kouli o hmotnosti 1 kg o  $\approx 33 \mu\text{m}$ .





Obrázek 4.3: Cavendishovy torzní váhy, nákres a skutečná realizace. Výroba Pasco Scientific.

Problém je zjevně v separaci této malé síly od ostatních sil, od dominantní tíhové síly (hmotnost Země  $5,9736 \cdot 10^{24}$  kg, poloměr 6378 km), od parazitní elektrostatische nebo obecně elektromagnetické síly, a dále od rušivých vlivů, jako jsou vibrace a cirkulace vzduchu.

Jedna z konstrukcí, která těmto požadavkům vyhovuje, se nazývá Cavendishovy torzní váhy.<sup>2</sup>

#### 4.2.2 Cavendishova metoda torzních vah

Měřenou veličinou u Cavendishových vah je moment sil  $M_{\text{grav}}$  od gravitační interakce mezi dvěma hmotnými koulemi a dvojicí malých kuliček spojených tyčkou („činka“) zavěšených v těžišti na torzním vlákně (viz obr. 4.3). Zatímco tíhová síla namáhá vlákno v tahu, gravitační interakce mezi koulemi namáhá vlákno v torzi. Vhodným uspořádáním lze dosáhnout velké tuhosti závěsu ve směru tíhové síly, a přitom minimální tuhosti neboli direkčního momentu v krutu.

Úhlové zkroucení závěsu  $\varphi$  je doprovázeno vratným silovým momentem  $M$

$$M(\varphi) = -D\varphi, \quad (4.11)$$

kde  $D$  je právě veličina zvaná direkční moment.

Dvě stejné kuličky o hmotnosti  $m$  a poloměru  $\rho$ , které jsou spojené vahadélkem zanedbatelné hmotnosti při vzájemné vzdálenosti jejich středů  $2d$ , mají vzhledem k ose závěsu moment setrvačnosti

$$J = 2m\left(\frac{2}{5}\rho^2 + d^2\right) \quad (4.12)$$

a na závěsu tak tvoří tlumený torzní harmonický osilátor, jehož volné kmity jsou popsány diferenciální rovnicí

$$J\ddot{\varphi} + \gamma\dot{\varphi} + D\varphi = M_{\text{grav}}, \quad (4.13)$$

$\gamma$  je konstanta úměrnosti mezi brzdícím momentem a úhlovou rychlostí otáčení.

Řešením diferenciální rovnice jsou tlumené harmonické kmity

$$\varphi(t) = \varphi_m e^{-\beta t} \sin(\omega t + \psi) + \varphi_0, \quad (4.14)$$

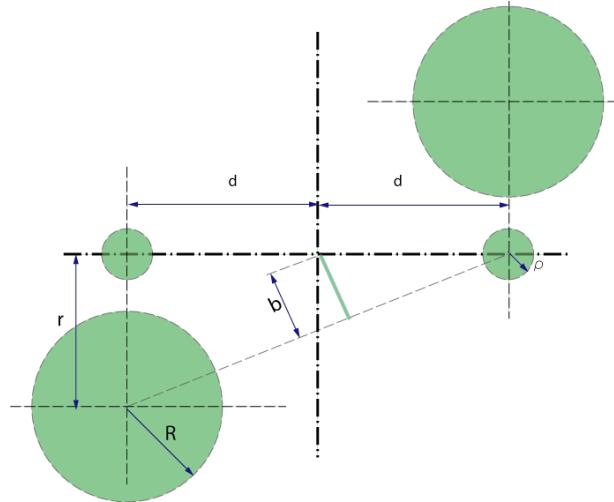
kde

$$\beta = \frac{\gamma}{2J} \text{ je koeficient tlumení,} \quad (4.15)$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \text{ je úhlová frekvence tlumeného kmitání,} \quad (4.16)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{J}} \text{ je úhlová frekvence netlumeného kmitání.} \quad (4.17)$$

<sup>2</sup>I když sám Cavendish nebyl vynálezcem těchto vah.



Obrázek 4.4: K určení momentu gravitačních sil.

V experimentu vliv tlumení zanedbáme, a tedy  $\omega \approx \omega_0 = \sqrt{\frac{D}{J}}$ . Odhad chyby způsobené touto aproximací je proveden v příloze 4.A. Zanedbáme-li dále proměnnost momentu gravitačních sil  $M_{\text{grav}}$  během torzních kmitů vahadélka, viz příloha 4.C, moment způsobuje pouze posun rovnovážné polohy

$$\varphi_0 = \frac{M_{\text{grav}}}{D}. \quad (4.18)$$

Známe-li  $D$  a posun rovnovážné polohy  $\varphi_0$ , můžeme určit velikost momentu gravitačních sil a při znalosti hmotnosti koulí a geometrických poměrů i gravitační konstantu.

**Velikost momentu gravitačních sil** Moment gravitačních sil má směr závěsu. Vzhledem k symetrii stačí spočítat moment jen od jedné velké koule a výsledek násobit dvěma. Dále je zapotřebí vzít v úvahu, že velká koule působí na obě kuličky a že momenty těchto sil jsou orientovány proti sobě. Pro velikost momentu pak dostaneme

$$M_{\text{grav}} = 2\kappa(Mm)d \left( \frac{1}{r^2} - \frac{r}{(4d^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} \right). \quad (4.19)$$

Vyjádříme-li  $r$  jako díl  $d$

$$r = \xi d, \quad (4.20)$$

pak pro relativní odchylku momentu se započítáním vlivu vzdálené koule od momentu bez tohoto vlivu dostaneme

$$\delta M = \frac{M - M_0}{M_0} = -\frac{\xi^3}{(4 + \xi^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (4.21)$$

Je-li  $r = d$ , pak

$$\delta M = -\frac{1}{(4 + 1)^{\frac{3}{2}}} \approx -9\%. \quad (4.22)$$

**Vlastnosti závěsu** Klíčovým prvkem Cavendishových vah je vlákno závěsu. Tuhost vlákna v krutu (direkční moment  $D$ ) musí být pro dosažení potřebné citlivosti co nejmenší.

Direkční moment  $D$  závěsu v podobě vlákna kruhového průřezu o poloměru  $\sigma$  a délce  $l$  z materiálu s modulem pružnosti v torzi  $G$  je roven (viz úloha č. 5 Měření modulu pružnosti)

$$D = \frac{G\pi\sigma^4}{2l}. \quad (4.23)$$

Závěs však obecně nemusí být z vlákna kruhového průřezu. Např. u aparatury v této úloze má formu úzkého pásku a jeho direkční moment je určen jiným vztahem.

Nosnost vlákna je uměrná průřezu. Konstanta úměrnosti  $f$  je mezní napětí v tahu s určitou technickou rezervou. Minimální poloměr  $\sigma$  je pro dvojici kuliček o hmotnosti  $2m$  dán vztahem

$$\pi \sigma^2 f = 2 m g, \quad \sigma = \sqrt{\frac{2 m g}{\pi f}} \quad (4.24)$$

Dosazením do (4.23) dostaneme

$$D = \frac{G \pi \left(\frac{2 m g}{\pi f}\right)^2}{2 l} = \frac{2 m^2 g^2}{\pi l} \left(\frac{G}{f^2}\right) \quad (4.25)$$

Velikost momentu gravitační síly je dána vztahem (4.19). Pro účely následující úvahy zjednodušíme výraz na

$$M_{\text{grav}} = 2 \kappa d \frac{(M m)}{r^2} \quad (4.26)$$

Velikost výchylky  $\varphi$  torzního závěsu bude podle (4.11) rovna

$$\varphi = \frac{M_{\text{grav}}}{D} = \frac{2 \kappa d \frac{(M m)}{r^2}}{\frac{2 m^2 g^2}{\pi l} \left(\frac{G}{f^2}\right)} = \kappa \pi \frac{d l}{g^2 r^2} \left(\frac{M}{m}\right) \left(\frac{f^2}{G}\right) \quad (4.27)$$

Moment setrvačnosti dvojice závaží (4.12) zjednodušíme na

$$J = 2 m d^2. \quad (4.28)$$

A vyjádříme periodu netlumených kmitů

$$T = 2 \pi \sqrt{\frac{J}{D}} = 2 \pi \sqrt{\frac{2 m d^2}{\frac{2 m^2 g^2}{\pi l} \left(\frac{G}{f^2}\right)}} = 2 \pi \frac{d}{g} \sqrt{\left(\frac{f^2}{G}\right) \frac{\pi l}{m}}. \quad (4.29)$$

Cílem konstruktéra je maximalizovat výraz (4.27) s tím, že perioda vlastních kmitů by měla být co nejnižší, aby bylo časově schůdné nalézt z průběhu výchylky posunutí rovnovážné polohy (elementárně např. metodou tří kyvů), viz výraz (4.29).

Jak je vidět, pokud je s hmotností vahadélka upravován průřez vlákna tak, aby bylo vždy namáháno stejným napětím (platnost vztahu (4.24) pro pevně zvolené  $f$ ), citlivost je *nepřímo* úměrná hmotnosti kuliček vahadélka. Perioda vlastních kmitů je *nepřímo* úměrná její druhé odmocnině. Snižování hmotnosti pohyblivé části má své meze dané výrobními možnostmi tažení velmi tenkých vláken.

Zvětšováním vzdálenosti  $d$  kuliček vahadélka zvyšujeme citlivost lineárně, ale stejně roste i perioda vlastních kmitů. Optimální je maximalizovat parametr  $\frac{f^2}{G}$ , kde větší váhu má praktická mez pevnosti v tahu, než Youngův modul pružnosti ve smyku.

Citlivost roste lineárně také s délkou závěsu  $l$ , perioda jen s její druhou odmocninou, což je výhodné, ale i prodlužování délky závěsu má své limity, které nejsou už tak zřejmé a jsou z části technické povahy.

Pokud jde o závislost citlivosti na hmotnosti vnějších koulí, dokud nedojde ke vzájemné fyzické kolizi interagujících koulí, citlivost roste úměrně jejich hmotnosti. Pokud je nutno vzdalovat polohu středu velkých koulí od malých, je třeba vzít v úvahu, že působí na obě z dvojice kuliček na vahadélku. Z geometrického názoru je zřejmé, že momenty těchto sil jsou orientovány proti sobě a pro střed vnější koule v nekonečnu se vzájemně kompenzují bez ohledu na velikost sil.

### 4.2.3 Popis aparatury

- Aparatura sestává z dvojice wolframových kuliček o poloměru  $\rho = 8,19 \text{ mm}$  a hmotnosti  $m = (38,3 \pm 0,2) \text{ g}$ , ukotvených na vahadélku zanedbatelné hmotnosti ve vzdálenosti  $2d = 100 \text{ mm}$ .
- Vahadélko je zavěšeno na pásku z beryliové bronzi délky  $l = 260 \text{ mm}$  a průřezu  $2,55 \cdot 10^{-3} \text{ mm}^2$  ( $0,017 \times 0,150 \text{ mm}$ ).
- Vnější wolframové koule o poloměru  $27,6 \text{ mm}$  a hmotnostech  $M = 1,5 \text{ kg}$  jsou umístěny otočně tak, že minimální vzdálenost jejich středů od těžiště malých koulí je  $r = 46,5 \text{ mm}$ . To odpovídá poloze, ve které se velké koule právě dotýkají stěny komory vahadélka.
- Vahadélko je pevně spojeno se zrcátkem, odrážející laserový paprsek. Jeho světelná stopa na stěně poskytuje informaci o úhlové výchylce vahadélka. Stěna s laserovou stopou je snímána IP kamerou se záznamem. Pro automatické nalezení stopy ve snímcích je připraven program *Cavendish.exe*.
- Soustava vahadélka, dvojice malých koulí a zrcátka je umístěna v zakrytované komoře (viz obr. 4.3).

### 4.2.4 Hlavní zásady

- Torzní Cavendishovy váhy jsou extrémně citlivé zařízení a vyžadují velmi jemné zacházení. Klíčovým prvkem je závěs z beryliové bronzi, který nese vahadlo s wolframovými kuličkami o celkové hmotnosti  $76,6 \text{ g}$ , toto zatížení vytváří v závěsu napětí v tahu přibližně  $300 \text{ MPa}$ . Mez pevnosti beryliové bronzi dosahuje až  $1300 \text{ MPa}$ , takže statická rezerva je dostatečná. To však neplatí pro dynamické namáhání, protože systém je velmi tuhý a tedy schopnost závěsu absorbovat energii je velmi malá. **I slabý náraz může vést k destrukci závěsu!**
- Vlastní frekvence torzních kmitů s relativně slabým tlumením je cca 8 minut. Je tedy třeba se vyvarovat takové manipulace, která kmity budí. **Jakákoliv jiná manipulace s vahami s výjimkou přesunutí velkých wolframových koulí je zakázána!** Aparatura je již seřízena podle manuálu k aparatuře.

### 4.2.5 Postup měření

1. Na počítači spusťte prohlížeč Chrome a otevřete [www stránku webcamfp1.physics.muni.cz](http://www.webcamfp1.physics.muni.cz). Po přihlášení (jméno a heslo naleznete v praktiku), můžete nastavit zvětšení, obraz zaostřit, případně změnit další nastavení kamery, kupř. jas



→



→

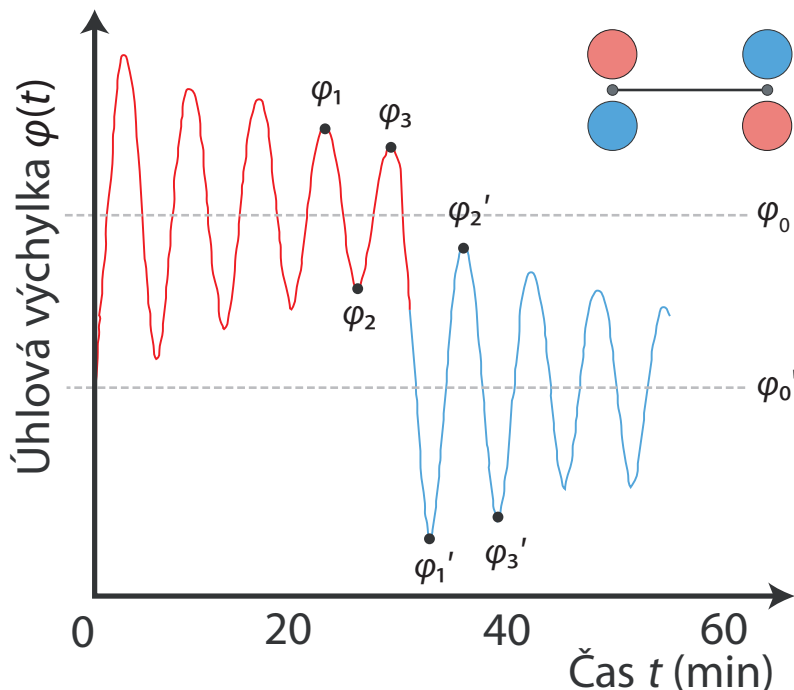
Nastavení kamery → Brightness)

aby byla stopa dostatečně kontrastní. Na PC spusťte VLC Media Player. V záložce Média zvolte otevřít síťový proud a zvolte z možností

`rtsp://jmeno:heslo@webcamfp1.physics.muni.cz/h264.`

Objeví se okno s obrazem z kamery a na disk se každých 10 s uloží nový obrázek. Číslo souboru znamená pořadí uloženého snímku, snímací frekvence je  $30 \text{ Hz}$ . Snímky naleznete na počítači ve složce Dokumenty-Kamera. Před měřením staré snímky vymažte. (Aby VLC ukládal obrázky do složky, musí být zapnutý tzv. scene filter v Nástroje-Nastavení-Vše-Filtry. Formát jpg, ratio 300.)

2. Velmi opatrně nastavte otočný držák velkých koulí do jedné krajní polohy, která je určena dotykem wolframové koule se stěnou komory vahadla. Dávejte pozor, aby koule při manipulaci nenarazily do komory vahadélka. Sledujete laserovou stopu ukazatele na stupnici, jeho hodnotu přepočítejte na úhlovou výchylku vahadélka. Zaznamenejte tři po sobě jdoucí krajní polohy  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  (viz obr. 4.5). Polohu světelné stopy odečítejte automaticky v programu



Obrázek 4.5: Ke stanovení rovnovážné polohy metodou tří kyvů.  $\varphi_0 = [(\varphi_1 + \varphi_3)/2 + \varphi_2]/2$ ,  $\varphi_0' = [(\varphi_1' + \varphi_3')/2 + \varphi_2']$ .

*Cavendish.exe*. Krajiní souřadnice oblasti pixelů, ve kterých má program bod vyhledávat, odečtete nejprve v programu IrfanView. Z naměřených hodnot určete metodou tří kyvů (viz příloha 4.B), případně fitem rovnovážnou polohu na stínítku  $\varphi_0$  pro jednu pozici vnějších koulí.

3. Přemístěte otočný držák do druhé symetrické polohy. Pro zmenšení vybuzené amplitudy rozložte přesun velkých koulí do dvou fází. Napřed natočte držák do polohy středové a teprve po kulminaci ukazatele v krajní poloze ve směru nové rovnovážné polohy dokončete přemístění koulí. Kamerou opět sledujte stopu ukazatele a zaznamenejte tři po sobě jdoucí krajní polohy. Stejným způsobem jako v předchozím bodě určete druhou rovnovážnou polohu  $\varphi_0'$  pro opačnou pozici vnějších koulí.
4. Změřte vlastní frekvenci torzních kmitů a ze vztahu (4.17) pomocí (4.12) určete směrný moment  $D$ .
5. Ze vztahu  $\varphi_0 - \varphi_0' = 2 \frac{M_{\text{grav}}}{D}$  určete moment gravitačních sil  $M_{\text{grav}}$  a ze vztahu (4.19) určete gravitační konstantu  $\kappa$ .
6. Po skončení měření zavřete VLC Media Player a vymažte snímky ze složky Kamera.

## Úkoly

1. Změřte tíhové zrychlení reverzním kyvadlem. Proměřte závislost  $T_1(y)$  a  $T_2(y)$  aspoň pro pět poloh závaží, sestrojte v programu *QtiPlot* graf a najděte polohu  $y_0$ . V jejím okolí změřte periodu kmitů podrobněji tak, abyste upřesnili průsečík křivek  $T_1(y)$  a  $T_2(y)$ . Změřte redukovanou délku kyvadla a stanovte hodnotu tíhového zrychlení včetně nejistoty. Porovnejte výsledek s místní hodnotou.
2. Změřte gravitační konstantu Cavendishovými torzními vahami.

## 4.A Stanovení direkčního momentu tlumeného torzního oscilátoru

Mějme torzní oscilátor v podobě dvou kuliček na vahadélku zavěšených na vlákně. Vzdálenost středů kuliček je  $2d$ . Vahadélko na závěsu vykonává tlumené torzní kmity popsané diferenciální rovnicí

$$J\ddot{\varphi} + \gamma\dot{\varphi} + D\varphi = 0, \quad (4.30)$$

jejím řešením je

$$\varphi(t) = \varphi_m e^{-\beta t} \sin(\omega t + \psi) + \varphi_0, \quad (4.31)$$

kde

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{D}{J}}, \quad \beta = \frac{\gamma}{2J}, \quad (4.32)$$

$\varphi_m$  je amplituda a  $\varphi_0$  rovnovážná poloha. Z periody těchto kmitů

$$T = 2\pi \frac{1}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = 2\pi \frac{1}{\sqrt{\frac{D}{J} - \beta^2}} \quad (4.33)$$

lze určit direkční moment

$$D = J \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 \left[ 1 + \left( \frac{\beta}{\omega} \right)^2 \right]. \quad (4.34)$$

Zanedbáním druhého členu v rovnici (4.34) se dopustíme relativní chyby

$$\frac{\delta D}{D} \approx \left( \frac{\beta}{\omega} \right)^2. \quad (4.35)$$

### Určení koeficientu tlumení $\beta$ z tlumených kmitů

Tlumené harmonické kmity jsou popsány vztahem (4.31). Poměr amplitud po  $n$  periodách je

$$\frac{\varphi(t)}{\varphi(t+nT)} = \frac{\varphi_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \psi)}{\varphi_0 e^{-\beta(t+nT)} \sin(\omega(t+nT) + \psi)} = e^{\beta n T}. \quad (4.36)$$

Odtud pro  $\beta$  plyne

$$\beta = \frac{1}{nT} \ln \left( \frac{\varphi(t)}{\varphi(t+nT)} \right). \quad (4.37)$$

Pokud například poklesne amplituda za 1 hodinu na  $\frac{1}{2}$ , je  $\beta \approx 1,9 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ . Je-li perioda kmitů 8 min, pak podle vztahu (4.35) je relativní chyba  $\frac{\delta D}{D} \approx 2 \cdot 10^{-4}$ .

## 4.B Určení rovnovážné polohy metodou tří kyvů

V některých případech, např. u slabě tlumeného harmonického oscilátoru, je nepraktické čekat na utlumení kmitů a je zapotřebí určit neznámou rovnovážnou polohu během kmitání oscilátoru. K tomu slouží metoda tří kyvů. Vyjdeme z rovnice (4.31). Pro vhodně zvolený počátek fáze a měření času platí pro tři po sobě následující krajní polohy

$$\varphi_1 = \varphi(0) = \varphi_m + \varphi_0, \quad \varphi_2 = \varphi\left(\frac{T}{2}\right) = -\varphi_m e^{-\beta \frac{T}{2}} + \varphi_0, \quad \varphi_3 = \varphi(T) = \varphi_m e^{-\beta T} + \varphi_0, \quad (4.38)$$

kde  $\varphi_m$  je amplituda,  $\varphi_0$  rovnovážná poloha. Označme

$$\alpha = e^{-\beta \frac{T}{2}}, \quad \text{tj. } \alpha^2 = e^{-\beta T} \quad (4.39)$$

a rovnice (4.38) přepíšeme s pomocí (4.39) na

$$\varphi_1 = \varphi_m + \varphi_0 \quad (4.40)$$

$$\varphi_2 = -\varphi_m \alpha + \varphi_0 \quad (4.41)$$

$$\varphi_3 = \varphi_m \alpha^2 + \varphi_0. \quad (4.42)$$

Od rovnice (4.40) odečteme rovnici (4.41) a od rovnice (4.42) znovu rovnici (4.41)

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \varphi_m(1 + \alpha) \quad (4.43)$$

$$\varphi_3 - \varphi_2 = \varphi_m \alpha(1 + \alpha). \quad (4.44)$$

Rovnici (4.44) podělíme rovnicí (4.43)

$$\alpha = \frac{\varphi_3 - \varphi_2}{\varphi_1 - \varphi_2}. \quad (4.45)$$

Rovnice (4.40) vynásobme  $\alpha$  a sečteme s rovnicí (4.41)

$$\varphi_1 \alpha + \varphi_2 = \varphi_0(1 + \alpha). \quad (4.46)$$

Vyjádríme  $\varphi_0$  a dosadíme za  $\alpha$  z (4.45)

$$\varphi_0 = \frac{\varphi_1 \varphi_3 - \varphi_2^2}{\varphi_1 + \varphi_3 - 2\varphi_2}. \quad (4.47)$$

Pokud je  $\beta T$  malé číslo, můžeme přibližně psát

$$\alpha = e^{-\beta \frac{T}{2}} \approx 1 - \beta \frac{T}{2}, \quad \alpha^2 = e^{-\beta T} \approx 1 - \beta T. \quad (4.48)$$

Potom rovnice (4.40) a (4.41) a (4.42) mají tvar

$$\varphi_1 = \varphi_m + \varphi_0 \quad (4.49)$$

$$\varphi_2 = -\varphi_m \left(1 + \beta \frac{T}{2}\right) + \varphi_0 \quad (4.50)$$

$$\varphi_3 = \varphi_m(1 + \beta T) + \varphi_0. \quad (4.51)$$

Sečteme rovnici (4.49) s rovnicí (4.51) a vyjádříme  $\varphi_0$

$$\varphi_0 = \frac{\varphi_1 + \varphi_3}{2} - \varphi_m \left(1 + \beta \frac{T}{2}\right). \quad (4.52)$$

Dosadíme-li za  $\varphi_m(1 + \beta \frac{T}{2})$  z (4.50)

$$\varphi_0 = \frac{\varphi_1 + \varphi_3}{2} + \varphi_2 - \varphi_0, \quad (4.53)$$

pro neznámou rovnovážnou polohu  $\varphi_0$  dostaneme zjednodušený vztah

$$\varphi_0 \approx \frac{1}{2} \left( \frac{\varphi_1 + \varphi_3}{2} + \varphi_2 \right). \quad (4.54)$$

Změříme-li tedy souřadnice tří po sobě následujících kyvů (například úhlovou výchylku nebo polohu ukazatele na stínítku), dostaneme pomocí vztahu (4.47), případně (4.54) (za předpokladu, že se jedná o slabě tlumený harmonický pohyb), souřadnici rovnovážné polohy oscilátoru.

## 4.C Vliv momentu gravitačních sil na vlastní frekvenci torzního oscilátoru

Předpokládejme pro přehlednost, že moment gravitačních sil je dán pouze interakcí velké koule s bližší kuličkou. Dále předpokládejme, že vzdálenost  $r_0$  malé kuličky od velké odpovídá rovnovážné poloze mezi momentem nakrouceného vlákna a momentem gravitačních sil

$$M_{\text{grav}}(r_0) - D\varphi_0 = 0. \quad (4.55)$$

Pokud vahadélko osciluje malými kmity, platí pro vzdálenost malé kuličky od velké

$$r = r_0 + \delta r, \quad (4.56)$$

$$\delta r = -\delta\varphi d, \quad (4.57)$$

$d$  je vzdálenost středu kuličky od osy torzních kmitů,  $\delta\varphi$  je výchylka malých torzních kmitů v úhlové míře. Zvětší-li se úhlová výchylka, kuličky se k sobě přiblíží,  $\delta r$  je tedy záporné.

Moment gravitačních sil je pak

$$M_{\text{grav}}(r_0 + \delta r) = \kappa d \frac{Mm}{(r_0 + \delta r)^2}. \quad (4.58)$$

Omezíme-li se v Taylorově rozvoji na lineární člen, dostaneme

$$M_{\text{grav}}(r_0 + \delta r) \approx \kappa d \frac{Mm}{(r_0)^2} - 2\kappa d \frac{Mm}{(r_0)^2} \frac{\delta r}{r_0}, \quad (4.59)$$

$$M_{\text{grav}}(r_0 + \delta r) \approx M_{\text{grav}}(r_0) - M_{\text{grav}}(r_0) \frac{2\delta r}{r_0}. \quad (4.60)$$

Dosazením za  $\delta r$  z (4.57)

$$M_{\text{grav}}(r_0 + \delta r) \approx M_{\text{grav}}(r_0) + M_{\text{grav}}(r_0) \frac{2d\delta\varphi}{r_0}. \quad (4.61)$$

Nachází-li se vahadélko v blízkosti gravitující koule, je třeba diferenciální rovnici pro tlumené kmity (4.30) upravit. Malé kmity vahadélka vztáhneme k rovnovážné poloze v gravitačním poli koule podle rovnice (4.55)

$$\varphi = \varphi_0 + \delta\varphi. \quad (4.62)$$

Dále doplníme mmoment gravitačních sil podle (4.61)

$$J \frac{d^2(\varphi_0 + \delta\varphi)}{dt^2} + \gamma \frac{d(\varphi_0 + \delta\varphi)}{dt} + D(\delta\varphi + \varphi_0) = M_{\text{grav}}(r_0) + M_{\text{grav}}(r_0) \frac{2\delta\varphi d}{r_0}. \quad (4.63)$$

Po úpravě

$$J\delta\ddot{\varphi} + \gamma\delta\dot{\varphi} + D\delta\varphi = -D\varphi_0 + M_{\text{grav}}(r_0) + M_{\text{grav}}(r_0) \frac{2\delta\varphi d}{r_0}. \quad (4.64)$$

Upravíme za použití (4.55) a dostaneme rovnici pro tlumené harmonické kmity oscilátoru

$$J\delta\ddot{\varphi} + \gamma\delta\dot{\varphi} + \left( D - M_{\text{grav}}(r_0) \frac{2d}{r_0} \right) \delta\varphi = 0. \quad (4.65)$$

Konstantní moment vypadl v souladu s tím, že Taylorův rozvoj byl proveden kolem bodu rovnováhy mezi momentem gravitační síly a vratným momentem vlákna. Je vidět, že efektivní hodnota směrového momentu  $D^*$  je menší

$$D^* = D - M_{\text{grav}}(r_0) \frac{2d}{r_0}. \quad (4.66)$$



Dynamická metoda měření direkčního momentu vlákna je tedy pro případ, že se vahadélko nachází pod výraznějším vlivem vnějších koulí, zatížena systematickou chybou. Její relativní hodnota je

$$\frac{\delta D}{D} = \frac{M_{\text{grav}}(r_0)}{D} \frac{2d}{r_0}. \quad (4.67)$$

Dosadíme-li za  $\frac{M_{\text{grav}}(r_0)}{D}$  z rovnice (4.55), dostaneme

$$\frac{\delta D}{D} = \frac{2d}{r_0} \varphi_0. \quad (4.68)$$

Explicitně jsme uvažovali jen jednu vnější kouli, ale výsledek platí i pro dvojici vnějších koulí. Při výpočtu jsme zanedbali efekt interakce se vzdálenější koulí a předpokládali jsme, že spojnice malé a velké kuličky je kolmá na vahadélko. Systematická relativní chyba určení direkčního momentu vlákna dynamickou metodou v důsledku gravitační interakce s blízkou koulí je úměrná vychýlení rovnovážné polohy v obloukové míře v důsledku této interakce. Z geometrických poměrů vyplývá, že konstanta úměrnosti  $2d/r_0$  je velmi přibližně rovna 2.

Tuto chybu je možné částečně korigovat. S využitím (4.55) upravíme rovnici (4.66)

$$D = D^* + M_{\text{grav}}(r_0) \frac{2d}{r_0} = D^* + D \varphi_0 \frac{2d}{r_0} \approx D^* + D^* \varphi_0 \frac{2d}{r_0} = D^* \left(1 + \varphi_0 \frac{2d}{r_0}\right). \quad (4.69)$$

Vzhledem k tomu, že ve vztahu pro gravitační konstantu  $\kappa$  vystupuje direkční moment lineárně, přenáší se tato relativní chyba i do relativní chyby určení gravitační konstanty.

**Závěr.** Přes možnost částečně početně korigovat vliv gravitujících koulí je samozřejmě správnější, pokud to časové možnosti experimentu dovolí, nespojovat měření direkčního momentu závěsu s měřením posuvu rovnovážné polohy, ale povést ho v uspořádání bez gravitujících koulí.

## 4.D Odvození vztahu pro redukovanou délku a pro periodu fyzického kyvadla

Vyšetřeme nyní závislost periody fyzického kyvadla na vzdálenosti  $x$  osy otáčení od osy procházející těžištěm. Moment setrvačnosti vůči ose procházející těžištěm označme  $J_0$ . Pro periodu v aproximaci nulových kmitů dostaneme

$$T(x) = 2\pi \sqrt{\frac{J_0 + mx^2}{mgx}}. \quad (4.70)$$

Pro znázornění závislosti periody na vzdálenosti osy vůči těžišti je výhodné zavést bezrozměrné parametry

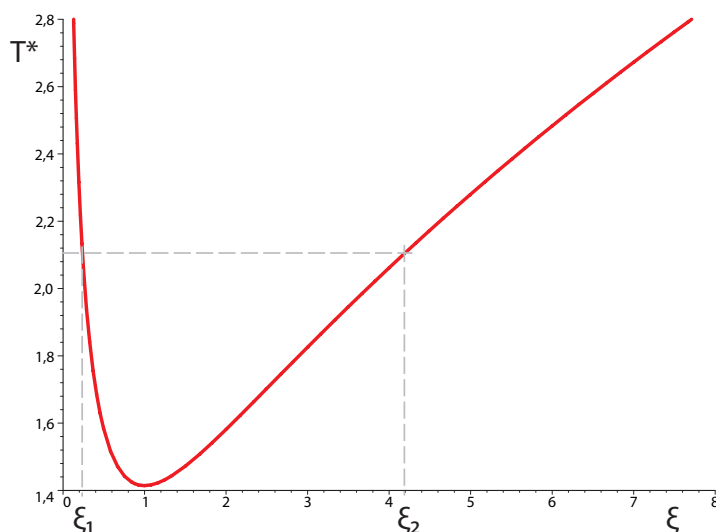
$$a_0^2 = \frac{J_0}{m}, \quad \xi = \frac{x}{a_0}, \quad T^* = \frac{T}{2\pi \sqrt{\frac{a_0}{g}}}. \quad (4.71)$$

Pro bezrozměrnou periodu  $T^*$  potom dostaneme jednoduchou funkci

$$T^* = \sqrt{\frac{1 + \xi^2}{\xi}}, \quad (4.72)$$

jejíž průběh je vykreslen na obrázku 4.6. Z uvedeného vztahu a grafu je zřejmé, že perioda má minimum pro bezrozměrný parametr  $\xi = 1$ . Pro tuto hodnotu parametru je moment setrvačnosti těžiště vůči ose otáčení roven momentu setrvačnosti  $J_0$  kyvadla vzhledem k ose procházející těžištěm. Dále je zřejmé, že pro každou delší periodu existují dvě různé vzdálenosti  $\xi_1, \xi_2$  os otáčení, které jsou řešením kvadratické rovnice

$$T^{*2} = \frac{1 + \xi^2}{\xi}, \text{ tedy } \xi^2 - T^{*2}\xi + 1 = 0 \quad (4.73)$$



Obrázek 4.6: Bezrozměrná perioda kyvadla jako funkce bezrozměrné vzdálenosti osy otáčení od těžiště.

$$\xi_1 = \frac{T^{*2}}{2} + \sqrt{\frac{T^{*4}}{4} - 1}, \quad \xi_2 = \frac{T^{*2}}{2} - \sqrt{\frac{T^{*4}}{4} - 1}. \quad (4.74)$$

Sečteme-li obě řešení, dostaneme bezrozměrnou tzv. redukovanou délku kyvadla, která je přímo rovna kvadrátu bezrozměrné periody

$$\xi_1 + \xi_2 = 2 \frac{T^{*2}}{2} = T^{*2}. \quad (4.75)$$

Dosadíme-li za bezrozměrnou periodu, dostaneme po úpravě

$$\xi_1 + \xi_2 = T^{*2} = \frac{T^2}{(2\pi)^2 \frac{a_0}{g}}, \quad T^2 = (2\pi)^2 \frac{(\xi_1 + \xi_2)a_0}{g} = (2\pi)^2 \frac{(x_1 + x_2)}{g} \quad (4.76)$$

Označíme-li redukovanou délkou  $l = x_1 + x_2$ , obdržíme pro periodu

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (4.77)$$

formálně shodný vztah (4.77) se vztahem pro matematické kyvadlo, kde už nevystupují obtížně zjištěitelné veličiny jako  $J$  a  $x$ . Tento vztah je tedy vhodný pro určení tíhového zrychlení.

## 4.E Profesionální měření gravitační konstanty

Metoda Cavendishových vah se s užitím různých vylepšení a modifikací pro měření gravitační konstanty stále používá a měření gravitační konstanty je i v dnešní době otevřená a aktuální téma. V posledních letech bylo totiž provedeno několik nezávislých experimentů pro zjištění gravitační konstanty s vysokou přesností za užití různých měřicích technik. Překvapivě ne všechna tato měření se mezi sebou shodují.

Přehled těchto měření lze nalézt na stránce [1]. V roce 2000 např. publikovali Gundlach a Merkowitz [2] výsledky měření založeného na vylepšené Cavendishově metodě s výsledkem  $\kappa = 6,674\,215 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$  se standardní relativní nejistotou  $1,4 \cdot 10^{-5}$ . Tato hodnota byla v dobré shodě s dalším měřením publikovaným v roce 2006 Schlammingerem a kolektivem [3], které bylo založeno na jiném měřicím postupu. V roce 2009 publikoval Luo a kolektiv [4] měření gravitační

konstanty založené na zjištění doby kmitů torzního kyvadla pro různé vzdálenosti budících hmot s výsledkem  $\kappa = 6,673\,49 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$  a standardní relativní nejistotou  $2,6 \cdot 10^{-5}$ . Toto měření se přes veškeré úsilí o nalezení systematických chyb neshoduje s měřením Gundlacha a Merkwitze. Další měření publikované v roce 2010 Fallerem a Parksem [5] dává dokonce ještě nižší hodnotu konstanty  $\kappa = 6,672\,34 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$  se standardní relativní nejistotou  $2,1 \cdot 10^{-5}$ . Jejich metoda je založena na interferometrickém měření výchylky kyvadel vystavených gravitačnímu působení zdrojové hmoty a jejich výsledek se neshoduje ani s Gundlachem a Merkwitzem ani s Luem.

Rozdíly jednotlivých výsledků jsou patrně způsobeny systematickými chybami, které se objevily v důsledku nezapočtení některých ne zcela očividných vlivů. Nalezení těchto vlivů je otevřeným problémem.

Hodnota gravitační konstanty uvedená v návodu k praktiku, tj.  $\kappa = 6,673\,84(80) \cdot 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$  se standardní relativní nejistotou  $1,2 \cdot 10^{-4}$ , je hodnota publikovaná v CODATA 2010. Tato hodnota již zohledňuje některá výše uvedená měření. (Pro zajímavost hodnota publikovaná v CODATA 2006 je  $\kappa = 6,674\,28 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$  se standardní relativní nejistotou  $10^{-4}$ .)

## Literatura

1. <http://scienceblogs.com/principles/2010/08/measuring-gravity-aint-nothin.php>
2. J. H. Gundlach and S. M. Merkowitz, „Measurement of Newton’s Constant Using a Torsion Balance with Angular Acceleration Feedback,“ *Phys. Rev. Lett.*, vol. 85, pp. 2869-2872 (2000)
3. St. Schlamminger, E. Holzschuh, W. Kündig, F. Nolting, R. E. Pixley, J. Schurr, U. Straumann, „Measurement of Newton’s gravitational constant,“ *Phys. Rev. D*, vol. 74, 082001 (2006)
4. J. Luo, Q. Liu, L. Tu, C. Shao, L. Liu, S. Yang, Q. Li, Y. Zhang, „Determination of the Newtonian Gravitational Constant G with Time-of-Swing Method,“ *Phys. Rev. Lett.*, vol. 102, 240801 (2009)
5. H. V. Parks, J. E. Faller, „A Simple Pendulum Determination of the Gravitational Constant,“ *Phys. Rev. Lett.*, vol. 105, 110801 (2010), <http://xxx.lanl.gov/abs/1008.3203>
6. J. Brož, V. Roskovec, M. Valouch: *Fyzikální a mat. tabulky*, SNTL, Praha, 1980

## Úloha 5

# Měření modulu pružnosti pevných látek

### 5.1 Teoretický úvod

#### Deformace v tahu

Normálové napětí je definováno vztahem

$$\sigma_n = \frac{dF_n}{dS},$$

kde  $dF_n$  je velikost průmětu síly působící na zvolenou (elementární) plošku  $dS$  do normály k plošce. Pro sílu rovnoměrně rozloženou na (makroskopickou) plochu  $S$  pak platí

$$\sigma_n = \frac{F_n}{S}. \quad (5.1)$$

Relativní prodloužení  $\varepsilon$  je určeno podílem změny délky zvoleného elementu pevné látky k jeho délce

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}. \quad (5.2)$$

Není-li síla příliš velká, je deformace elastická (pružná) a pomine-li silové namáhání, obnoví se původní rozměry tělesa. Za těchto podmínek platí Hookův zákon – vztah lineární závislosti mezi normálovým napětím  $\sigma_n$  a poměrným prodloužením  $\varepsilon$

$$\sigma_n = \varepsilon \cdot E, \quad (5.3)$$

kde  $E$  je modul pružnosti v tahu (Youngův modul). Je to materiálová konstanta, která určuje schopnost látky odolávat deformaci při působení vnější síly. Čím je tato konstanta větší, tím méně se těleso pod vlivem působících sil deformuje.

#### Deformace ve smyku

K deformaci ve smyku dochází při působení *tečné* síly, jednotlivé vrstvy materiálu se vůči sobě posouvají (viz obrázek 5.1).

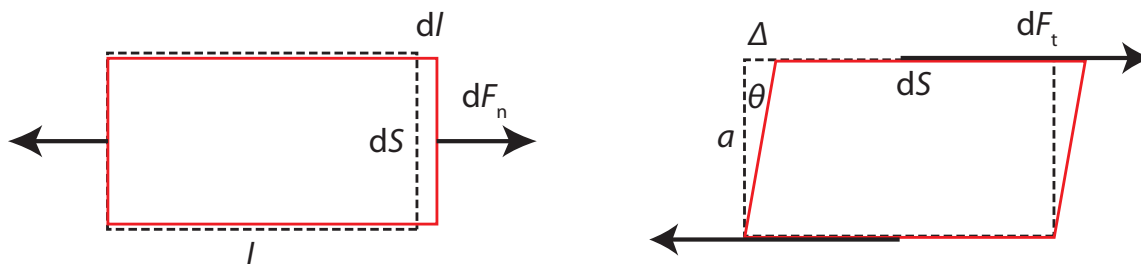
Smykové tečné napětí je definováno vztahem

$$\sigma_t = \frac{dF_t}{dS},$$

kde  $dF_t$  je velikost průmětu síly působící na zvolenou (elementární) plošku  $dS$  do roviny plošky.

Relativní deformace je dána vztahem

$$\gamma = \frac{\Delta}{a},$$



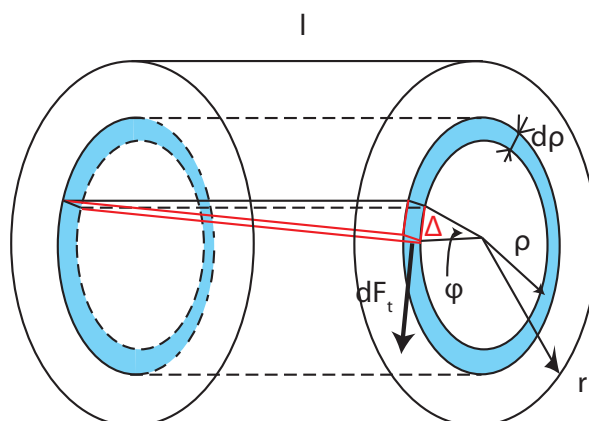
Obrázek 5.1: Deformace v tahu a deformace ve smyku

kde  $\Delta$  je posunutí okrajových částí vrstvy tloušťky  $a$  vlivem tečné síly  $dF_t$  působící na plošku  $dS$ . Hookův zákon pro deformaci ve smyku má potom tvar

$$\sigma_t = \gamma \cdot G. \quad (5.4)$$

Veličina  $G$  se nazývá modul pružnosti ve smyku.

### Deformace ve zkrutu



Obrázek 5.2: Deformace ve zkrutu

V případě kroucení (torze) vlákna kruhového průřezu má deformace ve vlákně charakter prostého smyku (viz obrázek 5.2), přitom v ose vlákna je deformace nulová a s rostoucí vzdáleností od osy vlákna  $\rho$  deformace narůstá. Zkrotíme-li vlákno na volném konci o úhel  $\varphi$ , je relativní deformace ve smyku tenkého meziválcí o rozměrech  $l \times d\rho \times 2\pi\rho$

$$\gamma = \frac{\Delta}{l} = \frac{\rho}{l} \varphi.$$

Z Hookova zákona pro deformaci ve smyku obdržíme smykové napětí

$$\sigma_t = \frac{\rho G}{l} \varphi,$$

které působí na plošku podstavy meziválcí ( $dS = 2\pi\rho d\rho$ ). Pro tečnou sílu dostaneme

$$dF_t = \sigma_t dS = \frac{2\pi\rho^2 G}{l} \varphi d\rho$$

a pro její kroučící moment vůči ose drátu

$$dM = \rho \cdot dF_t = \frac{2\pi\rho^3 G}{l} \varphi d\rho.$$

Po integraci přes celý průřez drátu pro výsledný moment dostaneme

$$M = \int_0^r \frac{2\pi\rho^3 G}{l} \varphi d\rho = \frac{\pi r^4 G}{2l} \varphi.$$

Vidíme, že moment síly  $M$  zkrucující drát je přímo úměrný úhlu zkroutení  $\varphi$ . Koeficient úměrnosti, závisející pouze na rozměrech vlákna a jeho modulu pružnosti ve smyku  $G$ ,

$$D = \frac{\pi r^4 G}{2l} \quad (5.5)$$

nazýváme direkčním momentem.

## 5.2 Měření modulu pružnosti v tahu přímou metodou z prodloužení drátu

Po dosazení definičních vztahů (5.1), (5.2) do Hookova zákona (5.3) dostaneme pro prodloužení drátu o průměru  $d$  při namáhání v tahu silou  $F$  vztah

$$\Delta l = \frac{4l}{\pi d^2 E} F. \quad (5.6)$$

Sílu  $F$  realizujeme jednoduše tíhovou silou závaží o hmotnosti  $m$ . Prodloužení tedy závisí na hmotnosti závaží vztahem

$$\Delta l = \underbrace{\frac{4gl}{\pi d^2 E}}_k m. \quad (5.7)$$

Vztah (5.7) sice umožňuje přímý výpočet modulu pružnosti  $E$  z jediného měření  $m$  a  $\Delta l$ , vypočtený modul pružnosti by však byl zatížen značnou chybou a neměli bychom jistotu, že se pohybujeme v oblasti, kde platí Hookův zákon.

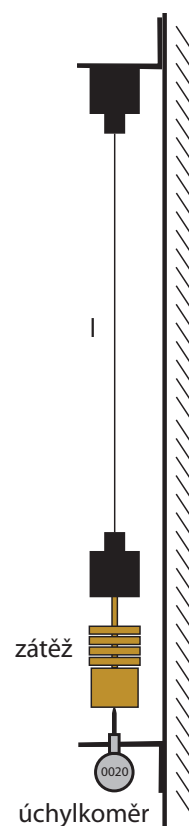
Výhodnější je stanovit modul pružnosti měřením závislosti  $\Delta l(m)$ . Modul pružnosti  $E$  pak stanovíme ze směrnice  $k$  prokladu lineární závislosti měřenými daty. Podle (5.7) je

$$k = \frac{4gl}{\pi d^2 E}. \quad (5.8)$$

Vztah (5.8) využijeme nejen ke stanovení hodnoty modulu pružnosti, ale i jeho nejistoty měření.

### Postup měření

- Stanovíme hmotnosti zatěžovacích závaží na digitálních vahách. Rozhodneme, jestli je nutné počítat s individuální hmotností každého závaží, nebo jestli vzhledem k chybám měření stačí počítat s průměrnou hmotností.
- Průměr drátu změříme v různých místech mikrometrem.
- Počáteční délka drátu byla změřena laserovým dálkoměrem a má hodnotu 1567 mm.
- Polohu dolního konce drátu měříme digitálním úchylkoměrem, jehož hrot zapadá do malé jamky na spodní straně závaží. Nejprve úchylkoměr vynulujeme ( $\Delta l = 0$ ). Postupně přidáváme jednotlivá závaží a naměřené hodnoty  $m$ ,  $\Delta l$  zapisujeme do tabulky. Hrot úchylkoměru udržujeme v jamce. Poté závaží zase postupně odebíráme.



Obrázek 5.3: Přímá metoda

<sup>1</sup>Ve skutečnosti je změna polohy dolního konce drátu  $\Delta l$  dána nejen prodloužením drátu, ale i pružnou deformací horního závěsu drátu; také tato deformace je úměrná hmotnosti zátěže a koeficient úměrnosti je 37,6 kg/mm.

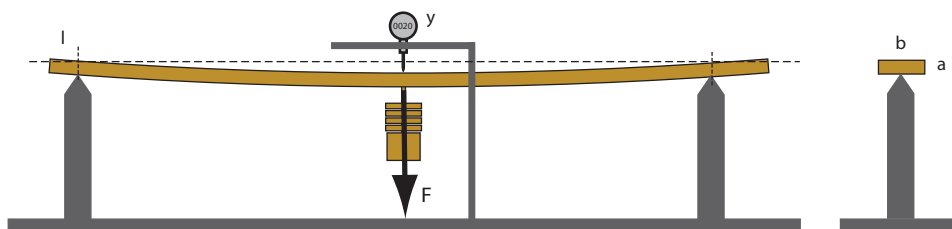
- Naměřené hodnoty vyneseme do grafu závislosti  $\Delta l(m)$ . Grafem proložíme přímkou a určíme její směrnici  $k \pm U(k)$ . Modul pružnosti drátu  $E$  pak vypočteme ze vztahu (5.8). Stanovíme nejistotu modulu pružnosti  $E$ .
- Výslednou hodnotu modulu pružnosti  $E$  porovnáme s údajem z tabulek.

### 5.3 Měření modulu pružnosti v tahu z průhybu plného obdélníkového nosníku

Uvažujme nosník, který má obdélníkový průřez; uprostřed mezi podporami, jejichž vzdálenost je  $l$ , je zatížen silou  $F$ , realizovanou tíhou závaží o hmotnosti  $m$ . Vztah mezi průhybem daného nosníku  $y$  a zatížením  $F$  je

$$y = \frac{Fl^3}{4Ea^3b}, \quad (5.9)$$

kde  $E$  je Youngův modul pružnosti,  $b$  je šířka nosníku a  $a$  tloušťka (rozměr ve směru síly  $F$ ).



Obrázek 5.4: Průhyb nosníku

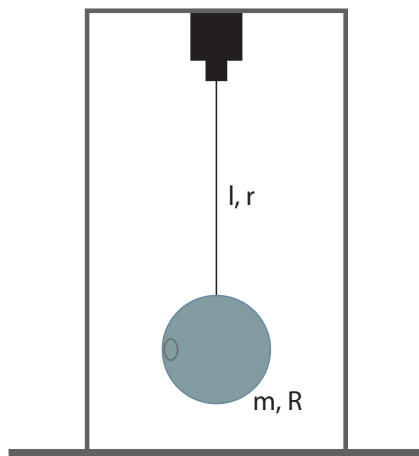
Stejně jako v předešlém případě i zde postupným zvyšováním zátěže dostaneme závislost  $y(m)$ , kterou vyhodnotíme obdobným způsobem.

#### Postup měření

- Geometrické rozměry nosníku změříme obvyklými měřidly. Vybereme si taková měřidla, aby příspěvek k celkové nejistotě od každé měřené veličiny byl přibližně stejný a měl takovou velikost, aby celková nejistota odpovídala požadované přesnosti měření.
- Nosník s navlečeným třmenem položíme na bříty stojanu. Třmen umístíme doprostřed do kontaktu s digitálním úchylkoměrem. (Pozor, musíme zajistit, aby pracovní bod digitálního úchylkoměru umožnil proměření průhybu v celém rozsahu povolených zátěží.)
- Třmen zatěžujeme postupným přidáváním závaží a odečítáme velikost prohnutí nosníku. Vážnutí mechanismu uvolňujeme velmi lehkým poklepem na stojan.
- Měříme průhyb, jak při postupném zatěžování, tak i při postupném odlehčování.
- Dvojice naměřených hodnot závislosti  $y(m)$  vyneseme do grafu a proložíme lineární závislostí. Posoudíme, zda je směrnice rozdílná při zatěžování a odlehčování. Srovnáním směrnice s teoretickou hodnotou získanou úpravou rovnice (5.9) do tvaru  $y = k \cdot m$  stanovíme Youngův modul pružnosti.

### 5.4 Měření modulu pružnosti ve smyku dynamickou metodou

Na homogenní drát délky  $l$  o poloměru  $r$  je zavěšena homogenní koule o poloměru  $R$  a hmotnosti  $m$  mnohem větší, než je hmotnost drátu (viz obr. 5.5). Když kouli pootočíme kolem svislé osy,



Obrázek 5.5: Torzní oscilátor

vykonává torzní kmity. Pokud zkroucení drátu odpovídá pružné torzní deformaci, při níž platí Hookův zákon (5.4), pak závislost úhlové výchylky  $\varphi$  na čase je popsána diferenciální rovnicí

$$\ddot{\varphi} + 2\beta\dot{\varphi} + \frac{D}{J}\varphi = 0.$$

Přitom  $\beta$  je koeficient útlumu,  $J$  je moment setrvačnosti koule,  $J = 2/5 mR^2$ ,  $D$  je direkční moment daný vztahem (5.5). Zanedbáme-li tlumení, systém kmitá harmonicky

$$\varphi(t) = \varphi_0 \sin(\omega t + \psi),$$

kde  $\varphi_0$  je amplituda kmitů,  $\psi$  počáteční fáze a  $\omega$  je úhlová frekvence daná vztahem

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{J}}.$$

Pro periodu torzních kmitů koule tak máme vztah

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{D}},$$

ze kterého lze, změříme-li periodu kmitů  $T$  a při znalosti momentu setrvačnosti oscilátoru  $J$ , stanovit direkční moment  $D$  a z (5.5) při znalosti  $r$  a  $l$  i modul pružnosti v torzi

$$G = \frac{16\pi mR^2 l}{5r^4 T^2}. \quad (5.10)$$

## Postup měření

- Geometrické rozměry drátu a koule změříme vhodnými mechanickými měřidly (výběr se řídí pravidly jako u průhybu), délku závěsu katetometrem. **Kouli nenadzvedáváme! Pokud by se utrhla, mohla by způsobit vážné zranění.**
- Hmotnost koule je vyražena na kouli.
- Kouli natočíme kolem svislé osy a uvolníme. Úhlovou výchylku koule z rovnovážné polohy je třeba omezit na úhly, které odpovídají pružné torzní deformaci. Doporučená počáteční výchylka je  $45^\circ$  až  $90^\circ$ .
- Po uvolnění koule koná torzní kmity. Opakovaně změříme dobu např. 10 kmitů, tj.  $10T$ .
- Z rovnice (5.10) stanovíme modul pružnosti v torzi  $G$ . Před výpočtem je vhodné vztah upravit tak, aby v něm vystupovaly skutečně přímo měřené veličiny.



## Úkoly

1. Změřte modul pružnosti v tahu přímou metodou pro ocelový drát zavěšený při stěně.
2. Změřte modul pružnosti v tahu z průhybu nosníku. Měření proveďte pro nosníky z oceli, z hliníkové slitiny, z mosazi a z uhlíkového kompozitu.
3. Změřte modul pružnosti ve smyku pro ocelový drát dynamickou metodou z torzních kmitů.

## Otázky

1. Digitální úchylkoměr působí na měřený objekt silou, která při zatlačování tyčinky úchylkoměru roste lineárně, přibližně o 25 mN na 1 mm. U kterého měření to může způsobit velkou chybu? Existuje nějaké jednoduché opatření, kterým můžeme vliv síly úchylkoměru výrazně omezit?
2. Je vhodnější odečítat uplynutí periody torzních kmitů v poloze maximální výchylky, nebo v rovnovážné poloze?
3. Jaká je největší přípustná amplituda torzních kmitů koule a proč?
4. Jaký je vliv součinitele útlumu  $\beta$  na periodu a v jakém poměru je chyba způsobená jeho zanedbáním k ostatním chybám měření? (Viz Úloha č. 4: Měření gravitační konstanty a tíhového zrychlení)

## 5.A Užití v praxi

Měření modulu pružnosti v tahu z průhybu plného obdélníkového nosníku je běžně využíváno ve stavebním průmyslu.

Zajímavým příkladem konkrétní aplikace je zkoušení radiálních vývrtů. Radiální vývrty se využívají pro zjištění fyzikálních, mechanických a pevnostních charakteristik dřeva – např. vzorků stavebního materiálu nebo vzorků odebraných z dřevěných konstrukcí. Pro vlastní zkoušku dřevěných radiálních vývrtů se používají čelisti s vyfrézovanými drážkami, které umožňují zatěžování kolmo na osu vývrtu a ve směru vláken dřeva. Měření modulu pružnosti je pak obdobou úlohy praktika. Jedná se o semidestruktivní analýzu; ze zkoumaného materiálu nebo konstrukce je odebrán vzorek způsobem, který nijak podstatně materiál nebo konstrukci nepoškodí.

## Úloha 6

# Tepelné vlastnosti kapalin – elektrický kalorimetr

### 6.1 Úvod

Elektrický kalorimetr je zařízení, které dovoluje měřit tepelnou kapacitu kapalin i pevných látek. Na rozdíl od kalorimetru směšovacího dovoluje jednoduše určit měrnou tepelnou kapacitu absolutně a nikoliv jen relativně vzhledem ke kapacitě nějaké jiné látky.

Elektrický kalorimetr je tepelně izolovaná nádoba s elektrickou topnou spirálou, teploměrem a míchačkou. Energie, kterou topná spirála dodá do kalorimetru, se určí jednoduše z proudu, napětí a času, po který spirála pracovala. Pokud neuvažujeme tepelné ztráty, můžeme pro energetickou výměnu mezi spirálou a kalorimetrem s náplní psát:

$$(mc + K)(t - t_p) = UI\tau \quad (6.1)$$

kde jednotlivé symboly mají standardní význam, tedy

$m$	– hmotnost náplně
$c$	– měrná tepelná kapacita náplně
$K$	– tepelná kapacita vlastního kalorimetru
$t$	– výsledná teplota
$t_p$	– počáteční teplota
$U$	– napětí
$I$	– proud
$\tau$	– čas

Reálný elektrický kalorimetr je zatížen tepelnými ztrátami, jejichž existence není v rovnici zahrnuta. V následujícím textu si ukážeme dvě metody, jak tepelné ztráty popsat.

### 6.2 Přesné analytické řešení

Lze očekávat, že tepelné ztráty budou závislé na rozdílu teploty okolí a okamžité a stále se měnící teploty kalorimetru. Abychom tento efekt dokázali zohlednit, musíme přepsat rovnici (6.1) do diferenciálního tvaru:

$$(mc + K)dt + dQ_s = UI d\tau \quad (6.2)$$

do kterého jsme doplnili tepelné ztráty kalorimetru  $dQ_s$  za infintezimálně krátký časový interval  $d\tau$ . Předpokládejme, že tepelné ztráty lze popsat tzv. Newtonovým zákonem ochlazování, podle kterého jsou tepelné ztráty (tedy energie odvedená do okolí za daný časový interval) přímo úměrné rozdílu teploty chladnoucího objektu  $t$  a teploty okolí  $t_o$ . Tedy:

$$dQ_s = \beta(t - t_o)d\tau \quad (6.3)$$

kde  $\beta$  je konstanta úměrnosti, kterou nazýváme koeficient chladnutí. Dosazením z (6.3) do (6.2) dostaneme diferenciální rovnici pro hledanou funkci  $t(\tau)$

$$(mc + K)dt + \beta(t - t_o)d\tau = UI d\tau \quad (6.4)$$

Tuto rovnici lze řešit přímou integrací po separaci proměnných

$$\int_{t_p}^t \frac{dt}{UI - \beta(t - t_o)} = \int_0^\tau \frac{d\tau}{mc + K} \quad (6.5)$$

jejíž řešením dostaneme

$$t = t_o + \frac{1}{\beta} \left\{ UI - [UI - \beta(t_p - t_o)] e^{-\frac{\beta}{mc+K}\tau} \right\} \quad (6.6)$$

Změřením časové závislosti teploty při ohřevu konstantním výkonem topné spirály lze určit hledanou tepelnou kapacitu měřené látky  $c$ , nejlépe tak, že provedeme lineární regresi logaritmované rovnice (8.36). Směrnice fitované přímky je pak rovna výrazu  $-\frac{\beta}{mc+K}$ .

Rovnice (8.36) však kromě  $c$  obsahuje ještě dvě neznámé hodnoty, kapacitu kalorimetru  $K$  a koeficient chladnutí  $\beta$ . Ty musíme určit experimentálně, např. v nezávislém experimentu.

Rovnice (8.36) se poněkud zjednoduší, začneme-li s ohříváním na teplotě okolí ( $t_p = t_o$ )

$$t = t_o + \frac{UI}{\beta} \left( 1 - e^{-\frac{\beta}{mc+K}\tau} \right) \quad (6.7)$$

V tomto případě pak snadno nahlédneme, že pro  $\tau \rightarrow 0$  (teplota je v tomto případě blízká teplotě okolí) je ze dvojice  $\beta, c$  růst určen kapacitou  $c$  a pro časy  $\tau \rightarrow \infty$  je růst teploty zastaven hodnotou  $\beta$ . Pro korektní vyhodnocení  $c$  a  $\beta$  z jediného experimentu ohřevu je tedy zapotřebí proměřit celou teplotní závislost  $t(\tau)$ .  $c$  a  $\beta$  potom stanovíme nelineární regresi.

### 6.3 Aproximativní řešení

V předchozím textu jsme si ukázali analytické „přesné“ řešení problému ohřevu kalorimetru se započtením tepelných ztrát. V tomto odstavci si popíšeme, jak získat přibližné řešení odlišnou cestou. Je zřejmé, že při znalosti přesného a nepřiliš komplikovaného řešení nemají aproximativní postupy praktický smysl. Tento odstavec je tedy třeba chápat jako modelovou ukázkou možného přístupu k řešení problému, který bychom mohli použít, pokud by přesné řešení nebylo k dispozici, nebo bylo příliš komplikované.

Při aproximativním popisu tepelných ztrát se chceme vyhnout nutnosti řešit diferenciální rovnici (v našem případě rovnice (6.4)). Tato matematická úloha bývá často hlavní překážkou při analytickém řešení fyzikálních problémů.

Ve shodě s rovnicí (6.3) vyjádříme tepelné ztráty jako

$$dQ_s = \beta(t - t_o)d\tau \quad (6.8)$$

Přitom předpokládáme, že během ohřevu roste teplota kalorimetru lineárně s časem dle vztahu

$$t = \alpha\tau + t_p, \quad \text{kde } \alpha = \frac{t_v - t_p}{\tau_m} \quad (6.9)$$

Teplota tedy roste lineárně z počáteční hodnoty  $t_p$  do výsledné  $t_v$  tak, že celková doba ohřevu je rovna  $\tau_m$ . Předpoklad lineárního nárůstu teploty je zcela jistě nesprávný a na první pohled je jeho použití nelogické. Vždyť právě díky tepelným ztrátám teplota lineárně neroste! Pokud však

jsou tepelné ztráty jen malé ve srovnání s výkonem topné spirály, skutečný časový průběh teploty se od přímky příliš neliší a jeho nahrazení lineární závislostí je jen malou chybou v malé opravě a tedy chybou druhého řádu malosti. Musíme ale mít stále na paměti, že tato aproximace je tím lepší, čím jsou tepelné ztráty méně významné a není s to dostatečně dobře popsat průběh teploty v neomezeném časovém intervalu, jak to dokazuje analytický model z předchozího odstavce.

Předpokládáme-li průběh teploty dle rovnice (6.9), můžeme celkové tepelné ztráty za dobu ohřevu  $\tau_m$  určit jako

$$Q_s = \int_0^{\tau_m} \beta (t - t_0) d\tau \quad (6.10)$$

a tedy

$$Q_s = \int_0^{\tau_m} \beta \left( \frac{t_v - t_p}{\tau_m} \tau + t_p - t_0 \right) d\tau$$

což po jednoduché integraci vede ke vztahu

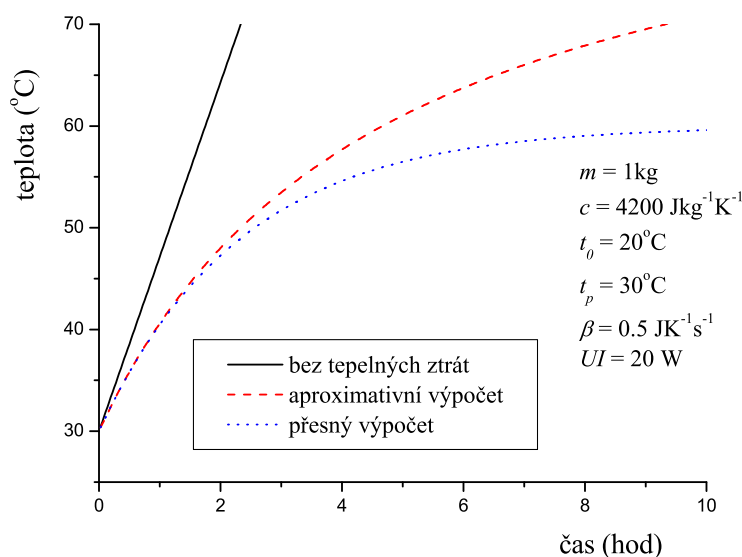
$$Q_s = \beta \tau_m \left( \frac{t_v + t_p}{2} - t_0 \right). \quad (6.11)$$

Kalorimetrická rovnice po započtení tepelných ztrát touto aproximativní metodou přechází do tvaru

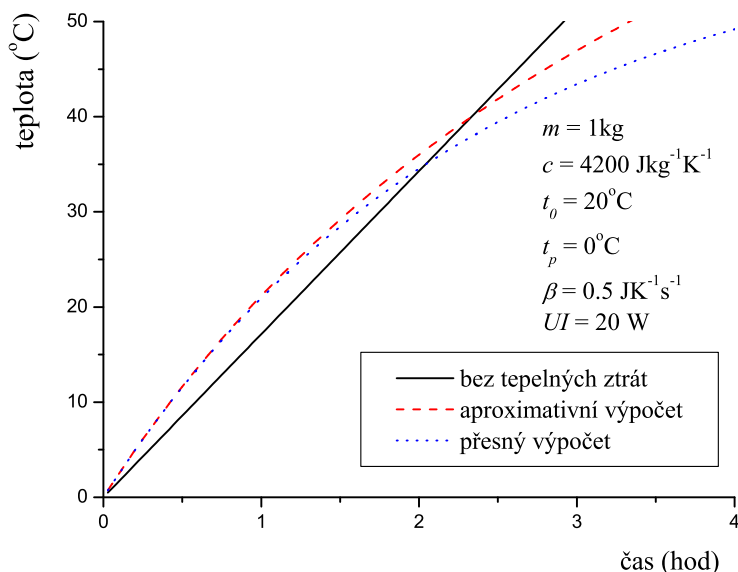
$$(mc + K)(t_v - t_p) + \beta \tau_m \left( \frac{t_v + t_p}{2} - t_0 \right) = UI\tau_m \quad (6.12)$$

odkud již lze v případě potřeby algebraicky vyjádřit časovou závislost teploty  $t(\tau)$ , pokud ztotožníme výslednou teplotu  $t_v$  se závisle proměnnou  $t$  a celkový čas  $\tau_m$  s nezávisle proměnnou  $\tau$ .

Srovnání obou způsobů výpočtu je na obr. 6.1 a 6.2. Obr. 6.1 znázorňuje situaci, kdy je počáteční teplota kalorimetru vyšší než teplota okolí, na obr. 6.2 je výsledek výpočtu pro počáteční teplotu nižší než je okolní teplota. Vidíme, že aproximativní výpočet velmi dobře vystihuje počáteční stadia ohřevu kalorimetru a pro nepříliš vysoké doby ohřevu lze rozdíl mezi oběma přístupy jen stěží odlišit.



Obrázek 6.1: Ohřev kalorimetru z počáteční teploty  $t_p = 30^\circ\text{C}$ , teplota okolí  $t_0 = 20^\circ\text{C}$



Obrázek 6.2: Ohřev kalorimetru z počáteční teploty  $t_p = 0^\circ\text{C}$ , teplota okolí  $t_0 = 20^\circ\text{C}$

## 6.4 Měření kapacity kalorimetru

Tepelnou kapacitu kalorimetru elektrického můžeme měřit stejnou metodou, jakou měříme tepelnou kapacitu kalorimetru směšovacího. Do kalorimetru naplněného měřicí kapalinou o hmotnosti  $m_1$  a teplotě  $t_1$  dolijeme stejnou kapalinu o hmotnosti  $m_2$  a teplotě  $t_2^1$ . Zpravidla bývá  $t_1 < t_2$ . Po promíslení obou kapalin a vyrovnání teploty s kalorimetrem se teplota ustálí na výsledné hodnotě  $t$ . Tepelnou výměnu mezi oběma kapalinami a kalorimetrem lze popsat rovnicí:

$$(m_1 c + K)(t - t_1) = m_2 c(t_2 - t) \quad (6.13)$$

kde  $c$  je měrné teplo použité kapaliny.

Pokud bychom chtěli měřit elektrickým kalorimetrem měrné teplo vody a současně bychom použili vodu pro stanovení tepelné kapacity kalorimetru, museli bychom předpokládat, že měrné teplo vody  $c$  v rovnici (6.13) neznáme. Pak lze rovnici (6.13) upravit do tvaru

$$c(m_1 + \kappa)(t - t_1) = m_2 c(t_2 - t), \quad (6.14)$$

nebo-li

$$(m_1 + \kappa)(t - t_1) = m_2(t_2 - t), \quad (6.15)$$

kde  $\kappa = K/c$  je tzv. redukováná kapacita kalorimetru, pro jejíž určení již měrné teplo použité kapaliny nepotřebujeme znát<sup>2</sup>. Stejným způsobem je možné upravit i rovnici (6.4)

$$c(m + \kappa)dt + \beta(t - t_p)d\tau = UI d\tau \quad (6.16)$$

a tak měření vyhodnotit „pochtivě“ jako absolutní metodu bez předběžné znalosti tabelované hodnoty  $c$ .

<sup>1</sup>Není zcela lhostejné, jaká množství  $m_1$  a  $m_2$  kapalin použijeme. Přemýšlejte o tom!

<sup>2</sup>Redukovaná kapacita kalorimetru má neobvyklou jednotku: kilogram. Dokázali byste nalézt její fyzikální význam?

## 6.5 Měření koeficientu chladnutí $\beta$ – metoda 1

Koeficient chladnutí  $\beta$  můžeme změřit tak, že necháme vyhřátý kalorimetr volně chladnout a měříme časovou závislost jeho teploty. Chladnutí kalorimetru je popsáno stejnou rovnicí, jako jeho ohřev s tím rozdílem, že výkon topné spirály je nulový, tj.  $UI = 0$ . Tak získáme vztah:

$$t = t_o + (t_p - t_o) e^{-\frac{\beta}{mc+K}\tau} \quad (6.17)$$

Z naměřené závislosti  $t(\tau)$  určíme  $\beta$  nejlépe lineární regresí logaritmované rovnice (6.17).

## 6.6 Měření koeficientu chladnutí $\beta$ – metoda 2

Pokud bychom nechali kalorimetr vyhřívat velmi dlouho, ustálila by se teplota na konstantní rovnovážné hodnotě  $t_r$ , při které tepelné ztráty právě vyrovnají výkon topné spirály. Pro tento případ z rovnice (8.36) plyne:

$$t_r = t_o + \frac{UI}{\beta} \quad (6.18)$$

odkud již jednoduše hledanou hodnotu  $\beta$  získáme. Tento postup nevyžaduje znalost měrné tepelné kapacity pracovní kapaliny, je však vhodné alespoň orientačně hodnotu  $\beta$  znát a nastavit výkon spirály tak, aby rovnovážná teplota  $t_r$  nebyla příliš vysoká (proč?).

Nevýhodou postupu, při kterém čekáme na ustálení teploty při konstantním výkonu, je jeho velká časová náročnost. Proto experiment realizujeme raději jinak: do kalorimetru dáme již ohřátou vodu (např. na  $70^\circ\text{C}$ ) a ladíme výkon zdroje tak, aby se teplota vody v kalorimetru neměnila.

Konečné hodnoty teploty a výkonu dosadíme do rovnice (6.18). Nalezení potřebného výkonu zdroje můžeme dále uspíšit metodou půlení intervalu.

## 6.7 Automatizované měření teploty

Teplotu v kalorimetru můžeme měřit ručně pomocí rtuťového nebo digitálního teploměru nebo automaticky pomocí počítače. Pro automatizované měření teploty je v úloze připraven modul NI USB 9211 a program *Kalorimetr.vi*.

Modul NI USB-9211 (viz obr. 6.3) je přístroj pro měření teploty termočláanky se zabudovanou úpravou vstupního signálu a s kompenzací studeného konce (*Cold Junction Compensation, CJC*). Modul je plně ovládán přes rozhraní USB 2.0. Má čtyři 24-bitové diferenciálně zapojované vstupní kanály s rozsahem  $\pm 80\text{ mV}$ . Každý kanál má na konektoru dvě svorky, TC+ pro kladný konec termočláanky a TC− pro záporný konec termočláanky. Společná svorka COM je vnitřně spojena s izolovanou zemí a lze ji využít pro připojení ochranného stínění. Maximální vstupní napětí kanálu vůči svorce COM je  $\pm 30\text{ V}$ !

Modul je vybaven dvěma vnitřními kanály. Kanál automatické nuly *autozero channel* je doporučeno číst pro kompenzaci offsetu (DC napětí přidávaného zesilovačem) při okolní teplotě pod  $15^\circ\text{C}$  nebo nad  $35^\circ\text{C}$ . Kanál CJC je určen pro měření teploty studeného konce interním senzorem.

Vzorkovací frekvence je max. 12 vzorků/s (pro všechny kanály dohromady) a je závislá na tom, zda jsou vždy současně čteny i interní kanály. Při čtení všech čtyř termočláankových kanálů a obou interních kompenzačních kanálů je rovna max. 2 vzorky/s.

### Problémy (student řeší jen jeden z problémů):

1. Určete koeficient chladnutí  $\beta$  kalorimetru pro dva různé stupně tepelné izolace (jednoduchá nádoba a dvojitá nádoba) oběma výše popsanými metodami. Výsledky porovnejte a komentujte.
2. Určete měrné teplo vody ryze absolutní metodou s použitím analytické „přesné“ teorie.



Obrázek 6.3: Modul NI USB 9211 pro automatizované měření teploty.

3. Určete měrné teplo vody ryze absolutní metodou s použitím aproximativní teorie.
4. Navrhněte takové uspořádání experimentu, při kterém principiálně nedojde ke zkreslení výsledku vlivem tepelných ztrát. Experiment proveďte, vyhodnoťte a porovnejte s popisem dle vztahu (6.1). Řešením tohoto úkolu se nemyslí maximální tepelná izolace nádoby kalorimetru.
5. Určete měrné teplo vody pomocí elektrického kalorimetru. Pro měření teploty máte k dispozici digitální teploměr Checktemp, pro měření proudu a napětí analogové ručkové přístroje a pro měření času obyčejné hodinky s vteřinovou ručkou. Snažte se minimalizovat náhodnou chybu výsledné hodnoty tak, že jeden měřicí přístroj vyměníte za přesnější. Zvolte který a měření proveďte. Volbu přístroje zdůvodněte. Pokud je to významné, tak při vyhodnocení použijte některou teorii zohledňující tepelné ztráty kalorimetru.
6. Navrhněte takové uspořádání experimentu, při kterém se výsledná teplota po určité době ohřevu odchýlí o  $2^\circ\text{C}$  od hodnoty předpovězené teorií nezohledňující tepelné ztráty. Experiment proveďte a porovnejte s vaší předpovědí.
7. Navrhněte takové uspořádání experimentu, při kterém se výsledná teplota po určité době ohřevu odchýlí o  $2^\circ\text{C}$  od hodnoty předpovězené aproximativní teorií tepelných ztrát. Experiment proveďte a porovnejte s vaší předpovědí.
8. Navrhněte postup, jak určit hledané parametry  $c$  a  $\beta$  současně pouze z jediného experimentu ohřevu elektrického kalorimetru (tj. bez určení koeficientu chladnutí nějakým jiným doplňkovým experimentem). Experiment proveďte a vyhodnoťte.

Pro proklad teoretické závislosti můžete použít program *QtiPlot*, pro který je připravena teoretická fitovací funkce (ke stažení zde). Po načtení měřených dat zvolte *Analysis – Fit Wizard – User defined – Choose models folder*. Nastavte známé parametry funkce na konstantní podle vašeho experimentu, neznámé odhadněte a spusťte fitovací algoritmus.

9. Určete, jak je třeba měnit okamžitý výkon zdroje elektrického napětí, aby růst teploty byl v daném časovém intervalu lineární i při ohřevu špatně tepelně izolovaného kalorimetru. Experiment proveďte a porovnejte s vaší předpovědí. Výkon zdroje můžete řídit buď

(a) ručně,

- (b) počítačem pomocí programu *Kalorimetr.vi*. Program dovoluje nastavovat výkon zdroje Manson podle funkce

$$P(\tau, t_1, t_2) = P_0 + P_1 \cdot \tau + P_2 \cdot t_1 + P_3 \cdot t_2 \quad (W),$$

kde  $P_0$  až  $P_3$  jsou nastavitelné konstanty,  $\tau$  čas v sekundách a  $t_1, t_2$  dvě teploty snímané termočlánky na vstupech modulu NI USB 9211.

10. (\*) Určete kapacitu kalorimetru pomocí několika měření s odlišnou kapacitou systému. Kapacitu kalorimetru obdržíte extrapolací změřené kapacity systému  $mc + K$  pro  $m \rightarrow 0$ . Při experimentech použijte metodu korigující tepelné ztráty.
11. (\*) Řešte rovnici (6.4) numericky a řešení porovnejte s přesným analytickým řešením. Komentujte vliv různé volby parametrů numerického řešení – délky časového kroku. Výpočet proveďte pro dané reálné hodnoty vstupních parametrů a výsledek porovnejte s experimentem.
12. (\*) Předpokládejte, že výkon topné spirály harmonicky kolísá s nezanedbatelně velkou amplitudou. Numerickým řešením rovnice (6.4) určete časovou závislost teploty kalorimetru. Sestavte počítačový program pro řízení napěťového zdroje, který zajistí požadovaný průběh elektrického výkonu. Realizujte experiment a porovnejte s numerickým výpočtem.



## Úloha 7

# Měření Poissonovy konstanty vzduchu

### 7.1 Úvod

Poissonova konstanta, označovaná  $\kappa$ , je konstantou vyskytující se ve vztahu pro adiabatický děj v ideálním plynu

$$pV^\kappa = konst. \quad (7.1)$$

Adiabatická expanze nebo komprese probíhá tak rychle, že nedochází k tepelné výměně mezi ideálním plynem a jeho okolím, proto se adiabatický děj někdy také nazývá izoentropický. Poissonovu konstantu můžeme určit jako  $\kappa = \frac{C_p}{C_V}$ , kde  $C_p$  je molární tepelná kapacita při stálém tlaku a  $C_V$  molární tepelná kapacita při stálém objemu. Použitím Mayerova vztahu  $C_p = C_V + R$  získáme vyjádření Poissonovy konstanty pomocí molární plynové konstanty  $R$

$$\kappa = 1 + \frac{R}{C_V}. \quad (7.2)$$

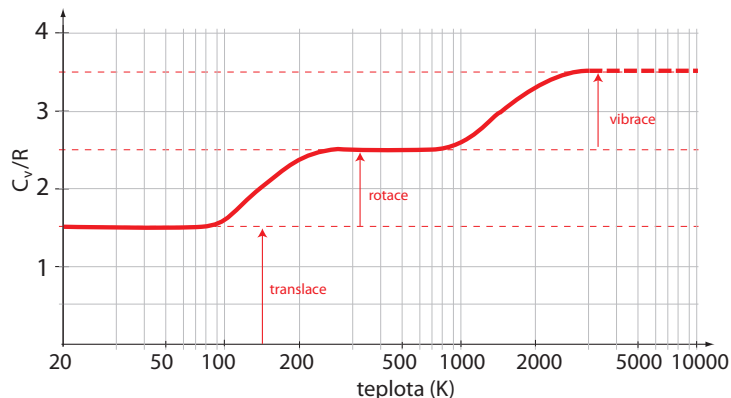
Hodnotu molární tepelné kapacity při stálém objemu  $C_V$  lze pro daný plyn spočítat použitím ekvipartičního teorému: každému stupni volnosti molekuly ideálního plynu odpovídá energie  $\frac{1}{2}kT$ , kde  $k$  je Boltzmannova konstanta (pro jednoatomové molekuly lze tento výsledek odvodit z Maxwellova rozdělení). Pro molární tepelnou kapacitu při stálém objemu pak plyne  $C_V = N_a \cdot \nu \cdot \frac{1}{2}kT$ , kde  $N_a$  je Avogadrova konstanta a  $\nu$  počet stupňů volnosti molekul. Odkud

$$C_V = \frac{\nu}{2}R \quad (7.3)$$

a pro Poissonovu konstantu (7.2) dostaneme

$$\kappa = 1 + \frac{2}{\nu}. \quad (7.4)$$

Při určování konkrétní teoretické hodnoty Poissonovy konstanty je tedy potřebné vzít do úvahy, jaký plyn a v jakém teplotním rozmezí zkoumáme. Jednoatomové plyny mají  $\nu = 3$  stupně volnosti (translační), pro dvouatomové je  $\nu = 5$  (3 translační, 2 rotační, v případě, že započítáváme i vibrační moment, pak do vztahu (7.4) dosadíme  $\nu = 7$ ), u víceatomových plynů je situace ještě složitější. Jak plyne z výsledků statistické fyziky a kvantové teorie, molární tepelná kapacita je závislá na teplotě – při nízkých teplotách se projevují pouze translační stupně volnosti, při zvyšování teploty dojde postupně i k rotačnímu pohybu a při dalším zvyšování teploty se přidává i pohyb vibrační – viz obrázek 7.1. Dvouatomový plyn má v teplotním rozmezí cca 250 K až 800 K pět stupňů volnosti, teoretická hodnota Poissonovy konstanty je pro takovýto plyn rovna  $\kappa = 1,40$ , protože vzduch je složen převážně z dvouatomových molekul, lze tuto hodnotu používat i pro něj.



Obrázek 7.1: Hodnota molární kapacity při stálém objemu pro dvouatomový plyn v závislosti na teplotě

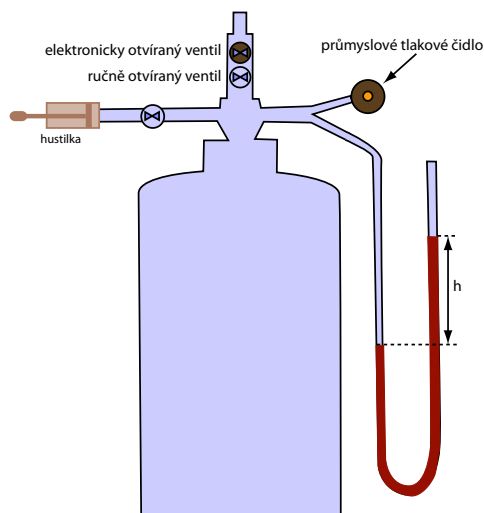
## 7.2 Měření Poissonovy konstanty Clément-Desormesovou metodou

Metoda je založena na vyhodnocení naměřených veličin posloupnosti dějů v měřeném plynu sestávající z izotermického stlačení, adiabatické expanze a izochorického ohřevu měřeného plynu. Metoda vystačí s relativním měřením přetlaku.

### Popis aparatury

Aparatura se sestává z velké nádoby, malého napouštěcího a velkých vypouštěcích ventilů a tlakoměrů (viz obr. 7.2). Aparatura musí být zcela hermetická, bez obsahu většího množství nečistot schopných adsorbovat plyny a vlhkost a nesmí obsahovat žádný kondenzát. Nádoba se tlakuje ruční pumpičkou přes malý oddělovací ventil. Vypouštění plynu z nádoby lze provést otevřením velkého ručního ventilu.

Nádoba je opatřena dvěma tlakoměry, které měří přetlak vzhledem k okolní atmosféře – U trubici a průmyslovým diferenciálním tlakovým čidlo. Diferenciální tlakové čidlo stejně jako U tr-



Obrázek 7.2: Aparatura pro měření Poissonovy konstanty Clément-Desormesovou metodou.

bice měří tlakový rozdíl  $\Delta p$ , v našem případě mezi nádobou a okolním vzduchem. Výstupem čidla je ale elektrický proud  $I$ , který čidlo automaticky reguluje v měřicím obvodu podle rozdílu tlaků

$$I = I_0 + c\Delta p. \quad (7.5)$$

Závislost proudu na rozdílu tlaků je tedy lineární, avšak nulovému rozdílu tlaků odpovídá hodnota proudu  $I_0$ !

## Postup měření

1. Prvním dějem posloupnosti dějů je izotermická komprese, která se ale nesnadno realizuje. Stejný finální stav dosáheme polytropickým stlačením s následným ustanovením termodynamické rovnováhy s okolím. Po otevření oddělovacího ventilu zvýšíme ruční pumpou tlak v komoře o několik hPa až několik málo desítek hPa, což odpovídá několika cm až dm vodního sloupce na U trubici, a oddělovací ventil opět uzavřeme. Pomocí tlakoměru sledujeme pokles tlaku. Měl by se blížit k určité hodnotě vyšší než je nulový přetlak. Po ustanovení termodynamické rovnováhy tuto hodnotu  $p_1$  zaznamenáme. Jestli pokles neustává a údaj směřuje k nulovému přetlaku, je v aparatuře netěsnost.
2. Adiabatickou expanzi uskutečníme krátkým, ale úplným otevřením hlavního ventilu. Po adiabatické expanzi musí následovat izochorický, nikoliv izobarický ohřev, a proto je nutno ponechat ventil otevřený jen po dobu úniku vzduchu z nádoby.  
Po ukončení izochorického ohřevu, tj. po ustanovení termodynamické rovnováhy, zaznamenáme hodnotu přetlaku  $p_2$ . I v této fázi sledujeme příznaky možné netěsnosti ventilu aparatury podobným způsobem jako v předchozím kroku.
3. Kritičnost doby otevření ventilu posoudíme v pomocném měření z grafu závislosti výsledné veličiny na délce časového intervalu, po dobu kterého je ventil otevřený. V tomto měření použijeme elektromagnetický ventil. Naměřené hodnoty průběžně vynášíme do grafu. Příliš krátká doba otevření se projevuje vyšší hodnotou  $\kappa$ , příliš dlouhá doba je charakteristická postupně narůstajícím vlivem izobarické části děje s hodnotou  $\kappa$  jdoucí k 1. Tolerance doby otevření ventilu odpovídá oblasti plato v naměřené závislosti. Pokud v grafu nenalezneme plato, ale pouze inflexní bod, pravděpodobně to není správná doba expanze. Děj je totiž komplikován dalšími vlivy. Je třeba mít na paměti, že správný okamžik zavření ventilu je dán ukončením expanze, nikoliv „správným“ výsledkem.

**Poznámka.** Ve skutečnosti není adiabatická expanze adiabatickou v celém objemu plynu. Striktně vzato, jedná se o polytropu s koeficientem polytropie závislejícím na vzdálenosti od stěny nádoby (a poloze v nádobě). U stěny limitně odpovídá izotermě, velmi daleko od stěny adiabatě. Systematická chyba je zřejmě daná poměrem objemu plynu takto stěnou ovlivněného k celkovému objemu, a je tedy přibližně úměrná objemu k povrchu nádoby. Čím větší nádoba, tím by měla být systematická chyba v důsledku tepelné výměny mezi stěnou nádoby a plynem při expanzi menší.

Stav plynu je vhodné popsat intenzívními parametry, teplotou a tlakem, atmosférický tlak označíme  $p_0$  a teplotu okolí  $T_0$ .

1. Ustálený stav po izotermickém stlačení je určen parametry  $p_1$  a  $T_0$ , tento stav označme I.
2. Adiabatickou expanzí dospěje systém ze stavu I do stavu popsaném parametry  $p_0$  a  $T_2$ , tento stav označme II. Dosadíme do rovnice adiabaty pro ideální plyn v proměnných  $p$  a  $T$  a obdržíme:

$$p_0^{\left(\frac{1}{\kappa}-1\right)} T_2 = p_1^{\left(\frac{1}{\kappa}-1\right)} T_0 \quad (7.6)$$

3. Izochorickým ohřevem dospěje systém ze stavu II do stavu popsáno parametry  $p_2, T_0$ . Dosadíme do rovnice izochory pro ideální plyn:

$$\frac{p_0}{T_2} = \frac{p_2}{T_0} \quad (7.7)$$

Vynásobíme rovnici (7.6) rovnicí (7.7), zlogaritmujeme a vyjádříme Poissonovu konstantu

$$\kappa = \frac{\ln p_1 - \ln p_0}{\ln p_1 - \ln p_2} = \frac{\ln \frac{p_1}{p_0}}{\ln \frac{p_1}{p_2}} \quad (7.8)$$

Měříme-li přetlak pomocí U trubice, platí:

$$p_1 = p_0 + kh_1 \quad (7.9)$$

$$p_2 = p_0 + kh_2, \quad (7.10)$$

$$(7.11)$$

kde  $h_1, h_2$  jsou výšky vodního sloupce (v pracovních jednotkách),  $k$  je konstanta přepočtu výšky vodního sloupce na tlak,  $p_0$  je okolní atmosférický tlak. Výraz (7.8) pak má tvar

$$\kappa = \frac{\ln \left( \frac{p_0 + kh_1}{p_0} \right)}{\ln \left( \frac{p_0 + kh_1}{p_0 + kh_2} \right)} \quad (7.12)$$

Rozvoj výrazu (7.12) podle  $h_1$  a  $h_2$  do třetího řádu

$$\kappa = \frac{\ln \left( \frac{p_0 + kh_1}{p_0} \right)}{\ln \left( \frac{p_0 + kh_1}{p_0 + kh_2} \right)} \doteq \frac{h_1}{h_1 - h_2} + \frac{1}{2} \frac{h_1 h_2 k}{p_0 (h_1 - h_2)} - \frac{1}{12} \frac{k^2 (h_1 + h_2) h_2 h_1}{p_0^2 (h_1 - h_2)} \quad (7.13)$$

Je-li změna tlaku ve srovnání s atmosférickým tlakem dostatečně malá, pak

$$\kappa \doteq \frac{h_1}{h_1 - h_2}. \quad (7.14)$$

**Poznámka.** Místo U trubice můžeme použít i jiné lineární tlakoměry, absolutní cejchování není podmínkou, důležitá je pouze poloha nuly. Při malém rozdílu tlaků můžeme tedy zjednodušený vztah (7.14) použít i pro diferenciální čidlo. Místo  $h_i$  dosazujeme

$$h = \frac{\Delta p}{k} = \frac{1}{kc} (I - I_0).$$

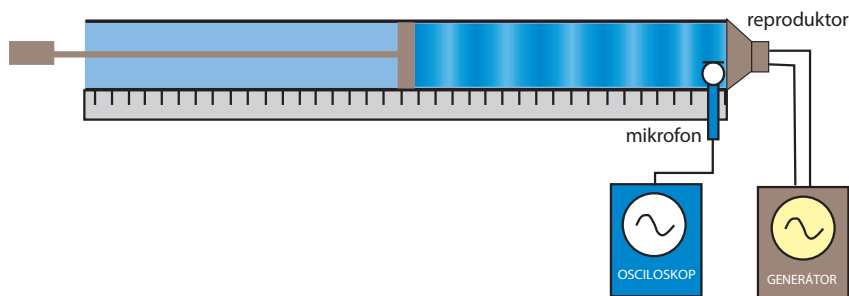
V tomto případě není třeba čidlo cejchovat, protože konstanta úměrnosti  $\frac{1}{kc}$  ve zjednodušeném vztahu vypadne, nikoliv proud  $I_0$  odpovídající nulovému přetlaku. Vzhledem k pozvolnému driftu parametrů čidla nelze spoléhat na konstantnost  $I_0$  a je vhodné tuto veličinu určit vždy znovu.

### Otázka

Určete, jaký je maximální přípustný přetlak  $h_1$  vyjádřený v cm vodního sloupce, nemá-li chyba výpočtu při použití zjednodušeného vztahu (7.14) překročit 1%. Určete, jaké změně teploty aparatury odpovídá změna tlaku o 10 Pa, tj. o 1 mm vodního sloupce?

### Námět k přemýšlení:

Vytipujte hlavní zdroje systematické chyby měření. Jakou roli hraje objem aparatury?



Obrázek 7.3: Aparatura pro měření Poissonovy konstanty z rychlosti zvuku v plynu.

### 7.3 Měření Poissonovy konstanty z rychlosti zvuku v plynu

Pro rychlost zvuku  $c$  platí vztah

$$c = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S}$$

kde  $p$  je tlak,  $\rho$  hustota, závorka s indexem  $S$  znamená parciální derivaci tlaku podle hustoty při konstantní entropii, tedy při vratném adiabatickém ději.

Pro ideální plyn platí pro rychlost vztah

$$c = \sqrt{\kappa \frac{p}{\rho}} \quad (7.15)$$

Dosadíme-li ze stavové rovnice pro ideální plyn do (7.15) za  $p$

$$p = \frac{\rho RT}{M_{mol}},$$

vidíme, že rychlost zvuku v ideálním plynu nezávisí na hustotě, ale pouze na teplotě.

Pro stanovení Poissonovy konstanty je zapotřebí určit tlak a hustotu plynu a změřit rychlost šíření zvuku.

Rychlost zvuku lze spočítat ze změřené délky stojatého vlnění v rezonanční Kundtově trubici (viz obr. 7.3). Akustické pole v trubici je buzeno reproduktorem, který je napájen z laditelného generátoru sinusového signálu. Rezonanční podmínka se nastavuje posuvným pístem, detekuje se měřením amplitudy akustického pole pomocí mikrofonu.

#### Postup měření

Zasuneme píst do výchozí pozice, tj co nejbližší reproduktorku. Na generátoru sinusového signálu nastavíme vhodnou frekvenci a amplitudu a postupně vysouváme píst z trubice. Zaznamenáváme polohy maxim. Rozdíl poloh sousedních maxim je polovina vlnové délky.

Při výpočtu  $\overline{\lambda}$  použijeme metodou nejmenších čtverců. Pro každou frekvenci zvlášť do grafu vyneseme polohu každého naměřeného maxima jako funkci jeho pořadí ( $i = 1, 2, \dots$ ) a závislost proložíme lineární funkcí. Pro rychlost zvuku platí vztah,

$$c = 2\overline{\lambda}f,$$

kde  $f$  je nastavená frekvence.

Z takto stanovené rychlosti zvuku, změřeného tlaku vzduchu a z tabulek odečtené hustoty vzduchu při daném tlaku a teplotě spočteme ze vztahu (7.15) Poissonovu konstantu.

**Otázky:**

1. Jak z prokladu závislosti polohy maxima na jeho pořadí určíme  $\bar{\lambda}$ ?
2. Jak závisí hustota vzduchu na jeho vlhkosti při stejném tlaku a teplotě?
3. Odhadněte krajní nejistotu určení tlaku, teploty a vlhkosti vzduchu v laboratoři, aby její vliv na výsledek měření byl zanedbatelný.
4. Které z korekcí na čtenou hodnotu rtuťového barometru, tj. korekce na kapilární depresi, na hustotu rtuti a na místní tíhové zrychlení, je třeba započítat?

**Námět k přemýšlení:**

Jak ovlivňuje průměr trubice naměřenou rychlost zvuku? Uplatní se tento vliv v popsáném měření?

**Úkoly**

1. Natlakujte velkou nádobu, změřte U-trubicí a průmyslovým tlakovým čidlem tlak před ( $p_1$ ) a po expanzi ( $p_2$ ) a spočítejte Poissonovu konstantu nezávisle z obou čidel. Měření v dostatečném počtu opakujte.
2. Pomocí U trubice ocejchujte diferenciální tlakové čidlo. Změřte nulový proud diferenciálního tlakového čidla (proud při nulovém rozdílu tlaků), změřte a vynesete závislost proudu čidlem na rozdílu výšek hladin vodního sloupce v U trubici.
3. Pro několik různých frekvencí určete vlnovou délku stojatého vlnění v Kundtově trubici. Pro každou frekvenci najděte všechny polohy maxim  $d_i$  v trubici, vynesete je do grafu v závislosti na indexu  $i$  a metodou nejmenších čtverců stanovte vlnovou délku. Určete rychlost zvuku ve vzduchu a stanovte Poissonovu konstantu vzduchu včetně nejistoty měření.
4. Změřte tlak, teplotu a relativní vlhkost vzduchu v laboratoři.

# Úloha 8

## Měření teploty

### 8.1 Úvod

Teplota patří k nejdůležitějším charakteristikám termodynamických systémů. Je to proto, že řada vlastností i dějů, které v systémech probíhají, na teplotě více či méně závisí. Měření teploty je proto důležitý experimentální úkol, kterému se nevyhnou výzkumné a vývojové laboratoře ani průmyslová praxe.

Teplotní závislost řady jevů nás na jedné straně nutí v řadě případů teplotu měřit, na druhé straně nám dává možnost těchto teplotních závislostí využít jako metod k vlastnímu měření teploty. V rozmanitosti různých experimentálních metod teplota nesnese srovnání s žádnou jinou měřenou fyzikální veličinou.

K měření teploty se často využívá dilatačních teploměrů, které jsou založeny na principu teplotní roztažnosti látek. Podle skupenství látky obsažené v teploměru je možné rozlišovat teploměry kapalinové (typicky rtuťové, nebo lihové), plynové a kovové (často používanou podskupinou jsou teploměry dvoukovové – bimetalické). V této úloze se budeme věnovat dalším v praxi často používaným druhům teploměrů, teploměrům elektrickým, mezi které patří odporová čidla a termoelektrické články, a teploměrům radiačním.

### 8.2 Odporová čidla

Odpor je veličinou, která obecně vždy závisí na teplotě. Navíc je výhodné, že měření odporu je měřením elektrickým a lze je tedy snadno implementovat do elektronických automatizovaných systémů měření a řízení technologických procesů. Proto jsou odporové snímací prvky v současné technické a průmyslové praxi zřejmě používané nejčastěji.

#### 8.2.1 Kovové odporové senzory teploty

Odpor kovového vodiče s teplotou roste. Důvodem je rozptýl elektronů – nositelů proudu – na kmitech mříže, který je tím větší, čím je teplota vyšší. Pro malý rozsah teplot, přibližně v intervalu 100 °C, lze použít lineární závislost odporu na teplotě ve tvaru

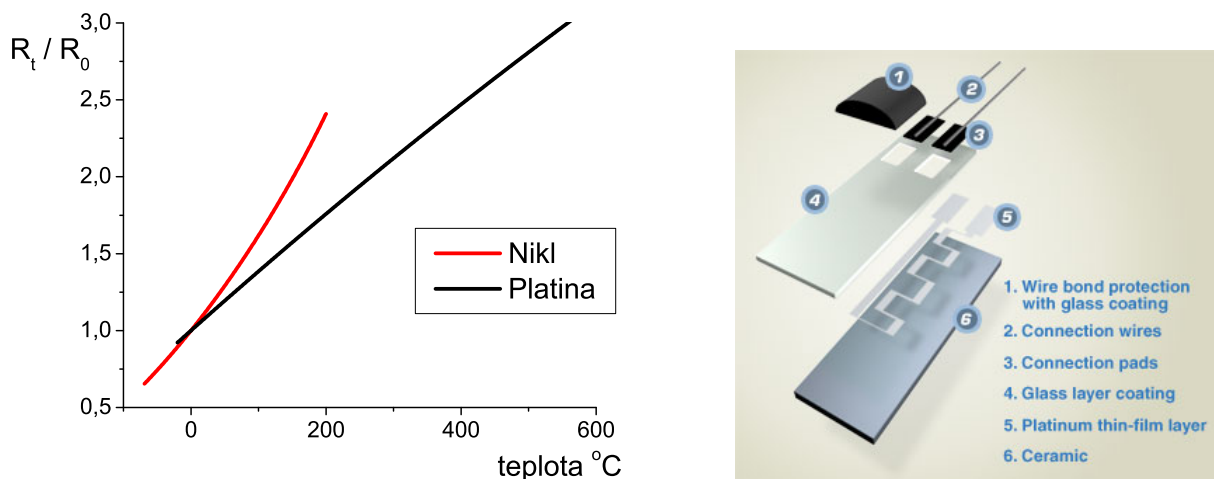
$$R = R_0(1 + \alpha\Delta t) \quad (8.1)$$

Teoreticky můžeme použít libovolný kov, v praxi se však používá jen několik málo materiálů, které nejlépe vyhovují zejména požadavkům stálosti. Nejužívanější materiály jsou uvedeny v příloze 8.A, viz tabulka 8.2. Pro komerční použití čidel bylo zavedeno označení vyjadřující typ snímače a hodnotu jeho odporu při dané dohodnuté teplotě, typicky 0 °C. K nejpoužívanějším snímačům patří Pt100, Pt1000 a Ni1000, tj. snímače, které mají při teplotě 0 °C odpor 100 Ω, resp. 1000 Ω.

Standardem mezi kovovými odporovými snímači je snímač Pt100. Čidlo Pt1000 s vyšší hodnotou odporu má vyšší citlivost, menší samoohřev a nižší vliv odporu přírodních vodičů, je však

méně stálé. Ve starší, tzv. drátkové technologii však vyšší základní odpor znamenal vyšší cenu snímače vzhledem k nutnému použití většího množství drahého kovu. Při moderní tenkovrstevné technologii již spotřeba materiálu neovlivňuje významně cenu a to dovoluje výrobu levných snímačů i vyššího základního odporu.

Pro větší rozsah teplot již nelze použít lineární aproximaci teplotní závislosti odporu a závislost se aproximuje polynomem vyššího řádu. Pro platinové a niklové čidlo jsou koeficienty uvedeny v příloze 8.A. Teplotní závislost odporových čidel Pt a Ni je na obr. 8.1.



Obrázek 8.1: Teplotní závislost Pt a Ni odporových čidel (vlevo), konstrukce Pt čidla (vpravo)

### 8.2.2 Polovodičové odporové senzory teploty – termistory

Polovodičové odporové senzory teploty patří k nejpoužívanějším teplotním čidlům zejména v oblasti spotřební elektroniky, jako například domácí a venkovní digitální teploměry. K jejím výhodám patří vysoká teplotní citlivost (asi o řád vyšší než u kovů), malé rozměry a cena. Nevýhodou je nelineární teplotní charakteristika, menší rozsah teplot a menší dlouhodobá stabilita v porovnání s platinovými odporovými čidly.



Obrázek 8.2: Termistory NTC

Odpor vlastního polovodiče s teplotou klesá. S rostoucí teplotou se totiž zvyšuje pravděpodobnost excitace elektronu z valenčního do vodivostního pásu, tak roste koncentrace nositelů náboje –



elektronů ve vodivostním pásu a děr v pásu valenčním. Zvýšení rozptylu nositelů náboje s teplotou, které určovalo obrácenou teplotní charakteristiku u kovů, má zde méně významný vliv. Termistory s tímto typem teplotní závislosti se nazývají negastory (NTC termistory). V případě vysoké dotace polovodiče se teplotní charakteristika obrací. Dopováním polovodiče totiž zvýšíme teplotně nezávislou koncentraci volných nositelů náboje a tím materiál získává charakter kovu. Termistory tohoto typu nazýváme pozistory (PTC termistory). Pozistory vyrobené z polykrystalické feroelektrické keramiky (např. titaničitan barnatý,  $\text{BaTiO}_3$ ) se vyznačují strmým nárůstem odporu nad Curieovou teplotou (teplota, při které materiál ztrácí feroelektrické vlastnosti) a používají se zejména jako teplotní pojistky v elektronických obvodech.

Pozistory se k měření teploty prakticky nepoužívají. Pokud tedy v technické praxi mluvíme o termistorech, máme většinou na mysli snímače se zápornou teplotní charakteristikou – negastory.

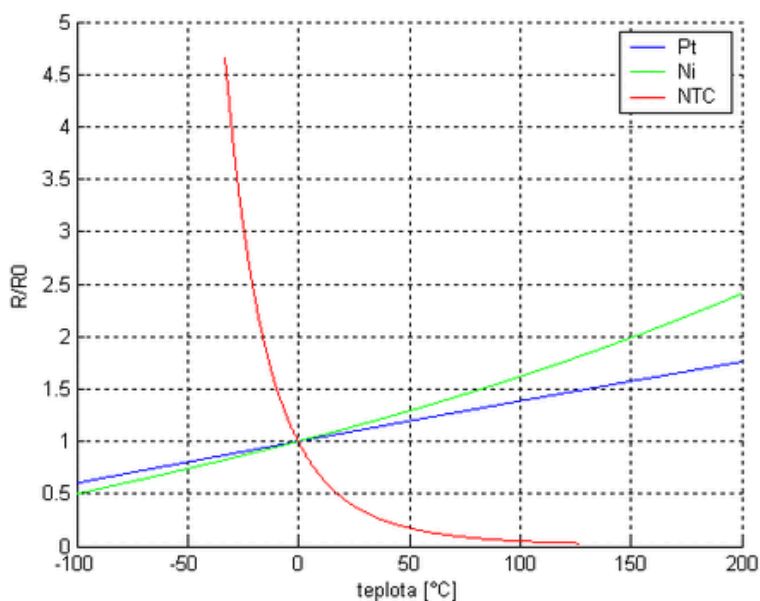
Teplotní závislost termistoru lze charakterizovat vztahem

$$R(t) = Ae^{\frac{B}{t}} \quad (8.2)$$

Ve skutečnosti však konstanta  $B$  není konstantou a je teplotně závislá. Pro výpočet teploty z odporu termistoru ve většině aplikací postačují přibližné, tzv. Steinhart-Hartovy vztahy

$$t = [a + b \ln R(t) + c (\ln R(t))^3]^{-1}, \quad (8.3)$$

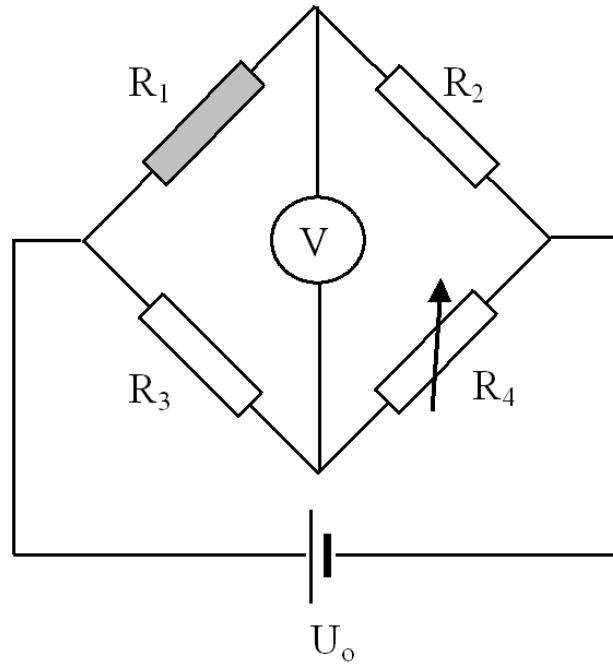
které uspokojivým způsobem teplotní charakteristiku aproximují. Srovnání teplotních závislostí odporu kovových prvků a termistoru je na obr. 8.3.



Obrázek 8.3: Srovnání teplotní závislosti odporu kovových čidel a termistoru NTC

### 8.2.3 Elektrické zapojení odporových čidel

Relativní změna odporu je malá a k dosažení potřebné citlivosti nelze měřit odpor a jeho změnu přímo, například z Ohmova zákona. Je-li totiž teplotní odporový koeficient řádu  $10^{-3}$ , pak se změnou teploty o  $1^\circ\text{C}$  se velikost proudu protékajícího odporem (při použití stabilizovaného zdroje napětí) změní také v řádu  $10^{-3}$ , což je již v úrovni chyby běžných elektrických měřicích přístrojů. Mnohem výhodnější je použít metodu, ve které neměříme malou změnu na pozadí velké hodnoty, ale při níž měříme přímo změnu samotnou. Toho dosáhneme s použitím Wheatstoneova můstku.



Obrázek 8.4: Zapojení odporového čidla do můstku. Čidlo je na místě šedého obdélníku

Klasický Wheatstoneův můstek je na obr. 8.4. Při vyvážení můstku (tj. když na voltmetru je nulové napětí), platí

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4} \quad (8.4)$$

Pokud místo odporu  $R_1$  zapojíme odporové čidlo, dostaneme

$$\frac{R_0(1 + \alpha\Delta t)}{R_2} = \frac{R_3}{R_4} \quad (8.5)$$

kde  $R_0$  je odpor čidla při jisté srovnávací teplotě a  $\alpha$  teplotní odporový koeficient. Odtud již jednoduše získáme

$$\Delta t = \frac{1}{\alpha} \frac{R_3 R_2}{R_4 R_0} - 1 \quad (8.6)$$

Výše uvedený postup však není výhodný pro rutinní měření a to zejména v případě, kdy chceme měření automatizovat pomocí výpočetní techniky. Vhodnější je postupovat následujícím způsobem. S pomocí proměnného odporu  $R_4$  vyvážíme můstek při jisté srovnávací teplotě  $t_0$ . Při následném měření již můstek nevyvažujeme, ale měříme úhlopříčné napětí můstku. Pokud měříme napětí voltmetrem s velmi vysokým vnitřním odporem (a všechny digitální voltmetry nebo přídavné měřicí karty do PC tuto podmínku splňují), pak i v případě nevyváženého můstku poteče odpory  $R_1$  a  $R_2$  stejný proud. Použijeme-li symetrický můstek ( $R_0 = R_2 = R_3 = R_4$ ), potom za předpokladu malého rozladění můstku lze pro napětí  $U$  měřené na můstku voltmetrem odvodit přibližný vztah (viz příloha 8.B)

$$\Delta t = \frac{4U}{U_0 \alpha}. \quad (8.7)$$

Vidíme, že teplotní rozdíl mezi měřenou a srovnávací teplotou  $t_0$  je přímo úměrný napětí na můstku; konstanta úměrnosti je určena použitým napájecím napětím  $U_0$  a  $\alpha$  teplotním koeficientem odporu.

Rutinní uživatel odporových čidel se jejich elektrickým zapojením netrápí. Ve standardním sortimentu výrobců jsou elektronické převodníky, které převádějí signál z čidla na tzv. normalizovaný proudový či napěťový výstup (viz. obr. 8.5). To znamená, že teplota v daném měřicím



Obrázek 8.5: Převodník teplota-napětí, výrobce Sensit

rozsahu je lineárně zobrazena na určitý napěťový či proudový interval, např. 0 – 10 V, 4 – 20 mA, apod. Odporové čidlo ve spojení s elektronickým převodníkem představuje pohodlný, spolehlivý a relativně přesný způsob měření teploty, který lze velmi jednoduše použít v automatizovaných systémech sběru dat a řízení technologických procesů.

#### 8.2.4 Ohřev snímače měřicím proudem

Při měření odporu se nevyhneme nutnosti nechat protékat vlastním snímačem elektrický proud. Tento proud způsobí ohřev snímače Jouleovým teplem. Výkon elektrického proudu je dán vztahem

$$P = \frac{U^2}{R}, \quad (8.8)$$

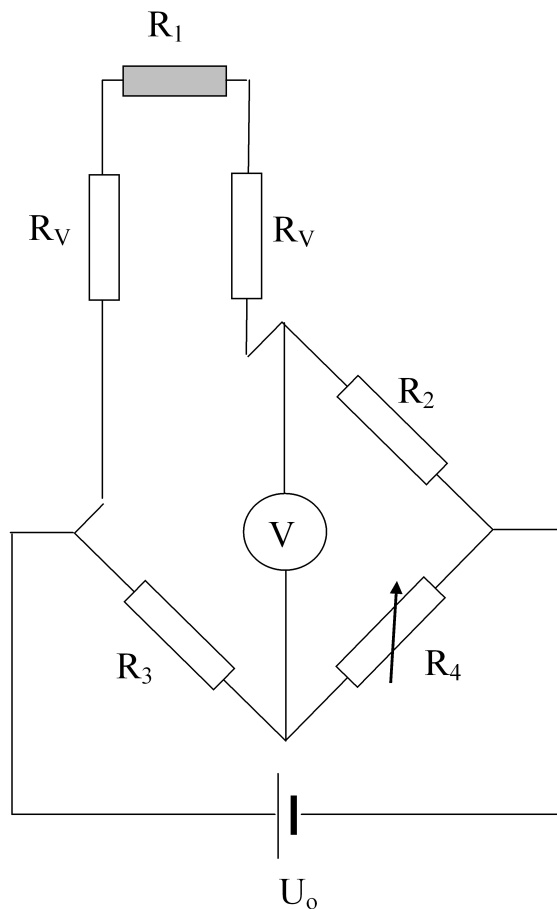
kde  $U$  je napětí na snímači a  $R$  jeho odpor. Z tohoto vztahu plyne výhoda snímačů s vyšším odporem (tedy např. Pt1000 proti Pt100), které při stejném napětí na snímači – typicky přímo měřená veličina – jsou zatíženy menším topným výkonem. Z uvedeného je také zřejmé, že při měření nelze zatěžovat odporové čidlo příliš velkým proudem, což klade omezení na napájecí napětí  $U_o$ . Běžné hodnoty měřicího proudu se pohybují v intervalu 0,3 - 1 mA, což při použití čidla Pt1000 odpovídá hodnotě  $U_o$  kolem 1V.

#### 8.2.5 Vliv přívodních vodičů

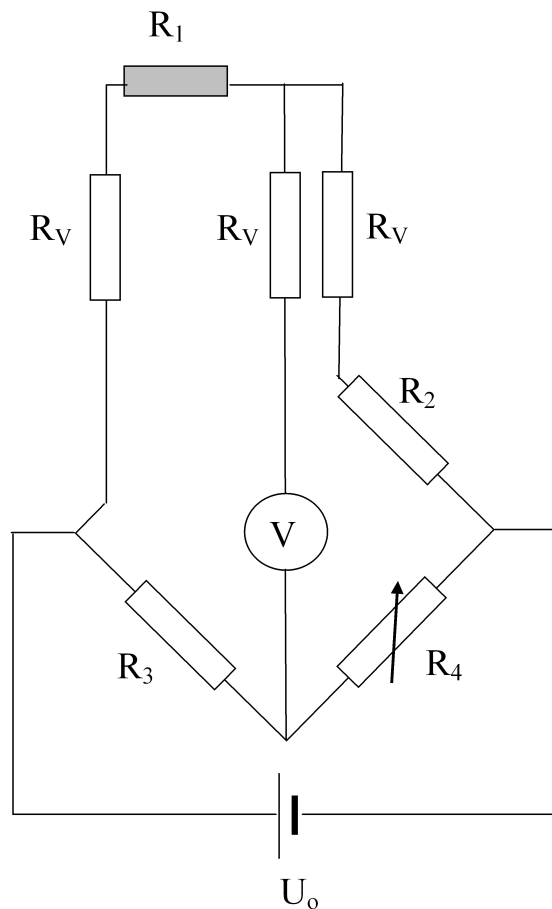
Při měření teploty odporovými čidly může nastat případ, kdy je měřený objekt více vzdálen od vyhodnocujících elektronických obvodů. V tom případě musí být délka vodičů, které připojují vlastní čidlo, velká, takže obecně nelze zanedbat odpor přívodních vodičů  $R_V$ . Situace je schematicky znázorněna na obr. 8.6.

Problémem přitom není odpor vodičů samotných, který kompenzujeme při vyvažování můstku a jehož vliv můžeme započítat. Měření může být nepředvídatelně ovlivněno až kvůli teplotním změnám odporu přívodních vodičů, ke kterým dochází, pokud nezajistíme termostatické celé přívodní trasy.

Částečnou, ale ve většině případů postačující kompenzaci zajistí třívodičové vedení podle obr. 8.7. V tomto zapojení případná změna odporu přívodních vodičů s teplotou nastane současně ve dvou větvích můstku a vzniklé rozdíly odporu se navzájem zkompenzují.



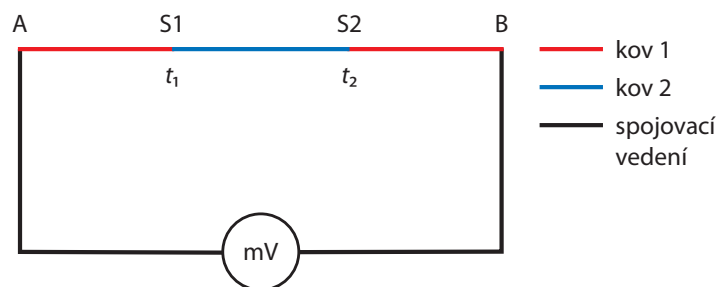
Obrázek 8.6: Vliv přívodních vodičů s odporem  $R_V$



Obrázek 8.7: Třívodičová kompenzace

### 8.3 Termoelektrické články

Pokud spojíme dva různé vodivé materiály (kovy nebo polovodiče) ve dvou místech podle obrázku 8.8 tak, že spoje S1 a S2 budou mít různou teplotu, vznikne mezi spoji tzv. termoelektrické napětí a uzavřeným obvodem začne protékat termoelektrický proud. Tento jev se nazývá také Seebeckův a souvisí s difúzí volných nositelů náboje z teplejších míst do chladnějších.



Obrázek 8.8: Termoelektrický článek – spojení dvou různých kovů

Teplotní charakteristika termoelektrického napětí je i v relativně velkém rozsahu přibližně lineární; lze ji tedy charakterizovat vztahem

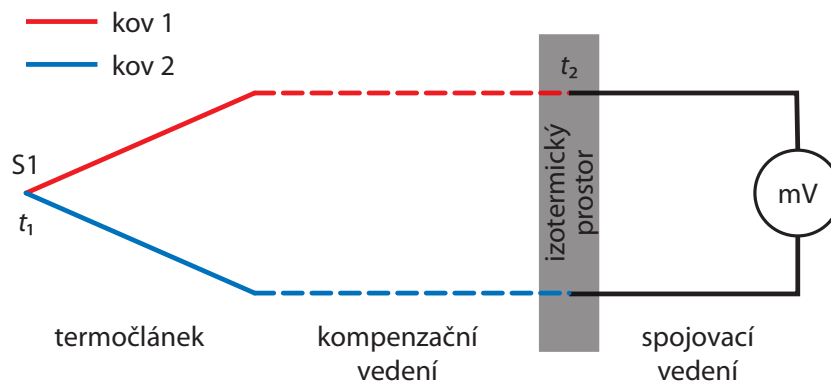
$$U = \beta (t_1 - t_2) \quad (8.9)$$

kde  $\beta$  je tzv. Seebeckův termoelektrický koeficient. Jeho hodnota závisí na materiálech použitých při výrobě termoelektrického článku (viz příloha 8.A).

Pokud do obvodu termoelektrického článku zapojíme vodiče z jiného materiálu (tzv. spojovací vedení), nedojde ke změně termoelektrického napětí, jsou-li všechny ostatní spoje na téže teplotě (viz například body A a B na obr. 8.8). To je důležitá vlastnost, díky které můžeme za předpokladu teplotní homogenity prostředí použít pro spojení termoelektrického článku s měřicím přístrojem libovolné vhodné vodiče (nejčastěji měděné). Pokud teplotní homogenitu zajistit nelze, musíme postupovat některým z následujících dvou způsobů:

1. Použít materiál termoelektrického článku pro celý obvod až ke svorkám měřicího přístroje (o kterém lze předpokládat, že má homogenní teplotu) a nebo alespoň do míst, kde lze homogenitu teploty s požadovanou přesností zajistit.
2. Použít tzv. prodlužovací (kompenzační) vedení z jiných kovů, které ovšem mají termoelektrický koeficient co nejblíže materiálům termoelektrického článku. Tento postup se volí, pokud je nutné pro vlastní termoelektrický článek použít drahých kovů (například z důvodů požadovaného teplotního rozsahu) a kompenzační vedení může být realizováno materiály levnějšími.

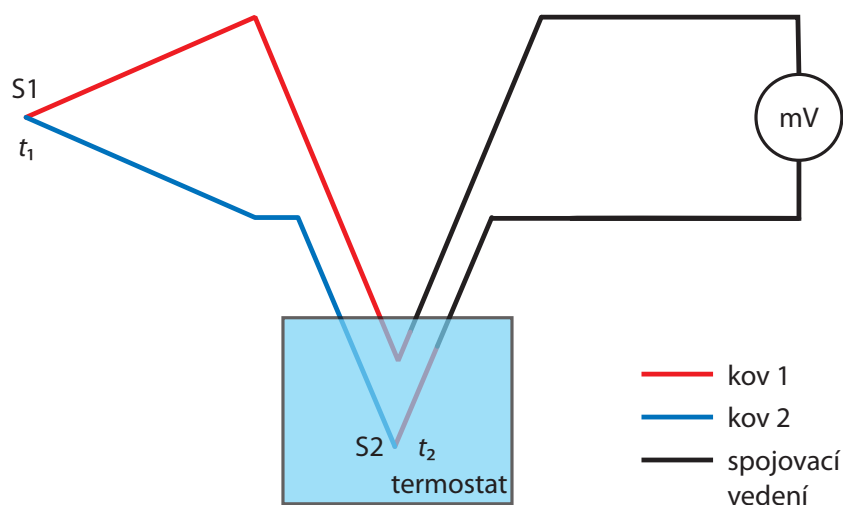
V technické praxi se nejčastěji používá termoelektrický článek, který má pouze jeden spoj různých kovů. Druhý spoj je pak v místě, kde se připojuje spojovací vedení nebo přímo měřicí přístroj. Na obr. 8.9 je zakresleno schéma termoelektrického článku s jedním spojem, doplněným kompenzačním a spojovacím vedením.



Obrázek 8.9: Termoelektrický článek s jedním spojem

Pro nejpřesnější měření je nutné srovnávací teplotu termostatizovat. Přitom je nejvýhodnější použít termoelektrický článek s oběma konci, z nichž jeden umístíme do termostatu. Velmi dobrý termostat jednoduše získáme pomocí směsi ledu a vody v Dewarově nádobě, která se bez jakékoliv aktivní termostatizace udržuje na teplotě  $0^{\circ}\text{C}$ . Příklad zapojení termoelektrického článku s oběma konci je na obr. 8.10.

Z předchozího textu jednoznačně vyplývá, že termoelektrické články měří pouze rozdíl teplot, nikoliv absolutní hodnotu teploty. Přesto jsou běžně na trhu digitální teploměry s termočláňkovými sondami, které absolutní hodnotu teploty ukazují (viz obr. 8.11). To lze zařídit jen tak, že vlastní elektronická část teploměru je vybavena teplotním čidlem, které měří absolutně teplotu samotného teploměru (například termistor) a k jehož údaji se teplotní rozdíl určený termoelektrickým článkem přičítá.



Obrázek 8.10: Termoelektrický článek se dvěma spoji. První spoj je měřicí a druhý je termostatizován.



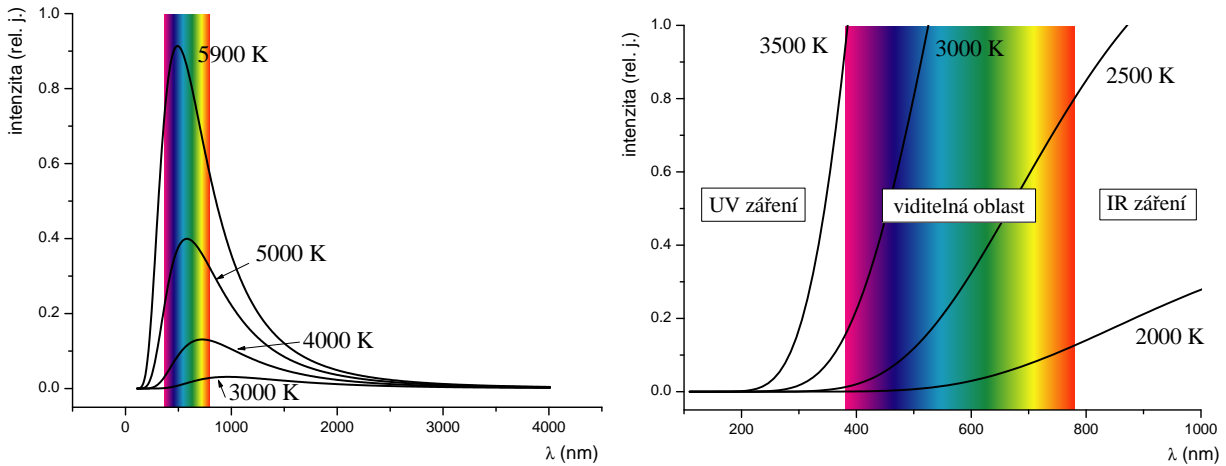
Obrázek 8.11: Digitální teploměr s teplotní termočláňkovou sondou typu K.

## 8.4 Infračervené teploměry

Každé těleso na teplotě vyšší než absolutní nula (tedy skutečně každé) vyzařuje elektromagnetické záření. Toto záření nazýváme tepelné, abychom jej odlišili od záření vzniklého jiným způsobem, například luminiscencí. Emise tepelného záření je ovlivněna zejména teplotou, ale také vlastnostmi povrchu tělesa. Ukazuje se, že nejvíce září to těleso, jež v dané oblasti vlnových délek nejvíce absorbuje. Ideálním zářičem je tedy těleso zcela pohlcující dopadající záření, tzv. dokonale černé těleso. Odchylku vyzařování konkrétního povrchu od vyzařování dokonale černého popisuje veličina zvaná emisivita  $\varepsilon$ , která je definovaná jako

$$\varepsilon(\lambda, T) = \frac{I(\lambda, T)}{I_{\text{čt}}(\lambda, T)}, \quad (8.10)$$

kde  $I(\lambda, T)$  je intenzita vyzařování daného povrchu o absolutní teplotě  $T$  na vlnové délce  $\lambda$  a  $I_{\text{čt}}(\lambda, T)$  intenzita vyzařování dokonale černého tělesa o stejné teplotě a na stejné vlnové délce. Emisivita černého tělesa je tedy vždy rovna jedné, v běžných případech  $\varepsilon < 1$ . Pokud je emisivita



Obrázek 8.12: Spektrální hustota vyzařování dokonale černého tělesa.

tělesa v daném intervalu vlnových délek konstantní, těleso září jako tzv. šedý zářič. Mění-li se, mluvíme o selektivním zářiči. Se změnou teploty jsou spojeny dva charakteristické jevy:

1. S rostoucí teplotou se zmenšuje vlnová délka, při které je vyzařování největší. Tuto závislost popisuje tzv. Wienův posunovací zákon

$$\lambda_{\max} T = \text{konst} = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ mK}. \quad (8.11)$$

2. Současně se vzrůstem teploty prudce narůstá celková vyzářená energie dle Stefanova – Boltzmanova zákona

$$I_{\text{čt}} = \sigma T^4, \quad \sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-4} \quad (8.12)$$

Obě výše uvedené závislosti jsou zdůvodněním toho, že záření těles, která nás běžně obklopují, nevnímáme, a sama existence tohoto záření je pro mnohé laiky překvapením. Těleso na pokojové teplotě má maximum vyzařování pro vlnovou délku cca  $10 \mu\text{m}$ , což je daleko od oblastí viditelného světla.

Spektrální závislost intenzity vyzařování (přesněji řečeno spektrální hustota intenzity vyzařování) dokonale černého tělesa je popsána tzv. Planckovým vyzařovacím zákonem ve tvaru

$$I_{\text{čt}}(\lambda) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{\left(e^{\frac{hc}{k_b T \lambda}} - 1\right)} \quad (\text{Wm}^{-2} \text{ sr}^{-1} \text{ nm}^{-1}), \quad (8.13)$$

kde  $h$  je Planckova konstanta ( $6,625 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$ ),  $c$  rychlost světla,  $k_b$  Boltzmannova konstanta ( $1,38 \cdot 10^{-23} \text{ JK}^{-1}$ ). Příklady závislostí pro některé teploty jsou na obr. 8.12.

Planckův vyzařovací zákon je úplným popisem záření dokonale černého tělesa. Dříve uvedené zákony – Wienův posunovací a Stefanův-Boltzmannův – jsou v něm obsaženy a je možné je z Planckova zákona odvodit.

Z výše uvedeného popisu je zřejmé, že tepelné záření emitované tělesem nese informaci o teplotě tělesa a může být využito pro bezkontaktní měření teploty. Přístroje měřící toto záření nazýváme infračervené (IR) teploměry.

Základním problémem při měření IR teploměry je určení emisivity měřeného povrchu. Z definice emisivity a Stefanova Boltzmannova zákona plyne vztah mezi skutečnou teplotou tělesa  $T$  a teplotou  $T_p$ , kterou ukazuje IR teploměr předpokládající, že těleso je dokonale černé

$$T = \frac{T_p}{\sqrt[4]{\varepsilon}}. \quad (8.14)$$

V praxi ale tento postup dává pouze přibližné výsledky a určená teplota nebo emisivita povrchu je zatíženou značnou chybou. Většina lepších IR teploměrů má možnost korekce na emisivitu měřeného tělesa. Pokud na přístroji nastavíme správnou emisivitu, provádí přístroj automaticky korekci a ukazuje správnou hodnotu teploty.

### 8.4.1 Principy detekce infračerveného záření IR teploměrem

Pro měření nižších teplot musíme použít snímač, který je schopen detekovat delší vlnové délky, tedy infračervenou oblast elektromagnetického spektra. V praxi se používá několik možností detekce infračerveného záření. Lze je rozdělit následujícím způsobem:

1. tepelné – měří ohřev čidla, na které dopadá fokusovaný svazek IR záření. Pro detekci ohřevu lze využít následující jevy:
  - (a) termoelektrický. IR záření ohřívá baterii sériově zapojených termoelektrických článků (cca 100) a měříme celkové generované napětí.
  - (b) odporový. Oteplení detektoru je snímáno prostřednictvím změny odporu vhodného materiálu. Používají se nejčastěji oxidy MgO, MnO, NiO, TiO<sub>2</sub> a jiné. Tyto detektory nazýváme bolometry. Mikrobolometrické senzory lze uspořádat do plošné matice, a tak získat plošný detektor termovizních kamer.
  - (c) pyroelektrický. Pyroelektrický jev je změna spontánní polarizace v závislosti na teplotě u některých materiálů zvaných pyroelektrika. Nejčastěji se používají keramické materiály na bázi titaničitanu a zirkoničitanu olovnatého (označení PZT), triglycin sulfát (TGS), polyvinylfluorid (PDF). Snímač je konstruován tak, že pyroelektrická látka tvoří dielektrikum kondenzátoru, na němž při změně teploty dochází k indukci elektrického náboje.
2. kvantové. Při absorpci fotonu elektronem z valenčního pásu polovodiče dojde k excitaci elektronu z valenčního do vodivostního pásu a ke vzniku páru elektron - díra. Zvýšením koncentrace nositelů proudu - elektronů a děr - dojde ke dvěma jevům:
  - (a) zvýšení vodivosti (snížení odporu) homogenního polovodiče. Jev nazýváme fotovodivost a takto pracující součástky fotoodpory. Změnu odporu pak můžeme detekovat podobným způsobem, jako u odporových teplotních čidel.
  - (b) generaci elektrického napětí. Dojde-li k absorpci fotonu v oblasti p-n přechodu, pak elektrické pole, jež je spontánně v oblasti p-n přechodu přítomné, oddělí oba druhy nositelů proudu od sebe a vzniká elektrické napětí, případně v uzavřeném obvodu elektrický proud. Tento jev nazýváme fotovoltaiický.<sup>1</sup> Měření vzniklého elektrického napětí resp. elektrického proudu je již standardní experimentální úkol.

Kvantové detektory se používají u metrologicky nejpřesnějších měřidel – etalonů.

---

Důležitou charakteristikou IR teploměru je tzv. optika  $\Omega$ , která určuje velikost oblasti, z níž IR teploměr záření snímá. Optika je definována jako poměr průměru snímané oblasti a její vzdálenosti od přístroje, viz obr. 8.13.

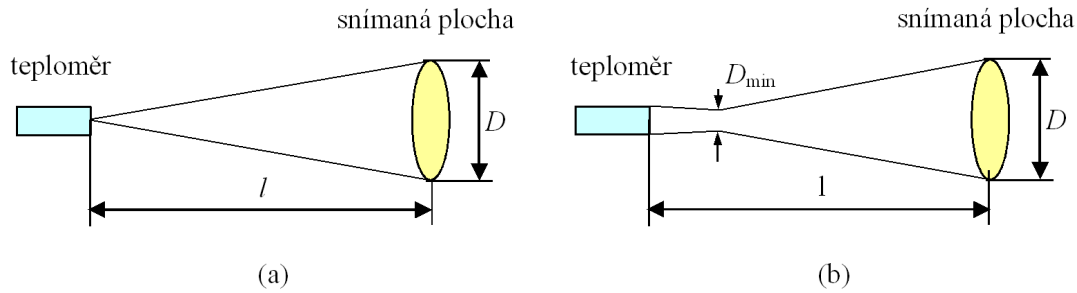
$$\Omega = D:l. \quad (8.15)$$

Je však třeba mít na paměti, že průměr snímané oblasti neklesá se snižující se vzdáleností od přístroje k nule, jak by mohl naznačovat obr. 8.13 (a), ale má jistou minimální hodnotu  $D_{min}$ . Reálný profil snímané oblasti vystihuje obr. 8.13 (b).

---

<sup>1</sup>Právě tento jev je základem činnosti tzv. solárních článků, které umožňují přímý převod slunečního záření na elektrickou energii.





Obrázek 8.13: (a) K definici optiky IR teploměru. (b) Reálný profil snímané oblasti

### 8.4.2 Měření teploty infračerveným teploměrem

Infračervené teploměry, přes bezspornou výhodu rychlé, jednoduché a bezkontaktní metody, mají své nevýhody a měření s nimi přináší značné úskalí. V první řadě je to neznámá emisivita měřeného povrchu. Při měření nízkých teplot může být údaj IR čidla ovlivněn odrazem IR záření okolních předmětů, prostředím mezi měřeným objektem a vlastním snímačem. Někdy je nutné měřit teplotu přes okénko oddělující například vakuovaný prostor s měřeným tělesem. Okénko vždy snižuje tok záření a obvykle je nutné provést speciální kalibraci při daném experimentálním uspořádání.

Propustnost okénka  $\mathcal{T}$  lze orientačně stanovit z poměru intenzit záření prošlého přes okénko a záření dopadajícího na okénko

$$\mathcal{T} = \frac{T_{\text{IR,O}}^4}{T_{\text{IR,V}}^4}, \quad (8.16)$$

kde  $T_{\text{IR,O}}$  je teplota vařiče měřená IR teploměrem přes okénko a  $T_{\text{IR,V}}$  je teplota vařiče měřená IR teploměrem přímo. V případě okének s velmi malou propustností dává tento vztah zjevně nesprávné výsledky, neboť značná část záření měřená IR teploměrem přes okénko ve skutečnosti přichází odrazem záření z okolí na okénku, případně je vlastním zářením okénka. V této situaci je vhodné toto záření odečíst:

$$\mathcal{T} = \frac{T_{\text{IR,O}}^4 - T_{\text{IR,P}}^4}{T_{\text{IR,V}}^4}, \quad (8.17)$$

kde  $T_{\text{IR,P}}$  je teplota změřená IR teploměrem přes okénko při pohledu na málo vyzařující objekt.

## 8.5 Relaxační doba odporového a termočláňkového čidla

Při měření teploty ve většině případů nejsou velké nároky na rychlost reakce teploměru. Vždy, když měříme teplotu okolního prostředí, nitra pece, kapalné náplně apod., je tepelná kapacita měřeného objektu řádově vyšší než kapacita teplotního čidla. Přesto mohou být situace, kdy je nutné měřit rychlé změny teploty – adiabatické expanze a komprese, silné exotermické reakce, rychlá žihání ohřevem laserovým nebo elektronovým svazkem apod.

Předpokládejme, že měřená teplota se změní skokem z hodnoty  $t_1$  na  $t_2$ . Reakce čidla na změnu teploty není okamžitá, ale probíhá s jistým zpožděním. Nejčastěji se předpokládá, že přechod signálu čidla z počáteční hodnoty na konečnou je dán tzv. přechodovou charakteristikou prvního řádu, která je popsána exponenciální funkcí dle vztahu

$$t(\tau) = t_2 - (t_2 - t_1)e^{-\frac{\tau}{\tau_m}} \quad (8.18)$$

kde  $\tau_m$  je časová konstanta zvaná relaxační doba. Ta je důležitým parametrem charakterizujícím rychlost reakce teplotního čidla.

Změříme-li časovou závislost teploty při přechodovém ději, získáme časovou konstantu  $\tau_m$  nejlépe prokladem exponenciální závislosti měřenými daty (pouze pochopitelně v úseku, kde se

teplota příslušně mění). Jiný přístup je založen na linearizaci měřené závislosti. Nejprve upravíme rovnici (8.18) tak, aby pravou stranu bylo možné logaritmovat

$$t(\tau) - t_2 = (t_1 - t_2) \cdot e^{-\frac{\tau}{\tau_m}} \quad (8.19)$$

Po logaritmování

$$\underbrace{\ln [(t(\tau) - t_2)]}_Y = -\underbrace{\frac{1}{\tau_m}}_{A \cdot X} \tau + \underbrace{\ln [(t_1 - t_2)]}_B \quad (8.20)$$

Pravá strana  $Y$  rovnice (8.20) je lineární funkcí času  $\tau$ . Spočteme-li si hromadně, např. v programu QtiPlot, pro každou dvojici  $\tau, t(\tau)$  z měření dvojici  $\tau, Y$  a vyneseme-li ji do grafu, ze směrnice přímky získané lineární regrese snadno určíme časovou konstantu  $\tau_m$ . Nevýhodou tohoto postupu je nutnost předem správně stanovit teplotu  $t_2$  a současně nepatříčné ovlivnění čtverců odchylek měřených hodnot od teoretické křivky logaritmováním.

## Úkoly

### Identifikace teplotních čidel, relaxační doba

1. V olejové lázni proměřte teplotní závislost elektrického odporu či napětí neznámých odporových a termoelektrických čidel. Pro měření slouží program *Teplota\_tab.vi*. Teplotu nechte vzrůstat v rozsahu 20–120 °C, závislosti zaznamenejte s krokem cca 5 °C. **Míchání nastavte velmi opatrně, ať magnet nerozbití rtuťový teploměr!** Naměřené závislosti vynesete do grafu a proložte vhodným typem závislosti. Využijte program *QtiPlot*. Posuďte linearitu čidel, identifikujte jednotlivá čidla.
2. Stanovte relaxační dobu vybraných čidel:
  - (a) zapouzdřeného čidla (např. odporového čidla Pt 1000),
  - (b) nezapouzdřeného čidla (např. termoelektrického článku typu K).

Po spuštění měření na PC pod čidla postavte horkovzdušnou pistoli, na které předem nastavíte teplotu 100 °C. Po ustálení charakteristik čidel pistoli rychle odsuňte a zaznamenejte pokles teploty čidel až na laboratorní teplotu. Naměřené časové závislosti proložte exponencíou, nebo nejprve linearizujte a proložte lineární závislostí. Z prokladu stanovte relaxační dobu včetně její nejistoty měření. Výsledky porovnejte a komentujte pozorované rozdíly.

### Měření s můstkem

1. Vyzkoušejte míru kompenzace ohřevu odporového čidla při můstkovém zapojení dvojice čidel. Umístěte obě čidla těsně k sobě, abychom mohli předpokládat stejnou teplotu bezprostředního okolí. Můstek zapojte do kanálu CH3 modulu NI 9219, napájení (cca 2,5 V) poskytuje dvojice svorek červená-černá, měření probíhá na svorkách červená-modrá. Vyvažte můstek, změřte si napájecí napětí při vyváženém můstku. Nechte protékat měřicí proud po dobu asi 10 minut (mezitím plňte jiné úkoly). Pak jedno čidlo vložte do těsné polystyrénové krabičky a opět vyčkejte asi 10 minut. Porovnejte a komentujte výsledky.

### Měření teploty infračerveným teploměrem

1. Vyhřejte měděnou desku pokrytou černým, bílým a aluminiovým žáruvzdorným lakem na plýnkovém vařiči asi na teplotu asi 300 °C. Poté vařič vypněte. Nastavte na IR teploměru emisivitu  $\epsilon = 1$ . Z údaje IR teploměru získaného z lesklého a černého povrchu a skutečné

teploty desky měřené termočlánkem určete emisivity všech tří povrchů. V praxi máme k dispozici např. IR teploměr OSXL689 s optikou 1 : 50 a s minimálním průměrem snímané oblasti  $D_{min} = 20$  mm. Kruhem z laserových stop přístroj vyznačuje aktuální oblast, z níž snímá IR záření, což činí práci s tímto měřicím přístrojem velmi pohodovou a pohodlnou. Pokud použijete kontaktní termočlávkovou sondu, nejprve odhadněte její relaxační dobu při ohřevu, tj. za jak dlouho po jejím přiložení k měřenému povrchu se její teplota s teplotou povrchu vyrovná.

- Změřte teplotu černého povrchu zahřátého asi na  $300^{\circ}\text{C}$  přes „okénko“ z různých materiálů. Porovnejte vždy teploty měřené pouze infračerveným teploměrem s okénkem a bez okénka. Máme sadu „okének“, která zahrnuje polykarbonát, sklo,  $\text{SiO}_2$ ,  $\text{NaCl}$ ,  $\text{CaF}_2$  a  $\text{KBr}$  (dielektrika),  $\text{Si}$  a  $\text{GaAs}$  (polovodiče) a  $\text{Cu}$  (kov). **Samotných okének se NEDOTÝKEJTE, ani je NEPŘIKLÁDEJTE do blízkosti vařiče.** Určete propustnost okének  $\mathcal{T}$  v infračervené oblasti snímané teploměrem. Zvažte, zda pro výpočet propustnosti použijete vztah (8.16) nebo (8.17). Pozorování v protokolu komentujte a vysvětlete.
- Změřte teplotu měděné plotny předem vychlazené v mrazničce pomocí kontaktního a IR teploměru. Oběma teploměry proměřte a) povrch s námrazou, b) čistý kovový povrch, ze kterého námrazu setřete žiletkou. Porovnejte údaje z obou teploměrů a spočítejte emisivitu obou povrchů. Jakou „barvu“ má led?

## 8.A Koeficienty teplotních čidel

Kód	Složení	Teplotní rozsah (dlouhodobý)	$\beta$ ( $\mu\text{V}/^{\circ}\text{C}$ )		
			při $100^{\circ}\text{C}$	při $500^{\circ}\text{C}$	při $1000^{\circ}\text{C}$
K	NiCr(+) NiAl(-) chromel - alumel	0 až 1100	42	43	39
T	Cu(+) CuNi(-) měď - konstantan	-185 až 300	46		
J	Fe(+) CuNi(-) železo - konstantan	20 až 700	54	56	59
N	NiCrSi(+) NiSiMg(-) nicosil - nisil	0 až 1100	30	38	39
E	NiCr(+) CuNi(-) chromel - konstantan	0 až 800	68	81	
R	PtRh13 Pt platina rhodium - platina	0 až 1600	8	10	13
S	PtRh10 Pt platina rhodium - platina	0 až 1550	8	9	11
G	W(+) WRh(-) wolfram - wolfram rhenium	20 až 2320	5	16	21

Tabulka 8.1: Seebeckův koeficient  $\beta$  termoelektrických čidel

### 8.A.1 Lineární aproximace teplotní závislosti kovových odporových čidel

$$R = R_0(1 + \alpha\Delta t)$$

materiál	$\alpha(K^{-1})$		teplotní rozsah použití
	v celém teplotním rozsahu	v intervalu 0 – 100 °C	
Pt	$0,385 - 0,391 \cdot 10^{-2}$	$0,385 \cdot 10^{-2}$	-20 až 850 °C
Ni	$0,617 - 0,675 \cdot 10^{-2}$	$0,618 \cdot 10^{-2}$	-70 až 200 °C
Cu	$0,426 - 0,433 \cdot 10^{-2}$	$0,426 \cdot 10^{-2}$	-50 až 150 °C

Tabulka 8.2: Koeficient  $\alpha$  kovových odporových čidel

### 8.A.2 Polynomiální aproximace teplotní závislosti kovových odporových čidel

Pro platinový snímač a teplotní rozsah -200 °C až 0 °C je teplotní závislost odporu dána vztahem

$$R_t = R_0[1 + At + Bt^2 + Ct^3(t - 100)]$$

a pro teplotu vyšší než 0 °C vztahem

$$R_t = R_0(1 + At + Bt^2)$$

kde

$R_0$  je odpor při teplotě 0 °C

$$A = 3,908\,02 \cdot 10^{-3} K^{-1}$$

$$B = -5,801\,95 \cdot 10^{-7} K^{-2}$$

$$C = -4,273\,50 \cdot 10^{-12} K^{-3}$$

Pro teplotní závislost odporu niklového snímače lze použít v celém pracovním rozsahu vztah

$$R_t = R_0(1 + At + Bt^2 + Ct^4 + Dt^6)$$

kde

$$A = 5,485 \cdot 10^{-3} K^{-1}$$

$$B = 6,65 \cdot 10^{-6} K^{-2}$$

$$C = 2,805 \cdot 10^{-11} K^{-4}$$

$$D = 2,0 \cdot 10^{-17} K^{-6}$$

Potřebnou inverzní závislost získáme nejnázorněji numericky, proložení vhodného polynomu inverzní funkcí  $t(R)$  (prosté prohození sloupců  $X$  a  $Y$  při kreslení grafu)

## 8.B Měření teploty s odporovými čidly v můstkovém zapojení – jedno čidlo v můstku

Zapojíme-li do Wheatstonova můstku (viz obr. 8.14) místo odporu  $R_1$  kovové odporové čidlo, v lineární aproximaci teplotní závislosti odporu čidla dostaneme pro rovnováhu na můstku

$$\frac{R_0(1 + \alpha\Delta t)}{R_2} = \frac{R_3}{R_4} \quad (8.21)$$

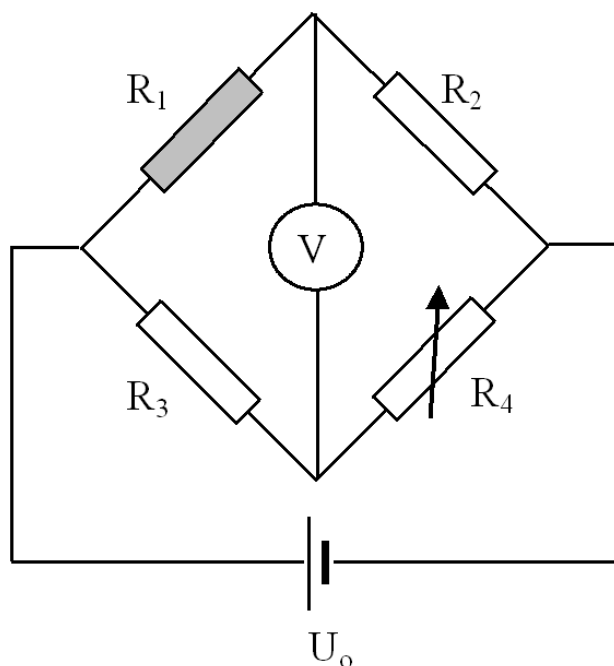
kde  $R_0$  je odpor čidla při jisté srovnávací teplotě a  $\alpha$  teplotní odporový koeficient. Odtud jednoduše získáme

$$\Delta t = \frac{1}{\alpha} \frac{R_3 R_2}{R_4 R_0} - 1. \quad (8.22)$$

Pokud měříme napětí voltmetrem s velmi vysokým vnitřním odporem, pak i v případě nevyváženého můstku poteče odpory  $R_1$  a  $R_2$  stejný proud (označíme  $I_1$ ). Podobně symbolem  $I_2$  budeme značit proud tekoucí odpory  $R_3$  a  $R_4$ . Zřejmě platí

$$(R_1 + R_2)I_1 = U_o \quad (8.23)$$

$$(R_3 + R_4)I_2 = U_o \quad (8.24)$$



Obrázek 8.14: Zapojení odporového čidla do můstku. Čidlo je na místě šedého obdélníku

přičemž stejně jako dříve je na místě odporu  $R_1$  odporové teplotní čidlo s teplotní závislostí  $R_1 = R_0(1 + \alpha\Delta t)$ .

Pokud byl můstek při teplotě  $t_0$  vyvážen, plyne z 2. Kirchhoffova zákona pro levou smyčku vztah

$$R_0 I_1 = R_3 I_2, \quad (8.25)$$

odkud po dosazení z rovnic (8.23) a (8.24) dostaneme

$$\frac{R_0}{R_0 + R_2} = \frac{R_3}{R_3 + R_4} \quad (8.26)$$

Není-li můstek vyvážen, plyne obdobně z 2. Kirchhoffova zákona pro levou smyčku rovnice

$$R_1 I_1 = R_3 I_2 + U. \quad (8.27)$$

Po dosazení teplotní závislosti odporu a malých úpravách získáme vztah

$$U_o \left[ \frac{R_0(1 + \alpha\Delta t)}{R_0(1 + \alpha\Delta t) + R_2} - \frac{R_3}{R_3 + R_4} \right] = U. \quad (8.28)$$

Pokračujeme v úpravách výrazu v hranaté závorce:

$$U_o \left[ \frac{R_0(1 + \alpha\Delta t)}{R_0 + R_2 + R_0\alpha\Delta t} - \frac{R_3}{R_3 + R_4} \right] = U$$

$$U_o \left[ \frac{R_0}{R_0 + R_2} \cdot \frac{1 + \alpha\Delta t}{1 + \frac{R_0\alpha\Delta t}{R_0 + R_2}} - \frac{R_3}{R_3 + R_4} \right] = U.$$

Pro úpravu složeného zlomku využijeme aproximaci

$$\frac{1}{1 + x} \doteq 1 - x \quad \text{pro } x \ll 1$$

s jejíž pomocí dostaneme

$$U_o \left[ \frac{R_0}{R_0 + R_2} \cdot (1 + \alpha \Delta t) \left( 1 - \frac{R_0 \alpha \Delta t}{R_0 + R_2} \right) - \frac{R_3}{R_3 + R_4} \right] = U. \quad (8.29)$$

S využitím rovnice (8.26) a po roznásobení závorek dostaneme

$$U_o \left[ \frac{R_0}{R_0 + R_2} \cdot (1 + \alpha \Delta t) \left( 1 - \frac{R_0 \alpha \Delta t}{R_0 + R_2} \right) - \frac{R_3}{R_3 + R_4} \right] = U. \quad (8.30)$$

Třetí člen v závorce je druhého řádu malosti a můžeme jej vzhledem k prvním dvěma členům zanedbat. Dále algebraickými úpravami vyloučíme veličinu  $\Delta t$

$$\Delta t = \frac{U}{\alpha U_o} \frac{R_3 + R_4}{R_3} \frac{1}{1 - \frac{R_3}{R_3 + R_4}} \quad (8.31)$$

a po odstranění složeného zlomku získáme výsledný vztah

$$\Delta t = \frac{U}{\alpha U_o} \frac{(R_3 + R_4)^2}{R_3 R_4}. \quad (8.32)$$

Vidíme, že měřená teplota je přímo úměrná napětí na můstku; konstanta úměrnosti je určena použitým napájecím napětím a hodnotami odporů v můstku. Pokud použijeme symetrický můstek, pro který při vyvážení platí  $R_0 = R_2 = R_3 = R_4$ , rovnice se zjednoduší na

$$\Delta t = \frac{4U}{U_o \alpha} \quad (8.33)$$

Je však třeba mít na mysli, že uvedený postup vedoucí k jednoduší přímé úměře mezi měřeným napětím a teplotou využil několika aproximací, které jsou tím lépe splněny, čím je teplotní rozdíl vzhledem ke srovnávací teplotě menší.

## 8.C Měření teploty s odporovými čidly v můstkovém zapojení – dvě čidla v můstku

Klasický Wheatstoneův můstek je na obrázku (8.16). Při vyvážení můstku (tj. když na voltmetru je nulové napětí) platí

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4} \quad (8.34)$$

Pokud místo  $R_1$  a  $R_2$  zapojíme dvě odporová čidla, dostaneme

$$\frac{R_0(1 + \alpha t_1)}{R_0(1 + \alpha t_2)} = \frac{R_3}{R_4}, \quad (8.35)$$

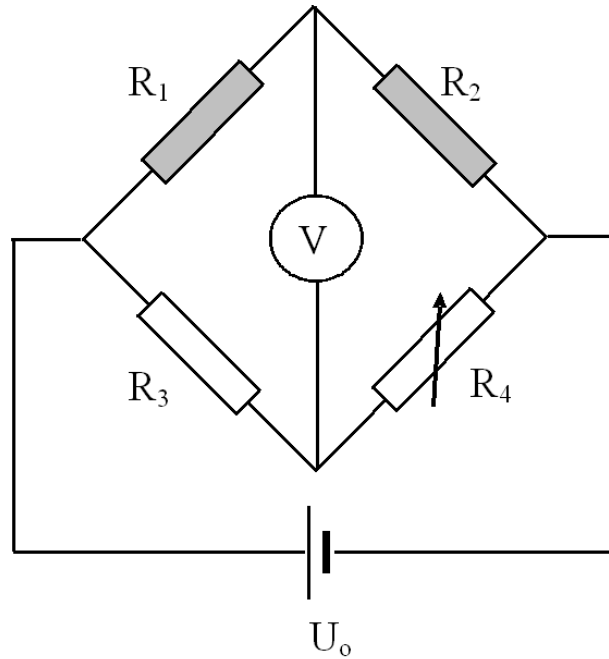
kde  $R_0$  je odpor čidla při jisté srovnávací teplotě a  $\alpha$  teplotní odporový koeficient<sup>2</sup>, odkud po jednoduchých úpravách s využitím aproximace

$$\frac{1}{1+x} \doteq (1-x) \text{ pro } x \ll 1$$

získáme

$$t_2 - t_1 = \frac{1}{\alpha} \left( \frac{R_3}{R_4} - 1 \right). \quad (8.36)$$

<sup>2</sup>Předpokládáme, že takto měříme malé rozdíly teplot, pro které můžeme vždy použít lineární vztah mezi teplotou a odporem.

Obrázek 8.15: Wheatstoneův můstek se dvěma odporovými čidly  $R_1$  a  $R_2$ 

Pro praktické měření je ovšem výhodnější jiný postup. Před měřením vyvážíme můstek za situace, kdy jsou obě čidla na stejné teplotě. Přitom, použijeme-li shodných čidel, můžeme předpokládat, že při vyvážení bude  $R_3 = R_4$ . Při vlastním měření pak můstek nevyvažujeme, ale pouze měříme napětí voltmetrem v úhlopříčce můstku. Tento postup lze snáze automatizovat, protože měření napětí a sběr těchto dat počítačem je standardní a snadný úkol, zatímco automatické vyvažování můstku by byl experimentální problém.

Odvodíme potřebné vztahy. Pokud měříme napětí voltmetrem s velmi vysokým vnitřním odporem (a všechny digitální voltmetry nebo přídavné měřicí karty do PC tuto podmínku splňují), pak i v případě nevyváženého můstku poteče odpory  $R_1$  a  $R_2$  stejný proud (označíme  $I_1$ ). Podobně symbolem  $I_2$  budeme značit proud tekoucí odpory  $R_3$  a  $R_4$ . Zřejmě platí

$$(R_1 + R_2) I_1 = U_o \quad (8.37)$$

$$(R_3 + R_4) I_2 = U_o \quad (8.38)$$

Není-li můstek vyvážen, plyne z 2. Kirchhoffova zákona pro levou smyčku vztah

$$R_1 I_1 = R_3 I_2 + U \quad (8.39)$$

kde  $U$  je napětí měřené na voltmetru v úhlopříčce můstku.

Odtud s použitím rovnic (8.37) a (8.38) dostaneme

$$\frac{R_1 U_o}{R_1 + R_2} = \frac{R_3 U_o}{R_3 + R_4} + U \quad (8.40)$$

V dalším použijeme již výše zmíněný předpoklad  $R_3 = R_4 \equiv R$  spolu s vyjádřením teplotní závislosti odporu obou čidel ve tvaru

$$R_1 = R_0(1 + \alpha \Delta t_1), \quad (8.41)$$

$$R_2 = R_0(1 + \alpha \Delta t_2) \quad (8.42)$$

kde  $\Delta t_1$  a  $\Delta t_2$  jsou změny teploty obou čidel oproti teplotě, za které byl můstek vyvážen. Dosažením do rovnice (8.40) a po malých úpravách máme

$$U_o \frac{R_0(1 + \alpha \Delta t_1)}{R_0(1 + \alpha \Delta t_1 + 1 + \alpha \Delta t_2)} - \frac{RU_o}{R + R} = U \quad (8.43)$$

což lze převést na tvar

$$\frac{U_o}{2} \frac{1 + \alpha \Delta t_1}{1 + \frac{\alpha}{2} (\Delta t_1 + \Delta t_2)} - \frac{U_o}{2} = U \quad (8.44)$$

Podobně jako v předchozím odvození použijeme aproximaci

$$\frac{1}{1+x} \doteq (1-x) \text{ pro } x \ll 1,$$

s jejíž pomocí získáme vztah

$$\frac{U_o}{2} \left\{ 1 + \alpha \Delta t_1 - \frac{\alpha}{2} \Delta t_1 - \frac{\alpha}{2} \Delta t_2 - \left[ \frac{\alpha^2}{2} \Delta t_1 (\Delta t_1 + \Delta t_2) \right] - 1 \right\} = U \quad (8.45)$$

Od začátku se snažíme najít vztah pro případ, kdy změny teploty jsou jen malé (tj.  $\alpha \Delta t \ll 1$ ). V tom případě je člen v hranaté závorce druhého řádu malosti a můžeme jej zanedbat. Odtud již jednoduchými úpravami dostaneme výsledný vztah

$$\Delta t = \frac{4U}{U_o \alpha} \quad (8.46)$$

kde  $\Delta t = \Delta t_1 - \Delta t_2$  je rozdíl teplot mezi oběma čidly.

## 8.D Měření malých teplotních rozdílů

Teplotní rozdíl ve dvou místech prostoru můžeme samozřejmě vždy měřit tak, že změříme obě teploty samostatnými teploměry a pak tyto hodnoty od sebe odečteme. Tento postup je však nevýhodný a v případech, kdy měřený rozdíl teplot je malý, dokonce prakticky nepoužitelný. Uvážíme-li, že chyba běžných elektrických teploměrů (odporových či termoelektrických) je v řádu desetin °C, je zřejmé, že snaha takto měřit teplotní rozdíly stejného řádu bude jen velmi málo přesná<sup>3</sup>. Mnohem výhodnější je využít snímače, který je konstruován tak, aby měřil přímo teplotní rozdíl. Vyhneme se tak nutnosti měřit malou změnu veličiny na pozadí velké hodnoty, což je experimentálně vždy nevhodné.

Pro měření teplotního rozdílu lze využít dvou metod využívajících elektrická snímací čidla:

1. dvojitý termoelektrický článek,
2. dvě odporová čidla zapojená do můstku.

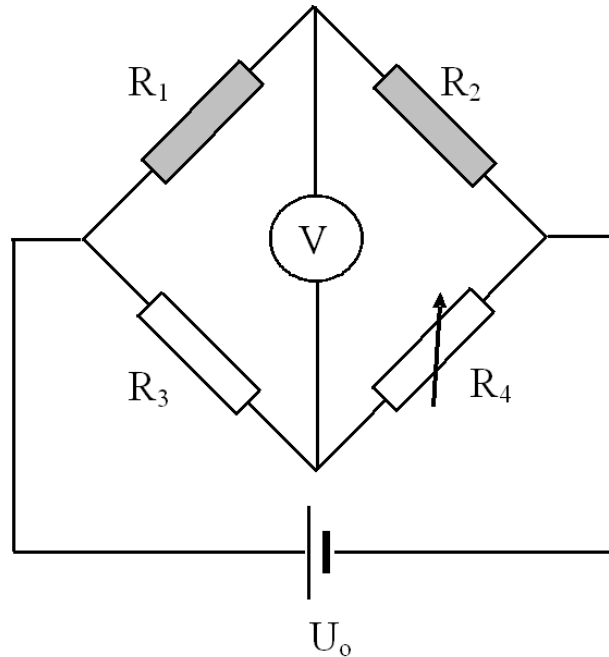
Zatímco termoelektrický článek je snímač, který v principu měří právě rozdíl teplot, dvojici odporových čidel zapojíme do můstku namísto rezistorů  $R_1$  a  $R_2$  (viz obr. 8.16). Čidla nejprve uvedeme na stejnou teplotu a můstek vyvážíme (při shodných čidlech  $R_3 = R_4$ ). Potom při oddálení čidel nám rozladění můstku, tj. příčně napětí na můstku, indikuje rozdílnost teplot obou čidel. Při malém rozladění lze pro teplotní rozdíl  $\Delta t$  mezi oběma čidly odvodit vztah (viz příloha 8.C)

$$\Delta t = \frac{4U}{U_o \alpha}, \quad (8.47)$$

kde  $U_o$  je napájecí napětí a  $\alpha$  teplotní koeficient odporu.

<sup>3</sup>Příkladem situace, kdy co nejpresnější měření teplotní rozdílu je velmi důležité, je měření vstupní a výstupní teploty topného média při vytápění objektů, jež je nutné pro měření odebraného tepla a následnou kalkulaci topných nákladů. K tomu se používají tzv. „párované snímače teploty“, což je dvojice snímačů tvořící samostatně kalibrovaný a neoddělitelný pár, viz např. <http://www.sensit.cz/>



Obrázek 8.16: Wheatstoneův můstek se dvěma odporovými čidly  $R_1$  a  $R_2$ 

### Srovnání termoelektrických a odporových snímačů

Srovnáme nyní citlivost obou zmíněných metod. Měřený rozdíl teplot je v obou případech určen z měřeného napětí  $U$ : u dvojice odporových čidel podle vztahu (8.47) a pro dvojitý termoelektrický článek dle rovnice (8.9).

Teplotní rozdíl je vždy přímo úměrný měřenému napětí. Ze zákona šíření chyb pak plyne, že relativní chyba teplotního rozdílu bude v obou případech rovna relativní chybě měřeného napětí. Absolutní chyba  $S_{\Delta t}$  je určena číselnou hodnotou multiplikační konstanty, tj.

$$S_{\Delta t} = \frac{4S_U}{U_o\alpha} \text{ (odporové);} \quad S_{\Delta t} = \frac{S_U}{\beta} \text{ (termoelektrický článek)} \quad (8.48)$$

Dosadíme-li typické číselné hodnoty [1] dostaneme

$$S_{\Delta t} = 1000 \cdot S_U \text{ (odporové);} \quad S_{\Delta t} = 25000 \cdot S_U \text{ (termoelektrický článek),} \quad (8.49)$$

kde jsme použili  $U_o = 1V$ .

Vidíme, že použití dvojice odporových čidel poskytuje mnohem vyšší citlivost. Chceme-li měřit teplotní rozdíl s chybou  $1^\circ C$ , stačí u odporových čidel měřit napětí s citlivostí  $1 \text{ mV}$ , zatímco termoelektrické články požadují desítky  $\mu V$ . Na druhé straně odporová čidla vyžadují přesný stabilizovaný zdroj napětí a navíc měření může být zatíženo systematickou chybou danou ohřevem snímače průchodem proudem<sup>4</sup>. Právě poslední skutečnost neumožňuje zvyšovat citlivost odporového můstku zvětšováním napájecího napětí  $U_o = 1V$ . Další výhodou termoelektrický snímačů je snadná dostupnost nezapouzdřených snímačů s malou tepelnou kapacitou, což je důležitý parametr omezující měření rychlých změn teploty v čase. Odporová čidla jsou běžně zapouzdřená a jejich tepelná kapacita je vyšší.

<sup>4</sup>Uvědomme si však, že případný ohřev odporového snímače je u relativní můstkové metody do značné míry kompenzován. Kompenzace řady systematických chyb je charakteristickou výhodou relativních měřících metod obecně.

## Úloha 9

# Měření elektrického napětí a proudu

### 9.1 Elektrická měření a elektrické měřicí přístroje

Měření elektrických veličin – proudu a napětí, případně odporu a výkonu – patří ke zcela základním experimentálním technikám. Jejich použití se neomezuje pouze na sledování elektrických jevů. V současné době je patrný trend převádět i jiné, neelektrické veličiny, na napětí nebo proud pomocí speciálních snímačů, a tím roste význam správného měření elektrických veličin.

### 9.2 Typy měřicích přístrojů

Přístroje pro měření proudu a napětí dělíme na ručkové (analogové) a číslicové (digitální). Rozdíl není jen ve způsobu zobrazování naměřené hodnoty, ale především v konstrukci přístroje, a z ní plynoucích rozdílných vlastnostech.

Vlastnosti měřicího přístroje určuje zejména **vnitřní odpor**  $R_i$ , který je definován jako podíl napětí na svorkách přístroje  $U_p$  a proudu  $I_p$ , který přístrojem prochází

$$R_i = \frac{U_p}{I_p}. \quad (9.1)$$

Obecně platí, že kvalitní voltmetry by měly mít hodnotu vnitřního odporu co největší, zatímco kvalitní ampérmetry co nejmenší. Zdůvodnění najdete v kapitolách 9.3 a 9.4. Místo označení  $R_i$  budeme v následujícím textu používat  $R_A$  pro ampérmetr a  $R_V$  pro voltmetr.

#### 9.2.1 Ručkové měřicí přístroje

Tyto přístroje využívají silové interakce mezi magnetickým polem a cívkou, kterou protéká měřený proud<sup>1</sup>. Nejčastější uspořádání je tzv. magnetoelektrický (deprézský) systém, kde je ručka spojena s otočnou cívkou umístěnou v poli permanentního magnetu. Při průchodu proudu působí na cívku silový moment, který je úměrný proudu. Cívka a s ní spojená ručka zaujme takovou polohu, ve které je moment magnetické síly roven vratnému momentu pružiny. Celý pohyblivý systém cívka + ručka má jistý nenulový moment setrvačnosti. Proto přístroj není s to registrovat rychlé změny měřeného signálu a okamžitá výchylka ručky je úměrná střední hodnotě měřeného proudu.

Pokud chceme tímto přístrojem měřit střídavý proud, je nutné proud usměrnit diodou zapojenou do série s přístrojem.

Důležité je, že přístroj v principu měří proud, i když jej lze použít pro měření napětí. Vždy tedy musí přístrojem určitý proud procházet, což může významně ovlivnit děje v obvodu, ve kterém je přístroj zapojen.

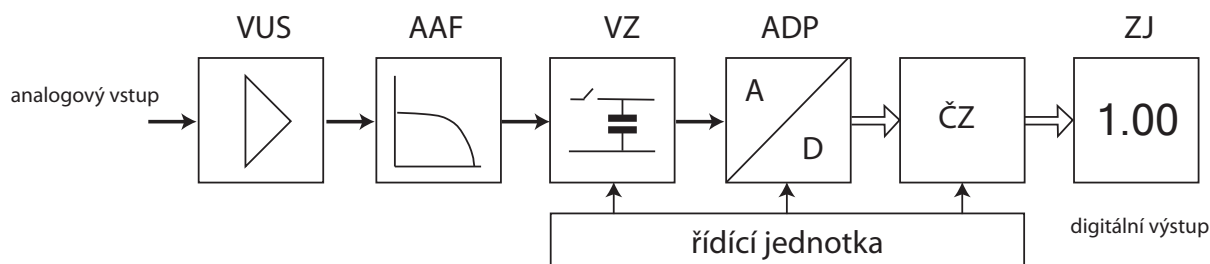
---

<sup>1</sup>Existují ručkové přístroje založené i na odlišném principu, jsou však méně časté.

### 9.2.2 Digitální měřicí přístroje

Digitální přístroj je elektronický systém, který provádí převod měřené analogové veličiny na digitální signál. Převod spojitého analogového signálu na digitální proud čísel vyžaduje provádění:

- vzorkování signálu v čase – odběr vzorku vstupního signálu v určitých okamžicích daných vzorkovacími impulsy,
- kvantování vzorků v hodnotě – zaokrouhlení odebraného vzorku na hodnotu nejbližší tzv. kvantovací úrovně,
- kódování – vyjádření kvantovaných hodnot určitým kódem (např. nezáporným celým číslem).



Obrázek 9.1: Obecné schéma digitálního přístroje. VUS – vstupní úprava signálu, AAF – antialiasingový filtr, VZ – vzorkovač, ADP – analogově digitální převodník, ČZ – číslicové zpracování, ZJ – zobrazovací jednotka

Blokové schéma digitálního přístroje je na obrázku 9.1. Analogový signál může být nejprve vhodně upraven (např. zesílen) v bloku vstupní úpravy signálu (VUS). Antialiasingový filtr (AAF) zajistí korektní záznam rychlých periodických dějů. Je to v principu dolnofrekvenční propust, která ze signálu odstraňuje frekvence vyšší než je polovina vzorkovací frekvence. Vzorkovač (VZ) provede odběr vzorku analogového signálu a zajistí jeho neměnnost během převodu. Samotný převod (kvantování a kódování) provede analogově/digitální převodník (A/D převodník, ADP). Výsledné číslo je zpracováno v bloku číslicového zpracování (ČZ), např. přepočteno podle kalibrace přístroje, a zobrazeno na displeji.

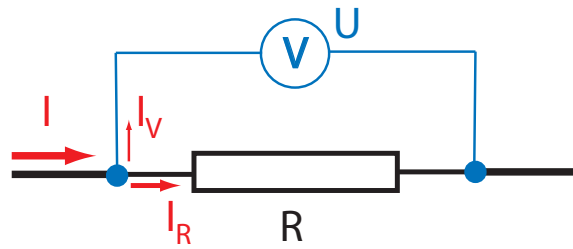
Protože digitální měřicí přístroje pracují s číselnou reprezentací měřené hodnoty, je poměrně snadné je doplnit o obvody, které zajistí přenesení naměřené hodnoty do počítače po některém ze standardních rozhraní (RS-232, USB, GPIB, atd.). Digitální přístroje lze proto často ovládat přímo z počítače. Případně jsou určeny pouze pro práci s počítačem, který pomocí obslužného softwaru využívají pro zobrazování, záznam či další zpracování dat.

Mezi digitální přístroje řadíme např. univerzální digitální multimetry, digitální osciloskopy nebo měřicí karty, které se připojují přímo na sběrnici počítače nebo přes standardní rozhraní. Významnou vlastností digitálních přístrojů je vysoký vnitřní odpor, který zajišťuje velmi malý odběr elektrického proudu při vlastním měření.

Více informací týkajících se problematiky A/D a D/A převodu se dočtete v části automatizace měření.

### 9.3 Měření elektrického napětí

Elektrické napětí mezi dvěma body prostoru (konkrétně při měřeních mezi dvěma body elektrického obvodu) je definováno jako rozdíl elektrických potenciálů v těchto bodech. Chceme-li

Obrázek 9.2: Měření napětí na odporu  $R$ 

elektrické napětí měřit, musíme svorky měřicího přístroje – voltmetru – co nejlépe vodivě spojit se zmíněnými body. Například měření napětí na elektrickém odporu  $R$  realizujeme pomocí zapojení dle obr. 9.2

**Voltmetr zapojujeme paralelně s prvkem, na kterém chceme napětí měřit.**

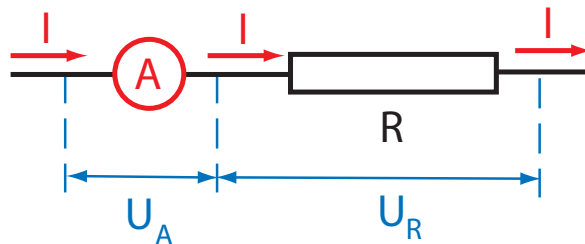
Vzhledem ke konečnému vnitřnímu odporu voltmetru protéká měřicím přístrojem proud, což může být nežádoucí jev. Ideální voltmetr je tedy ten, který má nekonečný vnitřní odpor. Digitální přístroje jsou z tohoto hlediska podstatně lepší než přístroje analogové.

#### Kontrolní otázka č. 1

Co by se stalo, kdybychom zapojili typický voltmetr do obvodu sériově? Došlo by k poškození voltmetru nebo měřeného prvku? Dala by se naměřená hodnota považovat za správnou?

## 9.4 Měření elektrického proudu

**Ampérmetr zapojujeme sériově s měřeným prvkem** (viz obr. 9.3), protože měřený proud protékající prvkem musí protékat i přístrojem. Ideální ampérmetr má nulový vnitřní odpor.

Obrázek 9.3: Měření proudu protékajícího odporem  $R$ 

#### Kontrolní otázka č. 2

Co by se stalo, kdybychom zapojili typický ampérmetr paralelně k měřenému prvkem? Došlo by k poškození ampérmetru nebo měřeného prvku? Dala by se naměřená hodnota považovat za správnou?

## 9.5 Určení nejistoty měření napětí a proudu

Jako při každém jiném měření i v případě měření elektrických veličin jsou naměřené hodnoty zatíženy experimentálními chybami, ať už systematickými nebo náhodnými. U elektrických měřicích

přístrojů opakováním měření obvykle dostaneme stejné hodnoty – nejistota typu A je tedy nulová. Měření má proto smysl provádět jen jedenkrát a za nejistotu měření bereme nejistotu typu B, kterou nám udává výrobce přístroje.

### 9.5.1 Určení nejistoty typu B ručkových přístrojů

Ke stanovení nejistoty typu B ručkových přístrojů se standardně používá veličina zvaná třída přesnosti, která bývá vyznačena přímo na stupnici měřicího přístroje. **Třída přesnosti určuje největší dovolenou (mezní) chybu měření jako procento z aktuálního rozsahu přístroje. Standardní nejistota typu B se rovná této chybě.**

Zde je nutné si uvědomit jednu důležitou skutečnost. Nejistota přístroje je dána rozsahem, nikoliv měřenou hodnotou. Je tedy zřejmé, že měření bude tím přesnější (tj. tím menší bude relativní nejistota), čím bude měřená hodnota bližší maximální měřitelné hodnotě, tj. rozsahu přístroje. Na přístrojích s měnitelným rozsahem se vždy snažíme měřit tak, aby ručka byla pokud možno nejvíce vpravo, blíže k maximální hodnotě.

---

**Příklad: Určení nejistoty měření ručkového přístroje** Měříme napětí 4,52 V na voltmetru s třídou přesnosti 0,5 s rozsahem 10 V. Mezní nejistota měřené hodnoty je rovna 0,5 % z 10 V, tedy 0,05 V. Výsledek je tedy

$$U = (4,52 \pm 0,05) \text{ V}$$

Třída přesnosti a z ní spočtená mezní chyba nemá význam krajní nejistoty normálního rozdělení, neboť přístroje s určitou třídou přesnosti dávají spíše větší odchylky od správné hodnoty než odchylky menší, jinak by byly zařazeny do lepší třídy. Při použití bimodálního rozdělení je **standardní nejistota typu B rovna mezní chybě.**

### 9.5.2 Určení nejistoty typu B digitálních přístrojů

Krajní nejistotu typu B počítáme pomocí vztahu uvedeného v návodu k digitálnímu měřicímu přístroji. Obvykle jde o součet příspěvků úměrných měřené hodnotě a měřicímu rozsahu. Použitá zkratka slova *digits* značí počet jednotek na posledním desetinném místě aktuálního rozsahu.

---

**Příklad: Určení nejistoty měření digitálního měřicího přístroje** Hodnota napětí 4,524 V byla naměřena měřicím přístrojem METEX M3890 D (na rozsahu 20 V). V manuálu je pro výpočet nejistoty uvedeno  $\pm(0,8\% + 2 \text{ dgs})$ . První číslo udává procento z měřené hodnoty, druhé číslo je počet jednotek na posledním desetinném místě aktuálního rozsahu (tzv. digits). Pro danou hodnotu je krajní nejistota rovna

$$0,8\% \text{ z } 4,524 \text{ V} + 2 \cdot 0,001 \text{ V} = 0,036 \text{ V} + 0,002 \text{ V} = 0,038 \text{ V}.$$

Výsledek zapíšeme po zaokrouhlení ve tvaru

$$U = (4,52 \pm 0,04) \text{ V} \quad (p = 99,7\%).$$

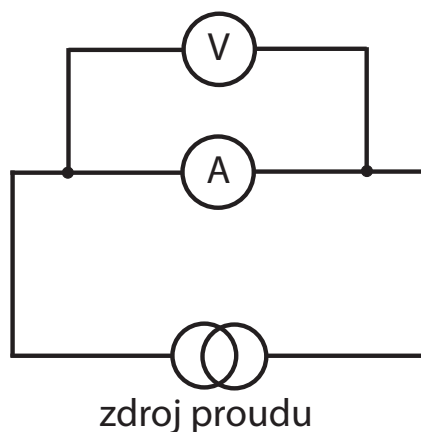
Standardní nejistota  $u_B$ , vystupující v zákonu přenosu nejistoty, je potom rovna třetině krajní nejistoty.

## 9.6 Měření vnitřního odporu ručkového měřicího přístroje

Vnitřní odpor většinou udává výrobce přístroje, u ručkového přístroje je však možné relativně jednoduše vnitřní odpor určit. Lze pro to použít dvě metody.

### 9.6.1 Z Ohmova zákona

Měřicí přístroj (zde ampérmetr) zapojíme do obvodu dle obr. 9.4. Měříme proud procházející ampérmetrem a současně i spád napětí na jeho svorkách. Odpor určíme přímo z Ohmova zákona.



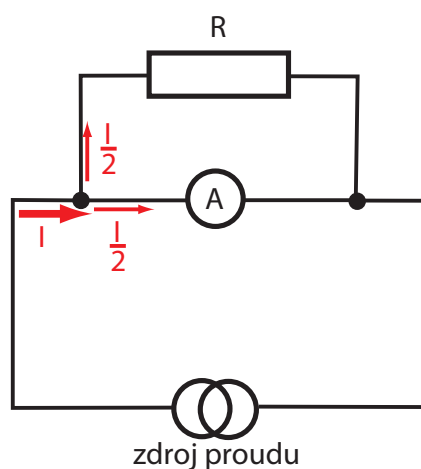
Obrázek 9.4: Měření vnitřního odporu ampérmetru z Ohmova zákona

### Kontrolní otázka č. 3

Je třeba při tomto experimentu korigovat vliv měřicích přístrojů, tak, jak jsme to ukázali výše při měření odporu metodami A a B?

### 9.6.2 Substituční metoda

Druhá metoda využívá stavitelného odporu, tzv. odporové dekády. Použijeme zapojení dle obr. 9.5, které se liší do zapojení předchozího (obr. 9.4) pouze tím, že vyměníme voltmetr za odporovou dekádu  $R$ . Nejprve necháme dekádu nepřipojenu a říditelným zdrojem nastavíme na ampérmetru určitou výchylku (například na maximum rozsahu). Poté dekádu připojíme a snažíme se nastavením hodnoty jejího odporu dosáhnout poloviční výchylky na ampérmetru. Pokud máme jistotu, že zdroj dodává do obvodu stále stejný proud (a zdroj u této úlohy uvedenou podmínku splňuje), musí nyní protékat oběma větvemi shodný proud. To nastane tehdy, když odpory v obou větvích jsou stejné, a tedy vnitřní odpor přístroje je roven odporu nastavenému na dekádě.



Obrázek 9.5: Měření vnitřního odporu ampérmetru pomocí odporové dekády

## 9.7 Změna rozsahu měřicích přístrojů

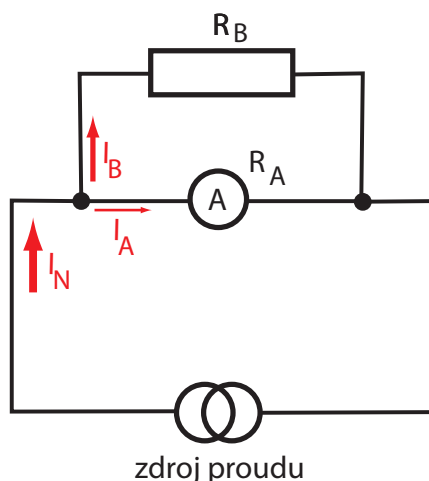
Mezi ampérmetrem a voltmetrem není z principiálního hlediska žádný rozdíl. Oba přístroje mohou měřit jak napětí, tak i proud. Uživatelská odlišnost těchto přístrojů spočívá v cejchování stupnice a v hodnotě vnitřního odporu, který bývá typicky u ampérmetru malý a u voltmetru velký. Můžeme tedy po malých úpravách použít tentýž systém jak pro měření napětí, tak i pro měření proudu, a dokonce můžeme i v jistých mezích měnit rozsahy obou přístrojů. Způsob, jakým to lze zajistit, si ukážeme v následujících odstavcích.

### Kontrolní otázka č. 4

Mějme analogový měřicí přístroj z výroby cejchovaný jako ampérmetr rozsahu 10 A. Víme, že přístroj má vnitřní odpor  $0,2\ \Omega$ . Kdybychom tento přístroj chtěli bez jakékoliv úpravy použít jako voltmetr, jaký by byl jeho rozsah?

### 9.7.1 Změna rozsahu ampérmetru

Obecně můžeme rozsah přístroje pouze zvětšit. Měřený proud rozdělíme do dvou větví. Do první větve zapojíme měřicí přístroj a do druhé větve odpor vhodné velikosti, tzv. bočník (viz obr. 9.6). Funkce bočníku je velmi jednoduchá. Označíme-li  $I_N$  nový proudový rozsah přístroje a  $I_A$



Obrázek 9.6: Zapojení bočníku

maximální proud, který může téci měřicím přístrojem, je nový proudový rozsah  $n$ -krát větší než původní

$$I_N = n \cdot I_A.$$

Z tohoto proudu může téci jeden díl přístrojem a zbytek musí být veden bočníkem

$$I_B = I_N - I_A = (n - 1)I_A.$$

Protože napětí je na měřicím přístroji a na bočníku stejné,

$$R_B I_B = R_A I_A = U,$$

kde  $R_B$  je odpor bočníku a  $R_A$  odpor ampérmetru, lze  $(n - 1)$ -krát většího proudu  $I_B$  bočníkem dosáhnout jen  $(n - 1)$ -krát menším odporem bočníku

$$R_B = \frac{R_A I_A}{I_B} = \frac{R_A}{n - 1}.$$

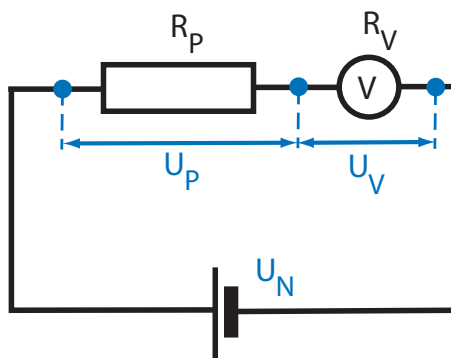
Odpor bočníku tedy musí být roven

$$R_B = \frac{R_A}{\frac{I_N}{I_A} - 1}. \quad (9.2)$$

**Příklad: Zvětšení rozsahu ampérmetru  $10\times$**  Chceme-li použít přístroj původního rozsahu  $100\ \mu\text{A}$  pro měření proudu do  $1\ \text{mA}$ , musí při tomto proudu protékat bočníkem  $900\ \mu\text{A}$  a vlastním přístrojem pouze původních  $100\ \mu\text{A}$ . Protože bočníkem poteče proud devětkrát větší než měřicím přístrojem, musí být jeho odpor devětkrát menší než odpor bočníku.

### 9.7.2 Změna rozsahu voltmetru

Namísto paralelně zapojeného bočníku je v případě změny rozsahu voltmetru třeba použít sériově zapojený odpor, tzv. předřadník (zapojení předřadníku je na obr. 9.7). Měřicí přístroj a předřadník



Obrázek 9.7: Zapojení předřadníku

pak spolu tvoří napěťový dělič tak, aby při celkovém napětí rovném novému rozsahu  $U_N = n \cdot U_V$  bylo na měřicím přístroji napětí shodné s jeho původním rozsahem  $U_V$ , zbytek napětí je na předřadníku

$$U_P = U_N - U_V = (n - 1)U_V.$$

Protože měřicím přístrojem i předřadníkem teče stejný proud, dělí se napětí v poměru odporů

$$\frac{U_V}{R_V} = \frac{U_P}{R_P} = I.$$

Odpor předřadníku  $R_P$  musí proto být  $(n - 1)$ -násobkem vnitřního odporu měřicího přístroje  $R_V$

$$R_P = \frac{U_P}{U_V} R_V = (n - 1)R_V.$$

Odpor předřadníku tedy musí být roven

$$R_P = \left( \frac{U_N}{U_V} - 1 \right) R_V. \quad (9.3)$$

**Příklad: Zvětšení rozsahu voltmetru  $25\times$**  Máme-li ampérmetr s měřicím rozsahem  $100\ \mu\text{A}$  a vnitřním odporem  $4\,000\ \Omega$ , funguje jako voltmetr do napětí  $U = R_V \cdot I_A = 4\,000 \cdot 100 \cdot 10^{-6}\ \text{V} = 0,4\ \text{V}$ . Chceme-li měřit napětí do  $10\ \text{V}$ , čili pětadvacetkrát větší, musí být na měřicím přístroji napětí  $0,4\ \text{V}$  a na předřadníku  $24\times$  větší, čili  $9,6\ \text{V}$ . Odpor předřadníku musí být také  $24\times$  větší než odpor měřicího přístroje, čili  $R_P = 24 \cdot 4\,000\ \Omega = 96\,000\ \Omega$ .



## 9.8 Automatizace měření

Automatizace měření pomocí výpočetní techniky patří mezi moderní fyzikální metody měření v laboratorní i průmyslové praxi. Nejčastěji měřenou fyzikální veličinou je elektrické napětí. Ostatní fyzikální veličiny, i neelektrické, se často na měření elektrického napětí převádí. Avšak současně počítače, dříve též označované jako číslicové či digitální, však nejsou přímo na měření elektrického napětí vybaveny. Nezpracovávají totiž přímo spojité fyzikální veličiny, ale čísla (jakkoli elektrickým napětím kódované). Existují speciální obvody, které umí mezi analogovou veličinou a číslem převádět.

Analogově-digitální převodník (A/D) dovoluje převádět analogovou veličinu na číslo, digitálně-analogový převodník (D/A) převádí naopak číslo na analogovou veličinu. A/D převodník tedy veličinu měří, D/A naopak generuje.

Důležitým parametrem převodníků je rozlišení čili počet bitů čísla, které je možné do převodníku poslat (u D/A) nebo naopak z něj přečíst (u A/D).

### 9.8.1 Reprezentace čísel v počítači

Číselná hodnota je v současných počítačích ukládána a zpracovávána ve dvojkové (binární) soustavě. To znamená, že číslo je možné zapsat pouze pomocí dvou číslic, 0 a 1. Dvojkové číslici se také říká bit (*binary digit*). Srovnajme tyto příklady (index znamená vyjádření v příslušné soustavě):

$$\begin{aligned} 235_{10} &= 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 \\ 110_2 &= 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 6_{10}. \end{aligned}$$

Číslo  $110_2$  je tedy zkráceným zápisem, který vyjadřuje počet různých řádů se základem 2. Mezi čísla vyjádřených v různých číselných soustavách je možné samozřejmě převádět. Převod z dvojkové do desítkové soustavy je naznačen výše. Pro převod z desítkové do dvojkové soustavy se používá následující algoritmus:

1. Převáděné číslo zapíšeme do prvního řádku tabulky vlevo. Do stejného řádku vpravo zapíšeme dvojkou.
2. Číslo vlevo vydělíme dvěma, celou část zapíšeme o řádek níže pod něj a celočíselný zbytek po dělení (dělíme dvěma, zbytkem tedy může být nula nebo jednička) zapíšeme opět na nižší řádek vpravo.
3. Opakujeme krok 2., až dospějeme k dvojici 0, 0. Potom zbytky přečteme v obráceném pořadí (zdola).

235	2
117	1
58	1
29	0
14	1
7	0
3	1
1	1
0	1
0	0

Pro kontrolu spočteme opět vyjádření v desítné soustavě:

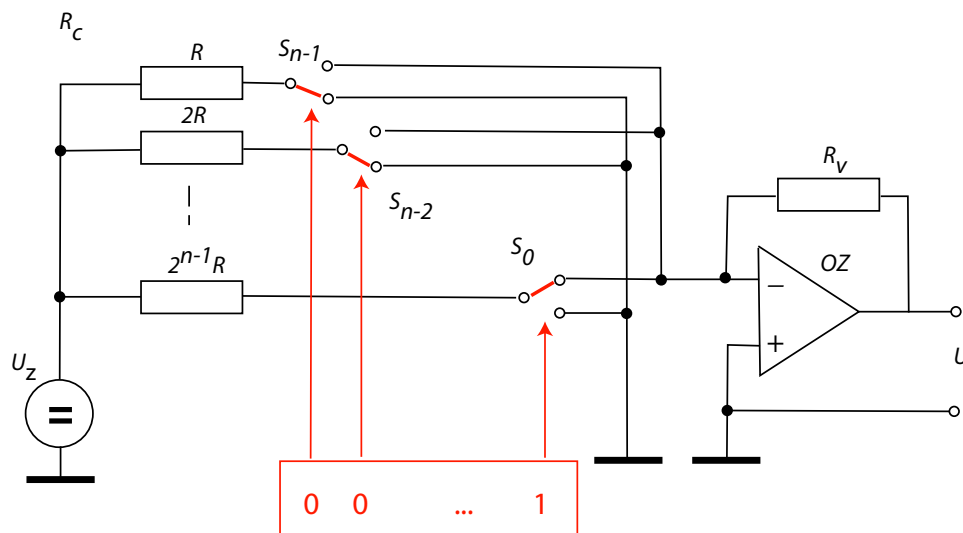
$$\begin{aligned} 11101011_2 &= 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = \\ &= 128 + 64 + 32 + 0 + 8 + 0 + 2 + 1 = \\ &= 235_{10}. \end{aligned}$$

Hodnota binární číslice je v počítači reprezentována různým způsobem. Příkladem je logika TTL, při které je nula reprezentována napětím v intervalu 0 – 0,8 V a jednička napětím v rozsahu 2,5 – 5 V.

### 9.8.2 Digitálně-analogový převodník (D/A převodník)

Jak již bylo uvedeno výše, digitálně-analogový převodník (D/A) dovoluje převádět číslo na analogovou veličinu. Lze jej tedy použít jako regulovatelný zdroj malého výkonu. Jednoduchý  $n$ -bitový D/A převodník je zobrazen na obrázku 9.8. Vstupem jsou hodnoty bitů, výstupem napětí  $U$ . Napětí zdroje je  $U_z$ . Pro výstupní napětí použitého operačního zesilovače OZ platí

$$U = \frac{R_v}{R_c} \cdot U_z$$



Obrázek 9.8: D/A převodník s váhovými rezistory

Hodnota odporu  $R_c$  je měněna podle dodaných bitů pomocí spínačů  $S_i$  (např. tranzistorů), které zapojují jednotlivé větve paralelně zapojených rezistorů. Např. pro 4-bitový převodník ( $n = 4$ ) a číslo 1 bude výsledné napětí

$$U = \frac{R_v}{8R} \cdot U_z.$$

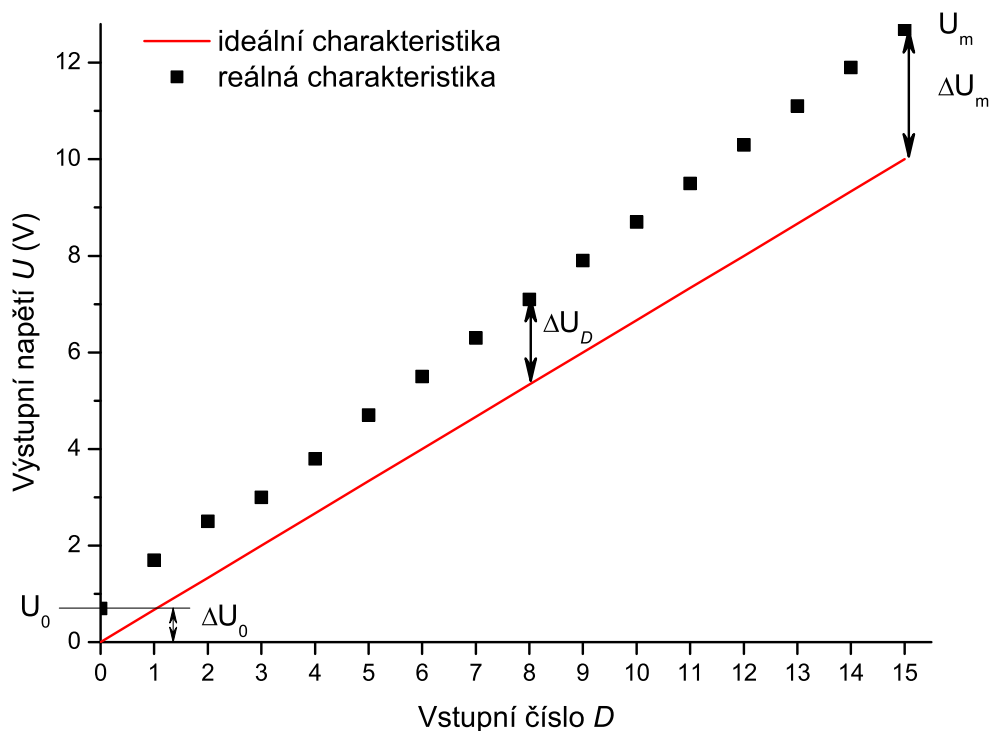
Protože u paralelního zapojení rezistorů se sčítají převrácené hodnoty jejich odporů, v případě čísla 3 bude výsledné napětí

$$U = 3 \frac{R_v}{8R} \cdot U_z,$$

tedy trojnásobné ve srovnání s napětím pro číslo 1. Převodník na obr. 9.8 je tzv. převodník s váhovými rezistory. V praxi se ovšem používají převodníky různých typů.

Statické vlastnosti převodníku charakterizuje převodní charakteristika (viz obr. 9.9). Důležitým parametrem převodníku je ideální kvantizační krok D/A převodníku

$$U_q = \frac{U_r}{2^n - 1}$$



Obrázek 9.9: Převodní charakteristika D/A převodníku

kde  $U_r$  je nominální napěťový rozsah převodníku a  $n$  počet bitů převodníku. Z dalších parametrů se zavádí např.

- chyba nuly (ofsetu)

$$\delta_0 = \frac{\Delta U_0}{U_r},$$

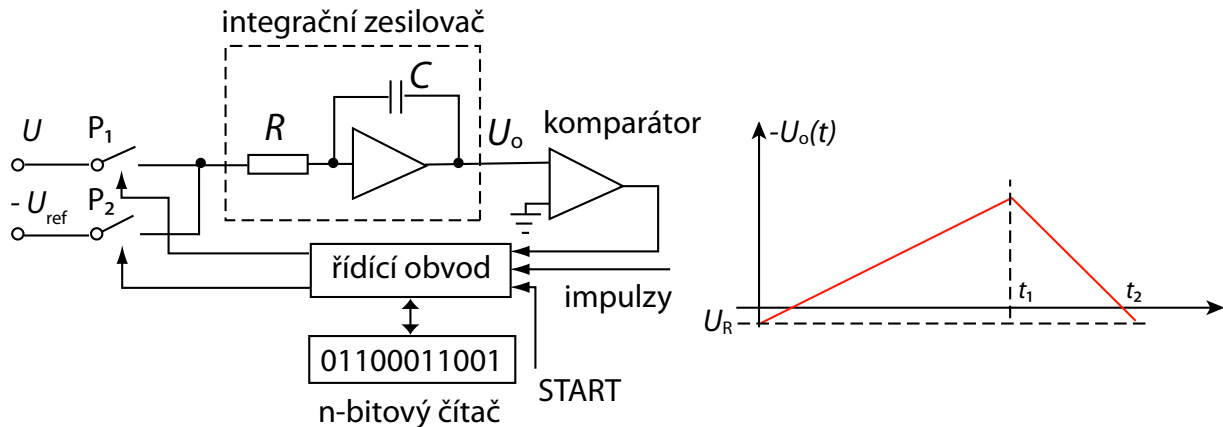
- chyba měřítka (zesílení)

$$\delta_m = \frac{\Delta U_m - \Delta U_0}{U_r},$$

kde  $U_0$  a  $U_m$  jsou minimální a maximální hodnoty napětí reálně nastavitelné na převodníku a  $\Delta U_0$  a  $\Delta U_m$  jejich odchylky od nominálních hodnot.

### 9.8.3 A/D převodník

Zopakujme, že analogově-digitální převodník (A/D) provádí převod analogové fyzikální veličiny na její číselné vyjádření, veličinu tedy měří. Konstrukcí A/D převodníků je celá řada a jejichž výčet a podrobný popis přesahuje rozsah tohoto textu. Jako příklad si uvedeme A/D převodník s dvojitou integrací, který je často součástí multimetrů a který převádí problém měření napětí na měření času (viz obr. 9.10). Na vstup integračního zesilovače je nejprve spínačem  $P_1$  připojeno měřené napětí  $U$ . To je po určitou dobu  $t_1$  integrováno, napětí na výstupu  $U_o$  narůstá. Poté je vstup odpojen a na vstup integrátoru je přes spínač  $P_2$  přivedeno referenční napětí opačné polarity. Klesající napětí na výstupu  $U_o$  je porovnáváno vůči nule komparátorem. Čas, který uplyne od začátku druhé integrace do přechodu  $U_o$  přes nulové napětí, je úměrný hodnotě vstupního napětí. K měření času slouží generátor impulzů a čítač. A/D převodník je součástí každého digitálního měřicího systému.

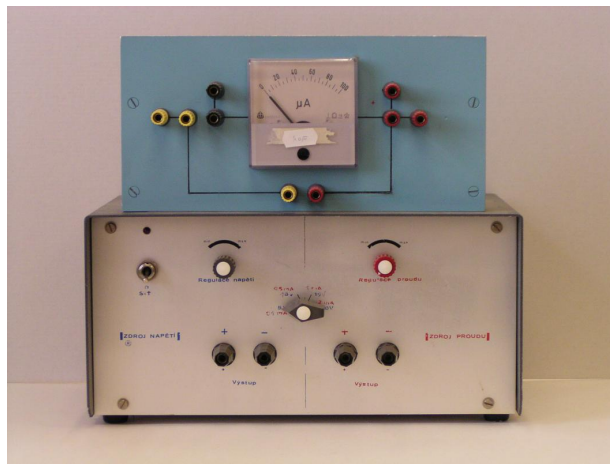


Obrázek 9.10: A/D převodník s dvojitou integrací.

## 9.9 Experimentální vybavení

### 9.9.1 Analogová část

Vlastní měření budeme provádět s pomocí stabilizovaného zdroje, který tvoří jeden celek s měřicím přístrojem – ampérmetrem rozsahu  $100 \mu\text{A}$ . Ampérmetr je umístěn nad zdrojem na desce, která má již předpřipravené zapojení, pomocí něhož lze snadno realizovat všechna potřebná zapojení (viz obr. 9.11). Černé čáry na desce znázorňují vodivé spojení jednotlivých kontaktních bodů.



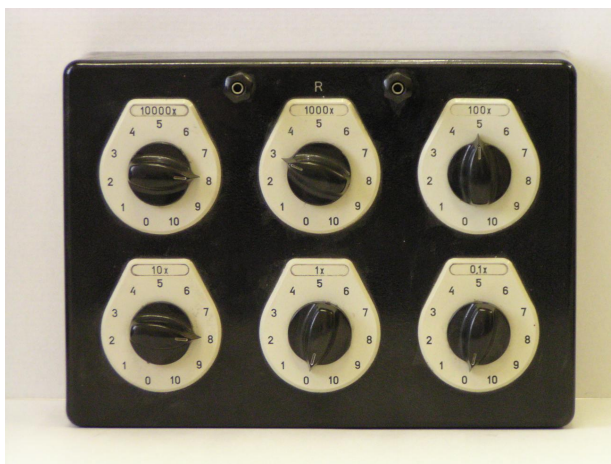
Obrázek 9.11: Zdroj napětí a proudu s integrovaným měřicím přístrojem.

Zdroj se skládá ze dvou částí - stabilizovaného zdroje napětí (vlevo) a stabilizovaného zdroje proudu (vpravo). Pokud budeme s měřicím přístrojem pracovat jako s ampérmetrem, použijeme zdroj proudu, pokud jako s voltmetrem, použijeme zdroj napětí.

Na obr. 9.12 je odporová dekáda, která je v úloze také k dispozici. Požadovaný odpor nastavujeme otočnými přepínači. Na dekádě na obr. 9.12 je nyní nastaven odpor  $83\,580 \Omega$ .

### 9.9.2 Digitální část

V úloze jsou k dispozici dva D/A převodníky (viz obrázek 9.13), čtyřkanálový šestnáctibitový převodník USB-9263 s typickým nominálním rozsahem  $-10,7 \text{ V}$  až  $10,7 \text{ V}$  a jednoduchý osmibitový



Obrázek 9.12: Odporová dekáda s nastavenou hodnotou 83 580  $\Omega$ .

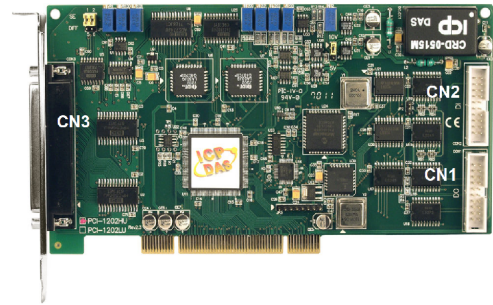
D/A převodník MDAC-08 s nominálním rozsahem 0 V až 10 V. Převodník USB-9263 se připojuje přímo k počítači přes rozhraní USB; v úloze se používá pouze nultý kanál. Převodník MDAC-08 je připojen přes digitální výstup multifunkčního USB modulu USB-6008. Tento převodník navíc vyžaduje stabilizovaný zdroj napětí 12 V. Při zapojení je nutné dávat pozor na správnou polaritu zapojení zdroje. Na převodníku je umístěno osm barevných LED diod, které svým stavem (svítí/nesvítí) vyjadřují v binárním tvaru číslo, které je z počítače vystaveno na vodičích a které tedy převodník převádí na napětí. Generované napětí je možné měřit na předních svorkách převodníku.



Obrázek 9.13: Dva D/A převodníky: vlevo profesionální 4-kanálový 16-bitový převodník USB-9263 firmy National Instruments, vpravo jednoduchý osmibitový D/A převodník MDAC-08

V úloze dále otestujete A/D převodník v měřicí kartě ICP DAS PCI-1202LU, která je využita v měřicím systému ISES. Karta má následujícími parametry:

- 32-bit +5V PCI Bus, Plug & Play,
- rozlišení 12 bitů,
- vzorkovací frekvence max. 110 KS/s,
- 32/16 vstupy AI typu single-ended/differential,
- FIFO 1k word (0,1 s pro 10 kHz vzorkovací frekvenci),
- programovatelný gain
- 2 nezávislé 12-bitové D/A převodníky,
- 16 kanálů DI/DO.



Obrázek 9.14: Měřicí karta ICP DAS PCI-1202LU

## Úkoly

### Analogová část

1. Změřte vnitřní odpor ampérmetru o rozsahu  $100 \mu\text{A}$  oběma výše uvedenými metodami. Pro měření z Ohmova zákona použijte jako voltmetr stolní digitální multimetr Keysight U3401A.
2. Spočítejte velikosti bočníků, které zvětší rozsah ampérmetru  $100 \mu\text{A}$  na hodnoty 0,5 mA, 1 mA a 2 mA. Bočníky realizujte odporovou dekádou. Pomocí jiného ampérmetru (Keysight U3401A) ověřte správnou funkci přístroje na nových rozsazích.
3. Spočítejte velikosti předřadníků, které umožní používat ampérmetr  $100 \mu\text{A}$  jako voltmetr s rozsahy 5 V a 10 V. Předřadníky realizujte odporovou dekádou. Pomocí jiného voltmetru (Keysight U3401A) ověřte správnou funkci přístroje na nových rozsazích.

### Digitální část

1. Určete číselný rozsah osmibitového a šestnáctibitového D/A převodníku. Víte přitom, že do převodníku je možné zadávat pouze celá nezáporná čísla.
2. Určete reálný napěťový rozsah, kvantizační krok a rozlišovací schopnost D/A převodníku. Porovnejte šestnáctibitový modul USB-9263 a osmibitový převodník MDAC08 připojený přes digitální výstup modulu USB-6008. K přesnému měření výstupního napětí použijte multimetr HP 34401A, připojený k počítači přes rozhraní GPIB. Pro ruční zadávání libovolných čísel do D/A převodníků je připraven program *TestDA*, automatické generování čísel v geometrické řadě  $2^n$  realizuje program *AutoTestDA*. Z naměřených závislostí stanovte chybu offsetu a chybu zesílení.
3. Nastavte na šestnáctibitovém převodníku USB-9263 napětí 3,2 V. Potřebné číslo předem odhadněte výpočtem. Použijte program *TestDA*.
4. Otestujte vliv vzorkovací frekvence na kvalitu záznamu analogového signálu. Ke generování harmonického průběhu použijte modul USB-9263 a program *Generátor*, ve kterém nastavíte frekvenci generovaného signálu např. na 1 kHz. Zpětný záznam realizujte A/D převodníkem v měřicím systému ISES. Vzorkovací frekvenci v systému ISES nastavte na 20 kHz, 2 kHz, 1 kHz, 1,1 kHz nebo 100 Hz. Jak velká musí být vzorkovací frekvence, aby záznam obsahoval původní frekvenci generovaného signálu, tj. 1 kHz? Je karta vybavena antialiasingovým filtrem?
5. Určete kvantizační krok A/D převodníku v měřicí kartě systému ISES. Na modulu INPUT zkratujte vodičem vstupní svorky a spusťte měření (se vzorkovací frekvencí např. 40 kHz). V záznamu potom nalezněte nejmenší nenulovou změnu napětí. (Záznam můžete např. exportovat a zobrazit jako bodový graf v programu QtiPlot.) Získanou hodnotu porovnejte s teoretickým kvantizačním krokem A/D převodníku (převodník je dvanáctibitový).

## 9.A Užití v praxi

Pochopení principu měření elektrického napětí a proudu je podstatné pro mnoho činností v průmyslové praxi. Většina neelektrických veličin se převádí na napětí nebo proud pro využití moderní záznamové a výpočetní techniky. Důkladné pochopení vlastností řetězce zpracování měřeného signálu je důležité pro správnou interpretaci dat a stanovení měřicích a kalibračních postupů. Mimo diagnostiku elektrických zařízení, kde se využívá přímo měření elektrického napětí nebo proudu, se můžeme s podobnými měřeními setkat u řady dalších metod.

Mezi metody využívající přímo měření napětí a proudu patří **čtyřbodová metoda stanovení měrného odporu materiálu**. Pro správnou interpretaci výsledků měření je nutná znalost interakce měřicího zařízení se vzorkem a také znalost kontaktních jevů. Podobnou metodou je měření odporu šíření, která se používá ke **stanovení hloubkových profilů elektrických vlastností materiálů** pomocí měření napětí a proudu na dvou měřicích hrotech krokujících po šikmém výbrusu materiálu. Metoda vyžaduje provedení kalibrace na vzorcích se známým měrným odporem.

Dalším příkladem je **měření teploty pomocí termočlánků** nebo **řízení koncentrace roztoků pomocí měření jejich vodivosti**. Převod dalších veličin na elektrické napětí nebo proud je často komplexní záležitost využívající různých fyzikálních jevů (např. tlak, hmotnost, intenzita záření, koncentrace látek apod.)

## Úloha 10

# Tepelná vodivost pevných látek

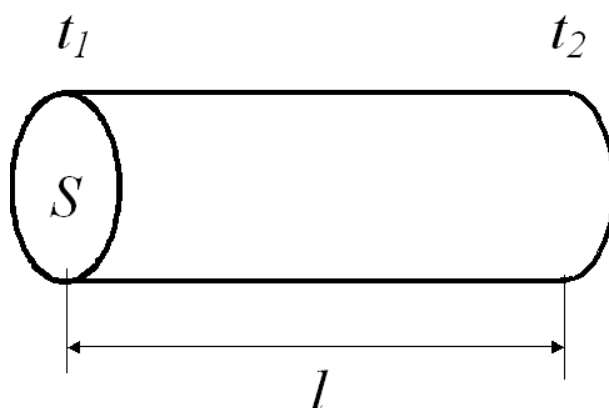
### 10.1 Základní vztahy

Tepelná vodivost je podstatným parametrem při konstrukci řady strojů a zařízení. Cílem může být jak vodivost maximální – například při nutnosti účinně chladit, tak i minimální, kdy cílem je omezit tepelné ztráty na minimum.

Uvažujme homogenní tyč délky  $l$  a konstantního průřezu  $S$  (viz obr. 10.1). Předpokládejme, že plášť tyče je adiabaticky izolován a oba konce tyče udržujeme pomocí ohříváče a chladiče na konstantních teplotách  $t_1$  a  $t_2$ , přičemž  $t_1 > t_2$ . Po dosažení rovnovážného stavu bude teplo, které za čas  $\tau$  projde tyčí (tím myslíme teplo, které bude odebráno ohříváči, a teplo, které tyč dodá chladiči), rovno

$$Q = \lambda \frac{S}{l} (t_1 - t_2) \tau \quad (10.1)$$

kde  $\lambda$  je materiálová konstanta zvaná součinitel tepelné vodivosti nebo krátce měrná tepelná vodivost.



Obrázek 10.1:

Často je prostředí, ve kterém dochází k přenosu tepla, nehomogenní. Nejčastěji bývá tvořeno větším počtem homogenních úseků s různou tepelnou vodivostí. Příkladem může být zeď budovy s vnější či vnitřní tepelnou izolací. Má tedy smysl všimnout si i těchto situací.



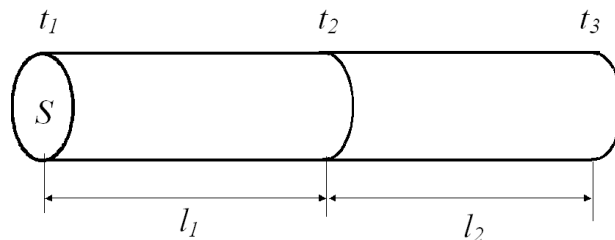
### 10.1.1 Sériové zapojení tepelných vodičů

Pokud dvě tepelně vodivé tyče stejného průřezu spojíme čelními plochami k sobě, dostaneme tzv. sériové zapojení tepelných vodičů (viz obr. 10.2). Přitom předpokládáme, že pláště tyčí jsou dokonale tepelně izolovány. Pro jednotlivé tyče pak v analogii s rovnicí (10.1) platí

$$Q_1 = \lambda_1 \frac{S}{l_1} (t_1 - t_2) \tau, \quad Q_2 = \lambda_2 \frac{S}{l_2} (t_2 - t_3) \tau \quad (10.2)$$

a po dosažení rovnovážného stavu (kontinuita toku tepla)

$$Q_1 = Q_2. \quad (10.3)$$



Obrázek 10.2: Sériové zapojení tepelných vodičů

Jsou-li například teploty  $t_1$  a  $t_3$  pevně dány ohřívacem a chladičem, můžeme teplotu  $t_2$  v místě kontaktu obou tyčí určit z rovnice

$$\lambda_1 \frac{S}{l_1} (t_1 - t_2) \tau = \lambda_2 \frac{S}{l_2} (t_2 - t_3) \tau \quad (10.4)$$

kterou jsme získali dosazením z (10.2) do (10.3).

Označíme-li výraz  $\frac{1}{\lambda} \frac{l}{S}$  symbolem  $R_t$ , lze přepsat rovnici (10.1) do tvaru

$$\frac{Q}{\tau} = \frac{1}{R_t} (t_1 - t_2). \quad (10.5)$$

V rovnici, která je obdobou Ohmova zákona  $I = \frac{U}{R}$ , je přenesený tepelný výkon  $\frac{Q}{\tau}$  analogií elektrického proudu a rozdíl teplot  $(t_1 - t_2)$  analogií elektrického napětí. S využitím této analogie nazveme veličinu  $R_t$  tepelným odporem daného tělesa. Pro sériové zapojení tepelných vodičů lze z rovnic (10.2) a (10.3) velmi lehce odvodit následující vztah pro celkový tepelný odpor soustavy

$$R_t = R_{t1} + R_{t2} \quad (10.6)$$

kde  $R_{t1}$  a  $R_{t2}$  jsou tepelné odpory jednotlivých tyčí. Pokuste se o to!

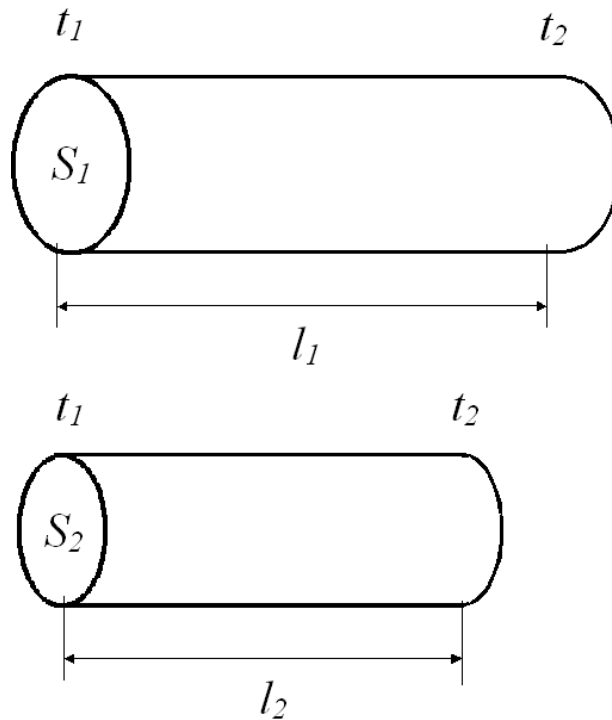
### 10.1.2 Paralelní zapojení tepelných vodičů

Obdobně můžeme uvažovat o paralelním zapojení vodivých tyčí dle obr. 10.3. Předpokládejme, že tyče mají různý průřez, různou délku, ale jejich konce jsou na stejných teplotách. To je nutná podmínka toho, abychom mohli zapojení nazvat paralelní. Opět předpokládáme, že pláště tyčí jsou dokonale tepelně izolovány.

Teplo přenesené jednotlivými tyčemi za čas  $\tau$  je dáno obdobnými vztahy jako v rovnici (10.2):

$$Q_1 = \lambda_1 \frac{S_1}{l_1} (t_1 - t_2) \tau, \quad Q_2 = \lambda_2 \frac{S_2}{l_2} (t_1 - t_2) \tau \quad (10.7)$$

Celkové přenesené teplo je součtem obou příspěvků



Obrázek 10.3: Paralelní zapojení tepelných vodičů

$$Q = Q_1 + Q_2 \quad (10.8)$$

Pro výsledný tepelný odpor paralelního zapojení platí

$$\frac{1}{R_t} = \frac{1}{R_{t1}} + \frac{1}{R_{t2}} \quad (10.9)$$

Ověřte si tento vztah sami!

## 10.2 Rovnice vedení tepla

Předchozí úvahy platily pouze pro případ, kdy je již ustanovena tepelná rovnováha a tepelný výkon procházející přes libovolný průřez tepelného vodiče je nezávislý na čase. Tento speciální předpoklad však v řadě případů nemusí být splněn a pro popis takových situací je nutné vypracovat teorii neustáleného vedení tepla - viz 10.A.

Výsledná rovnice je

$$\frac{\partial t(x, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 t(x, \tau)}{\partial x^2} \quad (10.10)$$

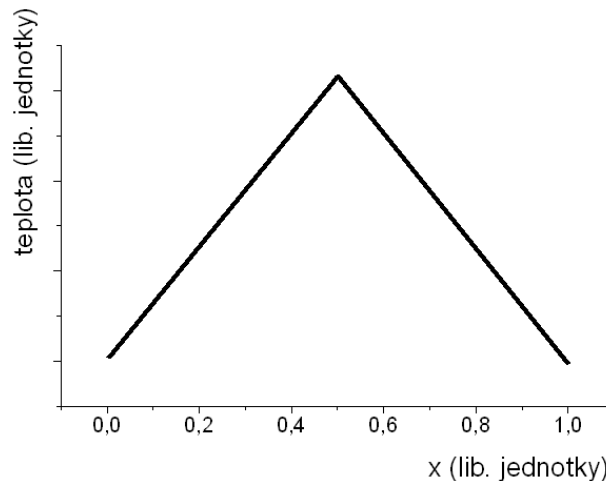
Tato rovnice je známou rovnicí vedení tepla, zde ve verzi pro vedení v jednorozměrném systému – tyči. Jedná se o tzv. parabolickou parciální diferenciální rovnici, kterou lze pro některé vybrané situace řešit analyticky, často se však přistupuje k numerickému řešení.

V rovnici vystupuje veličina  $\frac{\lambda}{\rho c}$ , která se nazývá *teplotní vodivost* a která určuje, jak se mění rozložení teploty s časem a polohou. Všimněte si, že teplotní vodivost obsahuje také hustotu a měrnou tepelnou kapacitu  $c$ . Je to samozřejmé: pro změny teploty určitého elementu tyče není důležitý jen tepelný tok, ale i tepelná kapacita materiálu.

### 10.2.1 Jedno analytické řešení

Protože analytické řešení parciální diferenciální rovnice svou obtížností převyšuje vaše současné matematické znalosti, uvedeme si zde jen výsledek řešení pro jednu konkrétní situaci, kterou je možné s naším experimentálním vybavením realizovat.

Předpokládejme vedení tepla v jednodimenzionálním systému, tedy například ve vzorku tvaru tyče a nebo desky s tloušťkou mnohem menší než její laterální rozměry. Nechť na počátku je rozložení teploty dle obr. 10.4.



Obrázek 10.4:

Tedy ve středu vzorku je teplota maximální a lineárně klesá k oběma okrajům vzorku. Dále nechť během experimentu neustále udržujeme teploty obou okrajů konstantní. Pak se rozložení teploty ve vzorku s časem mění dle vztahu:

$$t(x, \tau) = t_o + \sum_{n=1, n \text{ liche}}^{\infty} \frac{8(t_{\max} - t_o)}{\pi^2 n^2} \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) \exp\left[-\frac{\lambda}{\rho c} \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \tau\right] \quad (10.11)$$

kde  $t_o$  je konstantní teplota okrajů vzorku,  $t_{\max}$  je počáteční teplota ve středu vzorku a  $l$  je délka vzorku.

Tento vztah je relativně komplikovaný. Všimněte si však, že člen v exponentu je přímo úměrný  $n^2$ , tedy, jak plyne čas, stává se první člen sumy ( $n = 1$ ) stále více dominantní, takže po jisté době můžeme místo sumy psát pouze první člen:

$$t(x, \tau) = t_o + \frac{8(t_{\max} - t_o)}{\pi^2} \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \exp\left[-\frac{\lambda}{\rho c} \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \tau\right] \quad (10.12)$$

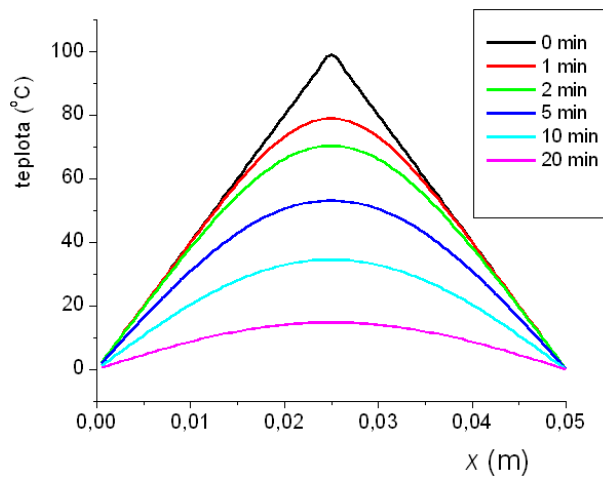
Ve středu vzorku ( $x = l/2$ ) klesá teplota přibližně dle vztahu

$$t(\tau) = t_o + \frac{8(t_{\max} - t_o)}{\pi^2} \exp\left[-\frac{\lambda}{\rho c} \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \tau\right], \quad (10.13)$$

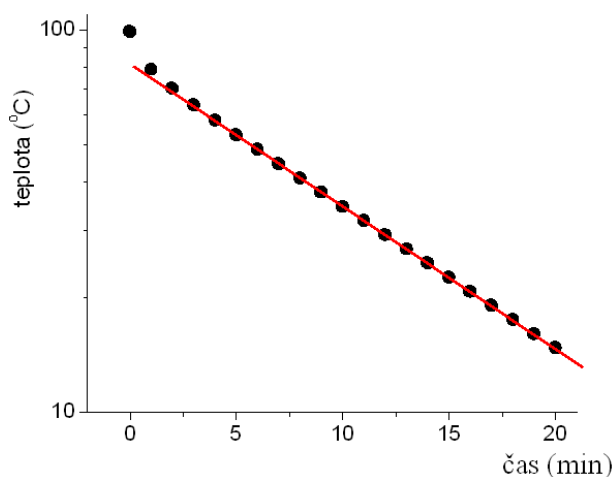
který je s plynoucím časem  $\tau$  stále lépe a lépe splněn. Teplota ve středu vzorku tedy po jisté době klesá exponenciálně s časem, na grafu v logaritmickém měřítku tedy lineárně se směrnici  $\left[-\frac{\lambda}{\rho c} \left(\frac{\pi}{l}\right)^2\right]$ . Měřením časové závislosti teploty ve středu vzorku lze tedy absolutně určit teplotní vodivost  $\frac{\lambda}{\rho c}$ .

Na obr. 10.5 je příklad časového vývoje rozložení teploty pro počáteční podmínky dle obr. 10.4 s počátečním maximem  $100^\circ\text{C}$  ve středu a s okraji vzorku trvale udržovanými na teplotě  $0^\circ\text{C}$ . Na obr. 10.6 je pak časový vývoj teploty ve středu vzorku nakreslený v logaritmické stupnici. Vidíme,

že po velmi krátké době klesá teplota ve středu vzorku již exponenciálně (v logaritmickém grafu lineárně), což je v dobré shodě s předpokladem, který vedl k rovnici (10.12). Grafy na obr. 10.5 a 10.6 přibližně odpovídají vedení tepla v pórobetonu (Ytong).



Obrázek 10.5:



Obrázek 10.6:

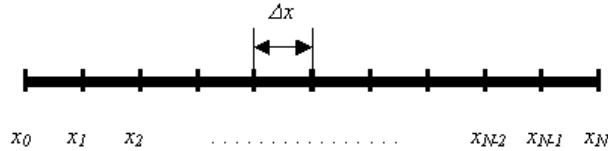
### 10.2.2 Numerické řešení

Numerické řešení diferenciálních rovnic představuje samostatný a netriviální problém a v tomto textu není místo na soustavný výklad této problematiky. Ukážeme si jen jeden z možných způsobů řešení rovnice vedení tepla (10.43).

Základní myšlenkou numerických metod je rozdělení spojité souřadnicové a časové škály na konečné úseky, intervaly. Uvažujme tyč délky  $l$ , kterou rozdělíme na  $N$  intervalů stejné délky  $\Delta x = l/N$  pomocí dělicích bodů  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{N-1}, x_N$ , viz obr. 10.7.

Rozložení teploty podél tyče v daném časovém okamžiku pak popisuje konečná množina čísel  $t(x_0), t(x_1), \dots, t(x_N)$ , kterou označíme symboly  $t_0, t_1, t_2, \dots, t_{N-1}, t_N$ . V takovéto diskrétní řadě bodů můžeme derivaci  $\frac{\partial t}{\partial x}$  přibližně vyjádřit pomocí tzv. diferencí jako

$$\frac{\partial t}{\partial x} \doteq \frac{t_k - t_{k-1}}{\Delta x} \quad (10.14)$$



Obrázek 10.7:

Analogicky pak druhá derivace bude

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \doteq \frac{t_{k-1} - 2t_k + t_{k+1}}{\Delta x^2} \quad (10.15)$$

Podobně i časový vývoj budeme sledovat v diskretních ekvidistantních časových intervalech, které označíme  $\tau^j$ , kde horní index  $j$  čísluje jednotlivé časové okamžiky vzdálené od sebe o  $\Delta\tau = \tau^{j+1} - \tau^j$ . Celkem je tedy spojitá funkce  $t(x, \tau)$  popsána množinou čísel  $t_k^j$ , kde dolní index  $k$  určuje souřadnici a horní index  $j$  čas. Potřebnou první derivaci podle času vyjádříme opět pomocí diferencí jako

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} \doteq \frac{t_k^{j+1} - t_k^j}{\Delta\tau} \quad (10.16)$$

Pomocí rovnic (10.15) a (10.16) můžeme již celou diferenciální rovnici (10.43) přepsat na tzv. diferenční rovnici ve tvaru

$$\frac{t_k^{j+1} - t_k^j}{\Delta\tau} = \frac{\lambda}{\rho c} \frac{t_{k-1}^j - 2t_k^j + t_{k+1}^j}{\Delta x^2} \quad (10.17)$$

Z této rovnice můžeme spočítat teplotu v bodě  $x_k$  v časovém okamžiku  $\tau^{j+1}$  z teploty ve stejném bodě a jeho nejbližších sousedech v předchozím čase  $\tau^j$  takto<sup>1</sup>

$$t_k^{j+1} = t_k^j + \Delta\tau \frac{\lambda}{\rho c} \frac{t_{k-1}^j - 2t_k^j + t_{k+1}^j}{\Delta x^2} \quad (10.18)$$

Je zřejmé, že tento způsob nám nedovolí určit vývoj teploty v krajních bodech tyče  $t_0$  a  $t_N$ . Ale tato skutečnost má dobré fyzikální důvody – teplota v okrajových bodech musí být dána jinými, tzv. okrajovými podmínkami. Například jsou-li oba konce tyče udržovány na konstantních teplotách  $t_L$  a  $t_P$ , jsou tímto určeny i teploty v krajních bodech

$$t_0^j = t_L, \quad t_N^j = t_P \quad \text{pro každé } j \quad (10.19)$$

Pokud je například pravý konec tyče tepelně izolovaný, musí být gradient teploty na tomto konci nulový, což vede k okrajové podmínce

$$t_N = t_{N-1} \quad (10.20)$$

Pro úspěšné numerické řešení diferenciální rovnice je důležitá přiměřená jemnost diskretizace časové a souřadnicové osy a jejich vzájemný vztah. Podrobnějším rozbořem lze ukázat, že časové a souřadnicové dělení  $\Delta\tau$  a  $\Delta x$  musí splňovat následující relaci

$$\Delta\tau \leq \frac{\rho c \Delta x^2}{\lambda} \quad (10.21)$$

<sup>1</sup>Jedná se o tzv. explicitní diferenční schéma, které sice není optimální, ale pro vlastní algoritmizaci úlohy je nejjednodušší.

### 10.3 Ztráty tepla pláštěm tyče - vedení tepla tyčí obklopenou prostředím stálé teploty

Ve všech předchozích případech jsme předpokládali, že tepelné ztráty pláštěm tyče do okolí jsou zanedbatelně malé. To ovšem nemusí být splněno a tato skutečnost je příčinou systematických chyb při měření tepelné a teplotní vodivosti. Lze však realizovat i experimenty, jejichž vyhodnocení naopak předpokládá velký odvod tepla bočními stěnami měřeného vzorku. Rovnici (10.1) upravíme na tvar

$$Q = -\lambda S \frac{t_2 - t_1}{l} \tau \quad (10.22)$$

Lokální podoba rovnice pak je

$$Q = -\lambda S \tau \frac{dt}{dx}. \quad (10.23)$$

Záporné znaménko na pravé straně zohledňuje skutečnost, že teplo přechází v opačném směru, než je gradient teploty. Pokud při vedení tepla dochází k tepelným ztrátám, není v ustáleném stavu gradient teploty  $\frac{dt}{dx}$  podél tyče konstantní.

Označme teplo, které projde průřezem tyče v jistém místě za jednotku času symbolem  $q = \frac{Q}{\tau}$ . Derivací rovnice (10.23) podle souřadnice dostaneme vztah

$$\frac{dq}{dx} = -\lambda S \frac{d^2t}{dx^2}, \quad (10.24)$$

který dává do souvislosti gradient přenosu tepla a rozložení teploty  $t(x)$  podél homogenní tyče.

Gradient přenosu tepla je roven tepelným ztrátám, o kterých současně předpokládáme, že se řídí Newtonovým zákonem ochlazování (Tepelné ztráty jsou přímo úměrné rozdílu teplot objektu a okolí.). Pak můžeme psát:

$$-\frac{dq}{dx} = \alpha P(t - t_o), \quad (10.25)$$

kde  $\alpha$  je koeficient přestupu tepla,  $P$  plocha pláště jednotkové délky tyče a  $t_o$  teplota okolí. Dosazením z (10.25) do (10.24) dostaneme diferenciální rovnici pro rozložení teploty podél tyče

$$\alpha P(t - t_o) = \lambda S \frac{d^2t}{dx^2} \quad (10.26)$$

Předpokládejme, že experiment uspořádáme tak, že na jednom konci tyče ohřívač stabilizuje teplotu tyče na hodnotě  $t_1$  a druhý velmi vzdálený konec má teplotu okolí. Pak je řešení rovnice (10.26) ve tvaru

$$t = t_o + (t_1 - t_o) \exp\left(-\sqrt{\frac{\alpha P}{\lambda S}} x\right). \quad (10.27)$$

Naměřením ustáleného rozložení teploty podél tyče a numerickým zpracováním určíme veličinu  $\sqrt{\frac{\alpha P}{\lambda S}}$ , ve které se však vyskytují dvě neznámé  $\alpha$  a  $\lambda$ .

Současně ovšem musí být celkové tepelné ztráty tyče  $q_c$  rovny energii, kterou tyč přijme za jednotku času od ohřívače. Celkové tepelné ztráty spočteme jako

$$q_c = \int_0^\infty \alpha P(t - t_o) dx = \alpha P(t_1 - t_o) \int_0^\infty \exp\left(-\sqrt{\frac{\alpha P}{\lambda S}} x\right) dx = \frac{\alpha P(t_1 - t_o)}{\sqrt{\frac{\alpha P}{\lambda S}}}. \quad (10.28)$$

Pokud je tyč dostatečně dlouhá, takže její volný konec má již teplotu okolí, nepřináší výpočet celkového ztraceného tepla integrací s nevlastní horní mezí podstatnou chybu.

Ze vztahů (10.27) a (10.28), experimentální závislosti  $t(x)$  a hodnoty  $q_c$  mohou být určeny obě neznámé veličiny  $\alpha$  a  $\lambda$ .

I tento postup však přináší experimentální potíže a možný zdroj systematické chyby. Je to zejména nutnost určit celkový příkon, který ohřívač předá tyči. Vzhledem ke vždy přítomným tepelným ztrátám vlastního ohřívače je i tato hodnota zatížena systematickou chybou, která může být jen více či méně úspěšně korigována.

## Úkoly – student měří jeden z uvedených úkolů

1. Změřte tepelnou vodivost kovové tyče absolutní metodou (s využitím vztahu (10.1)). Navrhněte a realizujte způsob měření tepelného výkonu procházejícího tyčí za ustáleného stavu. Pokuste se optimalizovat experiment tak, aby byly minimalizovány tepelné ztráty do okolí.
2. Změřte tepelnou vodivost vybraného stavebního materiálu (pórobeton, sádrokarton) absolutní metodou (s využitím vztahu (10.1)). Navrhněte a realizujte způsob měření tepelného výkonu procházejícího tepelným vodičem s malou tepelnou vodivostí za ustáleného stavu. Pokuste se optimalizovat experiment tak, aby byly minimalizovány tepelné ztráty do okolí.
3. Změřte tepelnou vodivost kovové tyče relativní metodou. Měřený vzorek spojte vhodným způsobem do série s jednou nebo více tyčemi známé vodivosti. Pokuste se navrhnout takové uspořádání experimentu, které by dokázalo alespoň částečně postihnout tepelné ztráty do okolí.
4. (\*) Pokuste se odhadnout tepelné ztráty pláštěm měřené tyče s využitím srovnávacího měření na jiném vzorku stejných geometrických rozměrů a známé tepelné vodivosti. Jak je třeba uspořádat oba experimenty a jakým způsobem informaci o tepelných ztrátách zjistíme?
5. Navrhněte způsob, jak přibližně realizovat počáteční rozložení teploty v kovové tyči dle obr. 10.4. Proveďte měření teplotní vodivosti dle postupu popsaného v odstavci 10.2.1. Nezávislými experimenty určete hustotu a měrnou tepelnou kapacitu materiálu, ze kterého je tyč vyrobena a vypočtete tepelnou vodivost.
6. Navrhněte způsob, jak přibližně realizovat počáteční rozložení teploty ve vybraném stavebním materiálu (pórobeton, sádrokarton) dle obr. 10.4. Proveďte měření tepelné vodivosti dle postupu popsaného v odstavci 10.2.1.
7. Určete tepelnou vodivost tyče metodou popsanou v odstavci 10.3.
8. (\*) Řešte numericky rovnici vedení tepla (10.43) pro zvolené počáteční a okrajové podmínky. Tyto podmínky volte dle vlastního uvážení tak, aby je bylo možné s dostatečnou přesností experimentálně realizovat. Proveďte experiment za těchto podmínek, s vhodným časovým a prostorovým rozlišením měřte vývoj rozložení teploty podél vodiče a výsledek porovnejte s numerickou simulací.
9. (\*) Určete teplotní vodivost kovové tyče srovnáním měření časového vývoje rozložení teploty podél tyče a numerické simulace téhož děje. (Návod: V numerické simulaci bude teplotní vodivost neznámým parametrem, jehož hodnotu je třeba určit tak, aby došlo k maximální shodě experimentu s výsledkem výpočtu.)

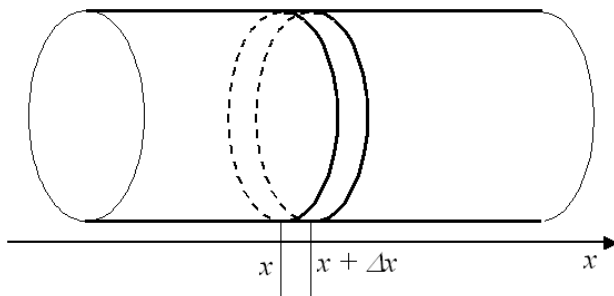
### 10.A Odvození rovnice vedení tepla - jednorozměrný případ

Uvažujme vodivou tyč kolmého průřezu  $S$  a vytyčme v ní velmi malý objem  $\Delta V$ , ohraničený dvěma rovnoběžnými plochami kolmými na podélnou osu tyče, viz obr. 10.8. Volme souřadnicovou osu  $x$  rovnoběžnou s podélnou osou tyče. Předpokládejme dále, že teplota v tyči se mění pouze podél  $x$ -ové osy a tedy v každé rovině kolmé na osu je teplota konstantní. Tohoto rozložení teploty bychom dosáhli, pokud by oba konce tyče byly umístěny na různých teplotách a plášť tyče byl dokonale tepelně izolován od okolí.

Následující postup bude trochu obtížnější a pro některé snad i zbytečně zdlouhavý. Je to proto, že nyní pravděpodobně vkročíme za hranici vašich současných matematických vědomostí a budeme se snažit dělat jen velmi malé krůčky.

Nechť je rozložení teploty podél tyče a jeho změna v čase popsáno funkcí  $t(x, \tau)$ . Pro vybraný objemový element  $\Delta V$  můžeme rovnici (10.1) přepsat do tvaru

$$Q(x, \tau) = \lambda \frac{S}{\Delta x} [t(x, \tau) - t(x + \Delta x, \tau)] \Delta \tau \quad (10.29)$$



Obrázek 10.8: Odvození rovnice vedení tepla

kde  $Q(x, t)$  je teplo prošlé plochou o souřadnici  $x$  za čas  $\Delta\tau$ . Stejnou rovnicí bychom mohli psát i pro plochu se souřadnicí  $x + \Delta x$

$$Q(x + \Delta x, \tau) = \lambda \frac{S}{\Delta x} [t(x, \tau) - t(x + \Delta x, \tau)] \Delta\tau \quad (10.30)$$

Zde je na místě otázka, proč jsme pro výpočet  $Q(x, \tau)$  použili teplotní gradient „vpravo“ od bodu  $x$ , zatímco pro výpočet  $Q(x + \Delta x, \tau)$  jsme počítali s teplotním gradientem „vlevo“ od bodu  $x + \Delta x$ . Je zřejmé, že oba výpočty musí být jen přibližné, protože funkce  $Q(x, \tau)$  není podél osy  $x$  konstantní. Těchto potíží se ovšem zbavíme, pokud  $\Delta x$  bude velmi malé, takže hodnoty funkce  $Q(x, \tau)$  se budou v bodech  $x$  a  $x + \Delta x$  jen velmi málo lišit. V limitním případě dostaneme:

$$Q(x, \tau) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \lambda \frac{S}{\Delta x} [t(x, \tau) - t(x + \Delta x, \tau)] \Delta\tau \right]. \quad (10.31)$$

Pokud rovnici přeskládáme do následujícího tvaru

$$Q(x, \tau) = -S\lambda\Delta\tau \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{t(x + \Delta x, \tau) - t(x, \tau)}{\Delta x} \right], \quad (10.32)$$

vidíme, že výraz s limitou je identický s definičním vztahem pro derivaci funkce. V tomto případě ovšem derivujeme funkci dvou proměnných  $t(x, \tau)$  jen podle jedné proměnné –  $x$ . Druhá proměnná – čas  $\tau$  – zde vystupuje jako konstanta. Takové derivaci říkáme parciální derivace funkce více proměnných a značíme ji symbolem  $\frac{\partial}{\partial x}$ . V této nové notaci tedy můžeme rovnici (10.32) přepsat takto:

$$Q(x, \tau) = -S\lambda\Delta\tau \frac{\partial t(x, \tau)}{\partial x} \quad (10.33)$$

Podívejme se nyní na děje v objemovém elementu  $\Delta V$  z jiné stránky. Pokud vedení tepla není ustálené, pak  $Q(x + \Delta x, \tau) \neq Q(x, \tau)$ , kde ve shodě s předchozím označením je  $Q(x, \tau)$  teplo, které do objemu  $\Delta V$  za čas  $\Delta\tau$  zleva natéká a  $Q(x + \Delta x, \tau)$  je teplo, které za stejný čas vpravo vytéká; teplota objemového elementu se bude v čase měnit.

Souvislost mezi změnou teploty a přijatým teplem je dána rovnicí

$$mc \Delta t = Q \quad (10.34)$$

neboli

$$mc \cdot (t(x, \tau + \Delta\tau) - t(x, \tau)) = Q(x, \tau) - Q(x + \Delta x, \tau) \quad (10.35)$$

Hmotnost  $m$  objemového elementu vyjádříme pomocí objemu a hustoty jako  $m = S\Delta x \rho$  a symbol  $c$  označuje měrné teplo materiálu.

Změnu teploty za časový interval  $\Delta\tau$  pak můžeme vyjádřit jako

$$t(x, \tau + \Delta\tau) - t(x, \tau) = \frac{Q(x, \tau) - Q(x + \Delta x, \tau)}{S \Delta x \rho c}, \quad (10.36)$$



a nebo, jen po přehození pořadí v rozdílu na pravé straně,

$$t(x, \tau + \Delta\tau) - t(x, \tau) = -\frac{Q(x + \Delta x, \tau) - Q(x, \tau)}{S \Delta x \rho c}. \quad (10.37)$$

Obdobně jako při postupu vedoucím k rovnici (10.33) získáme limitním přechodem

$$t(x, \tau + \Delta\tau) - t(x, \tau) = -\frac{1}{S\rho c} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{Q(x + \Delta x, \tau) - Q(x, \tau)}{\Delta x}, \quad (10.38)$$

a dále

$$t(x, \tau + \Delta\tau) - t(x, \tau) = -\frac{1}{S\rho c} \frac{\partial Q(x, \tau)}{\partial x} \quad (10.39)$$

Dosadíme-li nyní do rovnice (10.39) z rovnice (10.33) dostaneme

$$t(x, \tau + \Delta\tau) - t(x, \tau) = -\frac{1}{S\rho c} \frac{\partial}{\partial x} \left[ -S\lambda\Delta\tau \frac{\partial t(x, \tau)}{\partial x} \right], \quad (10.40)$$

což po úpravě vede na rovnici

$$t(x, \tau + \Delta\tau) - t(x, \tau) = \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial t(x, \tau)}{\partial x} \right] \Delta\tau \quad (10.41)$$

„Dvojitá“ derivace na pravé straně je vlastně druhou parciální derivací analogickou obyčejné druhé derivaci, kterou známe z analýzy funkcí jedné proměnné. Můžeme tedy použít obvyklý zápis

$$t(x, \tau + \Delta\tau) - t(x, \tau) = \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 t(x, \tau)}{\partial x^2} \Delta\tau \quad (10.42)$$

Limitní přechody nám umožnily přejít ke spojitému popisu rozložení přenosu tepla podél osy  $x$ . Stále však pracujeme s konečným časovým intervalem  $\Delta\tau$ , časová osa zůstává tedy diskrétní. Nyní však již lehce provedeme limitní přechod i pro časový interval. Postupnými úpravami rovnice (10.42) dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{t(x, \tau + \Delta\tau) - t(x, \tau)}{\Delta\tau} &= \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 t(x, \tau)}{\partial x^2}, \\ \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{t(x, \tau + \Delta\tau) - t(x, \tau)}{\Delta\tau} &= \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 t(x, \tau)}{\partial x^2} \\ \frac{\partial t(x, \tau)}{\partial \tau} &= \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 t(x, \tau)}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (10.43)$$

## 10.B Popis prvků

### 10.B.1 Elektrická topná tělesa

#### Topné tělísko firmy Omega, typ CIR-1014/120

Parametry: délka 31,75 mm, průměr 6,35 mm, výkon 150W/120V

Použití: k ohřevu tyčových tepelných vodičů

Umístění: v koaxiálních zásuvných otvorech v koncové části tepelných vodičů

#### Topná tkanice firmy Omega, typ HTC-030

Parametry: délka 0,9 m, výkon 64W/120V.



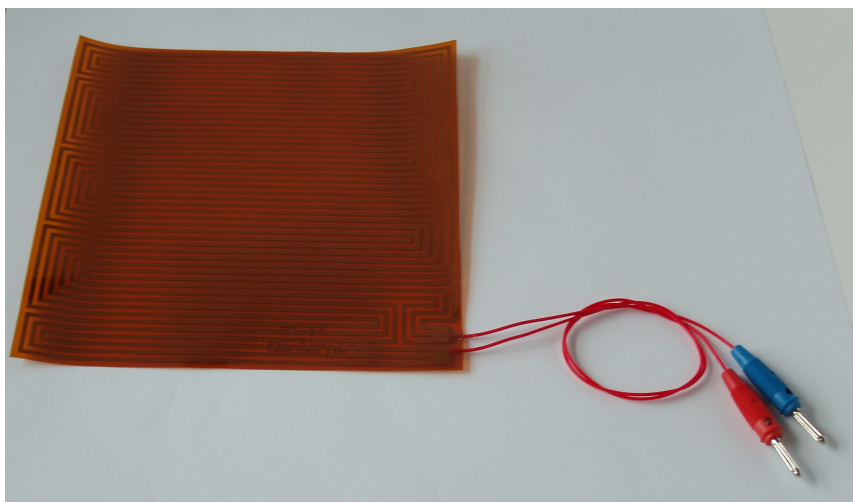
Obrázek 10.9: Topné tělísko firmy Omega

### Flexibilní topná fólie firmy Omega, typ KH-808/10

Parametry: rozměr 200 x 200 mm, tl. 0,25 mm, materiál kapton, max. provozní teplota 200°C, výkon 640 W při 115 V.

Použití: ohřev desek tepelných izolantů a stavebních materiálů.

Umístění: povrchový kontakt, vkládá se přes ochrannou silikonovou gumu mezi desky měřeného materiálu.



Obrázek 10.10: Flexibilní topná fólie

### Horkovzdušná pistole s nastavitelnou teplotou

Parametry: výkon 1700 W/220 V.

## 10.B.2 Kapalinové chladicí elementy

### Kapalinové chladicí elementy pro tepelné vodiče

Rozměry průměr 26 mm, délka 58 mm, průměr přípojných trubiček 6 mm, montážní průměr tyčového tepelného vodiče 10 mm.

Topné médium–voda.

Těsnění o kroužkem.

Použití: termostatizace koncové části tyčového vodiče.

Umístění - montáž: tyčový tepelný vodič je zasunut do otvoru chladicího elementu, těsnění je zajištěno o kroužkem.



Obrázek 10.11: Kapalinové chladicí elementy pro tepelné vodiče

### Kapalinové chladicí elementy deskového typu pro stavební a tepelně izolační materiály

Rozměry: 200 x 200 mm, tl. 8 mm, průměr přípojných trubiček 6 mm.

Topné médium–voda.

Použití: termostatizace koncové části desky tepelného izolantu nebo stavebního materiálu tyčového vodiče.

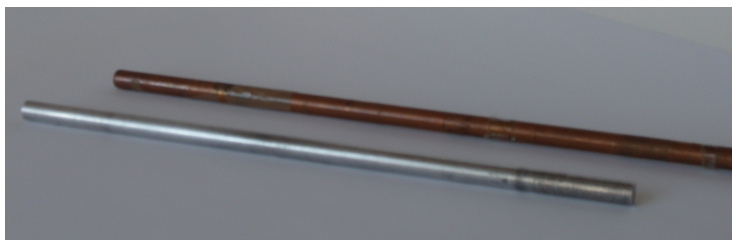
Umístění: povrchový kontakt, přikládá se přes ochrannou silikonovou gumu na desky měřeného materiálu.

### 10.B.3 Tepelné vodiče a izolanty

#### Tyčové tepelné vodiče

Tyče o průměru 10 mm délky 150 mm, 300 mm a 1000 mm z mědi, duralu, nerez oceli a molybdenu.

Montáž: tyče lze skládat do série pomocí speciálního přípravku a stojanu. Tepelnou izolaci zajišťuje kryt z pěnového materiálu. Konce tyčí lze vyhřívat zásuvnými topnými tělisky, nebo flexibilním tělesem, nebo termostatizovat termostatickými komůrkami. Rozložení teploty podél vodiče lze měřit sadou termočlánků.



Obrázek 10.12: Tyčové tepelné vodiče

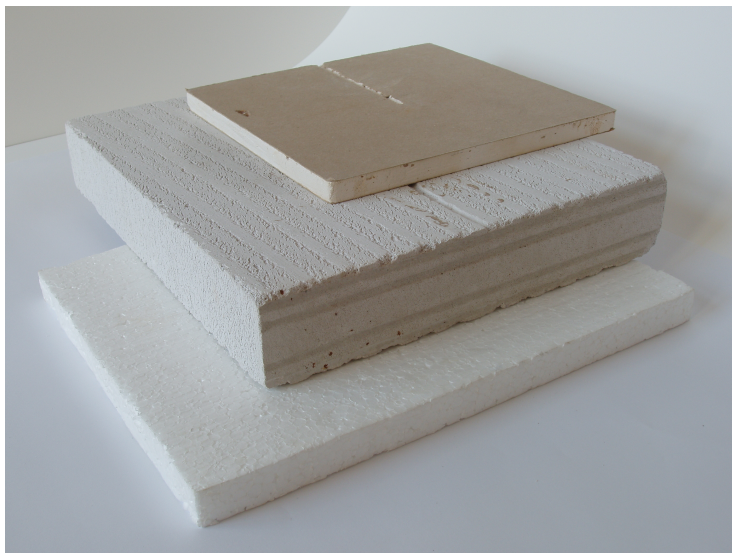
### Deskové tepelné izolanty

K dispozici jsou desky o rozměru 200 mm x 200 mm různých tloušťek.

Sádrokartonové desky

Desky z Ytongu

Desky z extrudovaného polystyrenu



Obrázek 10.13: Izolační deskové materiály

Určení: povrch desek lze vyhřívat elektrickými topidly nebo termostatizovat termostatickými deskami. Teplotu lze měřit termočlánky.

Montáž: desky z tvrdých materiálů se s topnými a termostatickými deskami kontaktují prostřednictvím tenké silikonové gumy, s měkkými materiály je možné je kontaktovat přímo.

#### 10.B.4 Teploměry a termočlánky

K měření rozložení teplot slouží sada drátových termočlánků s počítačovým zpracováním signálu, kontaktní teplotní sonda z termočlánkem typu K, ponorná sonda z termočlánkem typu K a sada laboratorních rtuťových teploměrů.

#### 10.B.5 Montážní stojany a izolační kryty

Stojan umožňuje pospojovat kaskádu tyčí z různých materiálů s elektrickým topením na jednom konci a chlazením (nebo bez chlazení) na druhém konci. Soustava tyčí drží pohromadě přitlakem v ose tyčí vytvářeným (přes tepelně izolační prvky) koncovým stavěcím šroubem. Stojan lze přizpůsobit v širokém rozsahu celkové délce sestavy. V požadovaných místech jsou uchyceny termočlánky, celek je možno izolovat krytem z pěnového izolačního materiálu. Soustavu je možné uložit jak horizontálně, tak vertikálně.

K běžným fixacím slouží standardní laboratorní úchytky a stojánky.

#### 10.B.6 Kalorimetr

Kalorimetr sestává ze soustavy 3 koaxiálních skleněných nádob. Izolaci vnitřního prostoru zajišťuje mezi stěnami nádob vzduch, alternativně pěnová izolační hmota.

Na horním dvouplášťovém krytu je umístěno výkonné míchací zařízení a přívody k elektrickému topnému tělísku firmy Omega TSSM-6 o výkonu 75 W na 28 V. V horním krytu je rovněž otvor pro teploměr.

### 10.B.7 Chladicí okruhy

Chladicí okruhy jsou zásobovány vodou o stálém přetlaku z Mariottovy láhve, ohřívací okruhy napájí termostat firmy Haake.

## 10.C Montážní a provozní pravidla

### 10.C.1 Elektrická topná tělesa

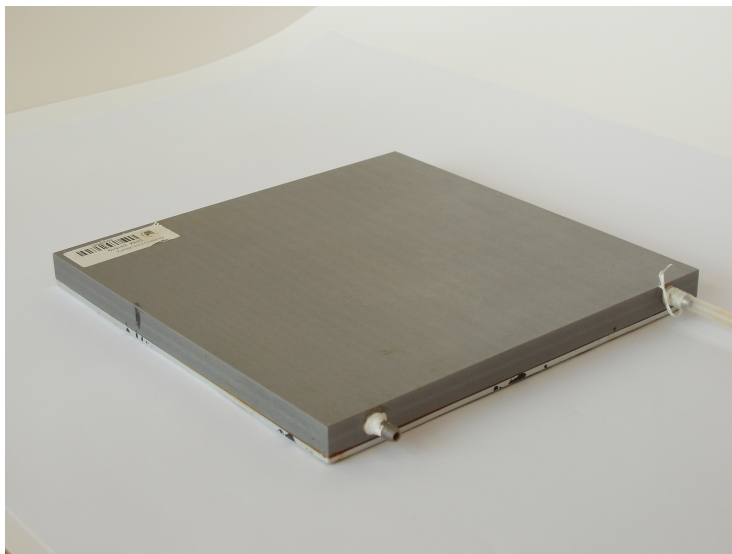
Tělesa se nesmí přehřát nad maximální provozní teplotu. Toto nebezpečí hrozí zejména u flexibilních topných fólií, pokud nejsou chlazeny. Vzhledem k malé tepelné kapacitě všech používaných topných tělísek a fólií může nastat překročení maximální provozní teploty velmi rychle. Proto je nepřipustné zapínat topení na prázdko a bez měření teploty.

Kritickým místem pro mechanické poškození jsou elektrické přívody. V místě připojení k fólii nebo trubičce nesmí být přívody mechanicky namáhány tahem ani ohybem. Při rozebírání sestav se nesmí tělesa vytahovat za přívody, nebo dokonce sestavy za přívody přenášet. Přívody a jejich připojení k topné fólii nebo trubičce nesmí přijít do kontaktu s vodou olejem a dalšími chemikáliemi. Fólie nesmí být ohýbány s poloměrem ohnutí menším než 5 mm, v případě často opakovaného ohnutí s poloměrem menším 10 mm. Pokud se topná fólie přikládá k drsnému povrchu, je zapotřebí ochránit fólii vložením tenké silikonové gumy.

### 10.C.2 Kapalinové chladicí elementy – chladiče

Kapalinové chladicí elementy pro tepelné vodiče se musí nasazovat opatrně tak, aby se nestříhly těsnicí o kroužky. Voda se nesmí do chladicího elementu přivádět pod tlakem, měřená tyč by byla tlakem vytlačena. Po skončení měření se musí sestava rozebrat a měřené tyče osušit a ošetřit pro zamezení koroze.

Čelní plochy kapalinových chladicích elementů deskového typu je třeba chránit před mechanickým poškozením, má-li se kontaktovat chladič na drsný tvrdý povrch, je třeba použít mezivrstvy ze silikonové gumy. Po skončení měření je nutné z chladiče vypudit vodu, předejde se tak možnému zarůstání chladiče bakteriemi a korozi duralu.



Obrázek 10.14: Chladič

### 10.C.3 Tepelné vodiče a izolátory

Tyčové tepelné vodiče pro sériové zapojení je třeba úzkostlivě chránit před mechanickým poškozením, ohnutím a zejména poškozením čelních kontaktovacích ploch. Do montážního stojanu se vkládají pomocí přípravku (který umožňuje jejich koaxiální seřazení) ve vertikální poloze. Po dotažení čelních šroubů se dokončí instalace termočlánků a tepelného krytu. Teprve po ukončení montáže je možné stojan umístit horizontálně. Čelní šroub nesmí tlačit na tyč přímo, jediné přes mechanický a tepelně izolující oddělovací element.

Desky z tepelně izolačního a stavebního materiálu je třeba chránit před nárazem a před navlhnutím. Mají-li drsný povrch, k topné fólii a chladicí desce musí být kontaktovány přes oddělovací silikonovou fólii.

### 10.C.4 Teploměry a termočlánky

Pokud je zapojeno na měřenou tyč víc drátových termočlánků, musí být v tepelném, nikoliv však v elektrickém kontaktu s materiálem tyčí. Je třeba dbát na to, aby se tenká vrstva elektrické izolace na termočlátku nepoškodila.

### 10.C.5 Montážní stojany a izolační kryty

Upínací délku lze nastavit podle délky sestavy sériově zapojených tepelných vodičů pomocí šroubů na svornících, které drží horní přírubu. Přítlak tyčí zajišťuje centrální šroub přes oddělovací tepelně izolační prvek.

### 10.C.6 Kalorimetr

Při plnění kalorimetru je třeba dbát na to, aby se nenamočily přívody elektrického proudu k topení. Míchání se musí regulovat jemně, výkon míchadla je značně předimenzován.

## 10.D Měřicí karta

### 10.D.1 Měřicí karta ADVANTECH

Vícebodové měření teploty je v úloze realizováno multifunkční měřicí kartou PCI-1710HG firmy ADVANTECH. Karta 1710HG je rozšiřující počítačová karta pro sběrnici PCI. Obsahuje obvody pro analogově-digitální převod, digitálně-analogový převod, digitální vstupy a výstupy a čítač. Analogově digitální převod (též A/D konverze) je proces interpretace měřené analogové veličiny (konkrétně elektrického napětí) celým číslem, které je v počítači dále zpracováváno. Naproti tomu digitálně-analogový převod je opačný postup, při kterém je k zadanému číslu v počítači generována odpovídající hodnota analogové veličiny. Analogově-digitální převod tak počítač staví do role měřicího přístroje, digitálně-analogový převod do role regulovatelného zdroje (malého výkonu) či do role generátoru různých napěťových signálů.





Obrázek 10.15: Karta PCI-1710HG ve spojení s konektorovým blokem

rozlišení	12 bitů
počet analogových vstupních kanálů	16 jednostranných nebo 8 rozdílových
rozsah vstupního napětí	max. 10 V, viz tab. 2
vstupní impedance	1 G $\Omega$
doba konverze	8 $\mu$ s
paměť FIFO	4K vzorků
počet analogových výstupních kanálů	2
rozsah výstupního napětí	0 – 5 V, 0 – 10 V
počet digitálních vstupních kanálů	16
počet digitálních výstupních kanálů	16

Tabulka 1 : Parametry měřicí karty PCI-1710HG

Parametry měřicí karty (vzorkovací frekvence snímání analogového signálu, počet bitů převedeného čísla, vstupní a výstupní rozsah napětí atd.) podstatně ovlivňují možnosti použití počítače pro měření. Parametry karty PCI-1710HG jsou shrnuty v tabulce 1.

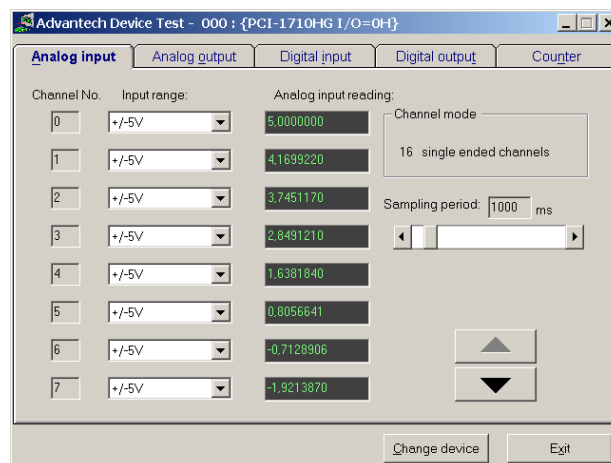
Multifunkčnost karty PCI-1710HG spočívá nejen v přítomnosti všech výše uvedených obvodů pro analýzu a generování signálů, ale i v širokém výběru rozsahů měřeného napětí, který umožňuje přesné měření napěťových signálů různé úrovně (viz tabulka 2).

Rozsah	Vzorkovací frekvence (vz./s)	Chyba měření
Bipolární		
$\pm 10\text{ V}$	100 K	0,01 % of FSR $\pm 1\text{ LSB}$
$\pm 5\text{V}$	100 K	0,01 % of FSR $\pm 1\text{ LSB}$
$\pm 1\text{V}$	35 K	0,02 % of FSR $\pm 1\text{ LSB}$
$\pm 0,5\text{V}$	35 K	0,02 % of FSR $\pm 1\text{ LSB}$
$\pm 0,1\text{V}$	7 K	0,04 % of FSR $\pm 1\text{ LSB}^*$
$\pm 0,05\text{V}$	7K	0,04 % of FSR $\pm 1\text{ LSB}^*$
$\pm 0,01\text{V}$	770	0,08 % of FSR $\pm 1\text{ LSB}^*$
$\pm 0,005\text{V}$	770	0,08 % of FSR $\pm 1\text{ LSB}^*$
Unipolární		
0 – 10V	100 K	0,01 % of FSR $\pm 1\text{ LSB}$
0 – 1V	35 K	0,02 % of FSR $\pm 1\text{ LSB}$
0 – 0,1V	7 K	0,04 % of FSR $\pm 1\text{ LSB}^*$
0 – 0,01V	770	0,08 % of FSR $\pm 1\text{ LSB}^*$

FSR = Full scale range      LSB = least significant bit

\* Je-li vstup zapojen jako rozdílový.

Tabulka 2 : Měřicí rozsahy karty PCI-1710HG.



Obrázek 10.16: Napětí na vstupních kanálech zobrazuje i okno ovladače měřicí karty

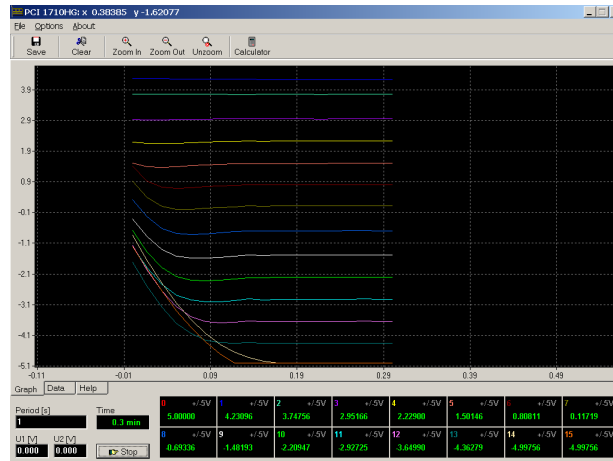
## 10.D.2 Ovládací program

Jednoduché odečtení kartou právě měřených hodnot umožňuje již ovladač měřicí karty (viz. obr. 10.16). Pro pohodlné měření byl v prostředí Borland Delphi 5.0 vyvinut program PCI-1710HG (obr. 10.17), který poskytuje možnost zobrazování a ukládání naměřených dat.

V programu lze snadno nastavovat

- interval mezi měřeními
- počet aktivních kanálů
- rozsah měření napětí jednotlivých kanálů
- napětí obou výstupních kanálů





Obrázek 10.17: Program pro měření s kartou ADVANTECH PCI-1710HG

### Nastavení intervalu

Jednotlivá měření jsou spouštěna softwarově pomocí systémového objektu `timer`. Interval mezi měřeními je tedy zdola omezen hodnotou, která vychází z časového kvanta přidělovaného ve víceúlohovém operačním systému jednotlivým procesům. V programu lze periodu nastavit od 0,1 s výše. Všechny kanály jsou přitom měřeny prakticky současně. Periodu lze měnit i v průběhu měření.

### Volba a počet kanálů

Počet kanálů je roven 16 (8) podle nastavení ovladače karty. 16 kanálů je k dispozici v případě, že všechny analogové vstupy jsou používány jako jednostranné (single ended). Kanály je nutné vybírat v souvislém intervalu, což je dáno používanými funkcemi knihovny DLL. Rozsah používaných kanálů lze změnit kliknutím pravého (levého) tlačítka myši nad okénkem kanálu, čímž dojde k nastavení horní (dolní) meze intervalu použitých kanálů. Aktivní kanál je označen symbolem 'ON', neaktivní symbolem 'OFF'.

### Volba rozsahu kanálů

U každého kanálu je možné nastavit rozsah měřeného napětí (tzv. gain). Ten určuje, v jakém intervalu napětí bude naměřené dvanáctibitové číslo interpretováno, a umožňuje tak podstatně zvýšit rozlišení karty při měření malých napětí. Změna rozsahu se u aktivního kanálu provede jednoduše výběrem ze seznamu nabízených hodnot, který odpovídá přehledu rozsahů uvedeném v tabulce 2. U každého kanálu je možné nastavit rozsah měřeného napětí (tzv. gain). Ten určuje, v jakém intervalu napětí bude naměřené dvanáctibitové číslo interpretováno, a umožňuje tak podstatně zvýšit rozlišení karty při měření malých napětí. Změna rozsahu se u aktivního kanálu provede jednoduše výběrem ze seznamu nabízených hodnot, který odpovídá přehledu rozsahů uvedeném v tabulce 2.

### Napětí výstupních kanálů

Napětí lze volit v rozsahu 0 – 10 V při správně nastaveném ovladači. Hodnoty napětí zapsané do okének jsou okamžitě předány ovladači karty. Desetinným oddělovačem je tečka. Hodnoty lze měnit v průběhu měření.

### Měřené hodnoty jsou zobrazovány

- v okénkách příslušných kanálů

- v grafu
- v komponentě Memo, desetinným oddělovačem je tečka nebo čárka podle nastavení v menu. Obsah lze uložit do textového souboru příkazem `File|Save as` v menu.

### Ovládání grafu

- zvětšení části grafu (výřez) se provede výběrem oblasti tažením myši při stisklém levém tlačítku
- zrušení zvětšení – dvojitým stiskem levého tlačítka myši
- posun výřezu grafu – tažením myši při stisklém pravém tlačítku

Inovace návodů k fyzikálnímu praktiku byla podpořena z prostředků ESF v rámci projektu Inovace výuky aplikované fyziky na PřF MU pod OP Vzdělání pro konkurenceschopnost, reg.č. CZ.1.07/2.2.00/15.0181.