Stručný úvod do zpracování výsledků měření

Ústav fyziky kondenzovaných látek, PřF MU, Brno

Únor 2020

Cílem měření je zjištění správné hodnoty fyzikální veličiny x. Je tedy na místě položit si otázku, jaké informace o této správné hodnotě z jednoho nebo řady opakovaných měření dostáváme. Odhlédneme-li od chyb hrubých (které vedou ke zjištění odlehlých hodnot), je každé měření je zatíženo jednak systematickou chybou, jednak chybou náhodnou. *Systematická chyba* je způsobena měřícími přístroji či nevhodným postupem a snažíme se ji v maximální možné míře potlačit vhodným plánováním měření. Ale i opakovaná měření za stejných podmínek (označíme je x_i, $i = 1 \ldots N$) se mezi sebou poněkud liší - měření je zatíženo *náhodnou chybou.*

Hypotetický soubor nekonečně mnoha naměřených hodnot se nazývá *populace*, přičemž předpokládáme, že testovaná veličina se během měření nemění. Chceme-li zjednodušeně popsat získané *rozdělení* změřených hodnot v populaci, můžeme k tomu využít střední hodnotu populace a její rozptyl. *Střední hodnota* $\langle x \rangle$ populace je dána vztahem

$$N \to \infty : \qquad \langle x \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i,$$

kde N je počet měření. *Rozptyl* σ^2 populace je veličina

$$N \to \infty : \qquad \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \langle x \rangle)^2}{N},$$

postihující variabilitu změřených dat.

My se z našich měření budeme vždy pokoušet o odhad střední hodnoty populace, který pro nás reprezentuje správnou hodnotu měřené veličiny. Naštěstí platí, že pokud je měření ovlivňováno velkým množstvím malých a vzájemně nezávislých náhodných jevů, bude se získané rozdělení měřených hodnot blížit rozdělení *normálnímu* (Gaussovu). V takovém případě do intervalu

$$\langle x \rangle \pm k\sigma$$

padne přibližně 68,3 % změřených hodnot pro $k = 1$, 95,5 % pro $k = 2$ a 99,7 % pro $k = 3$.

Výběr z populace, konečný počet měření. Ve skutečnosti je počet měření vždy konečné číslo N a místo celé populace získáme pouze určitý její *výběrový soubor*. Můžeme se opět pokusit o zjednodušený popis získaných dat, v tomto případě se bude jednat o výběrový průměr a jeho směrodatnou odchylku. *Výběrový průměr* $\bar{x}$ je dán jako aritmetický průměr změřených hodnot,

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i, \tag{1}$$

směrodatná odchylka jednoho měření $s(x)$ je pak

$$s(x) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}{N-1}}.$$

Zůstává otázka, v jakém vztahu je například výběrový průměr k hledané střední hodnotě celé populace - pokud provedeme několik různých sad měření, jejich výběrové průměry se nepochybně budou vzájemně lišit. Tato myšlenka se dá rozvést a můžeme si namísto hodnot samotné veličiny x představit populaci výběrových průměrů z nekonečně mnoha sad měření. Získaná populace bude mít opět normální rozdělení, jehož střední hodnota se dá odhadnout kterýmkoliv z výběrových průměrů $\bar{x}$ s nejistotou danou *směrodatnou odchylkou průměru* $s(\bar{x})$ podle

$$s(\bar{x}) = \frac{s(x)}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}{N(N-1)}}. \tag{2}$$

Výpočet pravděpodobnosti, se kterou správná hodnota veličiny x leží v intervalu $\bar{x} \pm k s(\bar{x})$ je nyní komplikován skutečností, že odhad konáme z jediné sady měření. Uspokojivé rozřešení tohoto problému poskytl William Gosset formou opravného koeficientu: správná hodnota veličiny x získaná z jedné sady N měření leží s pravděpodobností $p \cdot 100\%$ (hovoříme o *hladině spolehlivosti*) v intervalu

$$\bar{x} \pm t_{p,N-1} s(\bar{x}), \tag{3}$$

kde $t_{p,N-1}$ je zmíněný *Studentův koeficient* (Gosset publikoval pod pseudonymem Student). Výpočet Studentova koeficientu je komplikovaný, pro obvyklé hodnoty pravděpodobnosti je však pohodlně tabelován (viz níže).

Veličina $t_{p,N-1} s(\bar{x})$ bývá označována jako *krajní nejistota.*

Zpracování výsledků opakovaných přímých měření

Postup zpracování naměřených hodnot si ukážeme na příkladu. Bylo provedeno $N = 10$ měření doby kmitu t kyvadla v sekundách:

$$t_i[s]: \qquad 1{,}82\ 1{,}81\ 1{,}79\ 1{,}80\ 1{,}81\ 1{,}81\ 1{,}80\ 1{,}83\ 1{,}80\ 1{,}81.$$

Aritmetický průměr dle vztahu (**1**) je $\bar{t} = 1,808$ s a střední kvadratická odchylka aritmetického průměru podle vztahu (**2**) je pro náš případ $s(\bar{t}) \doteq 0{,}003\,59$ s. Pro hladinu spolehlivosti 68,3 % a počet měření $N = 10$ dostáváme z tabulky níže Studentův koeficient $t_{0{,}683,\,9} = 1{,}059$ a tedy náhodná krajní nejistota aritmetického průměru je $t_{0{,}683,\,9}\, s(\bar{x}) \doteq 0{,}003\,802$ s.

Výsledek našeho měření zapíšeme podle vztahu (**3**) následovně:

$$t = (1{,}808 \pm 0{,}004)\ \text{s}.$$

Jinými slovy, s pravděpodobností 68,3 % leží zjišťovaná doba kmitu kyvadla v intervalu $\langle 1{,}804; 1{,}812 \rangle$ s.

• V konečném výsledku se stanovená krajní nejistota se uvádí na jednu až dvě platné cifry a počet desetinných míst aritmetického průměru se zaokrouhluje na stejný řád, jako uvedená krajní nejistota. Výsledek našeho příkladu tak mohl být eventuálně uveden také jako

$$t = (1{,}808\,0 \pm 0{,}003\,8)\ \text{s}.$$

Důvodem k zavedení této úmluvy je přehlednost zápisu, výsledky uvádíme v závěru protokolu výhradně tímto způsobem.

• Pokud je v dané úloze několik různých měření, volíme libovolnou, ale pro všechna měření stejnou hladinu spolehlivosti. Samotný Studentův koeficient se však už měření od měření může lišit, neboť každé z nich mohlo mít jiný počet opakování.

• Máme-li porovnat dvě (či více) měření, můžeme tak vždy činit pouze na základě srovnání jejich výsledných intervalů na stejné hladině spolehlivosti - pokud se intervaly alespoň částečně překryjí, řekneme, že *měření si na zvolené hladině spolehlivosti odpovídají*. Není-li mezi intervaly překryv, řekneme, že *měření si na zvolené hladině spolehlivosti neodpovídají*. V krajním případě lze porovnávat interval proti jedné hodnotě (například při srovnání měření s tabelovanou hodnotou), srovnání dvou hodnot (bez intervalů) nedává smysl. Důvodem k zavedení této úmluvy je objektivita hodnocení měření (nikdy nepoužíváme subjektivní spojení typu 'výsledky jsou si blízké', apod.).

Zpracování výsledků nepřímých měření

Může nastat případ, že žádanou hodnotu veličiny dostaneme nepřímo z měření jiných veličin. Jako jednoduchý příklad může sloužit stanovení plochy obdélníka z opakovaného měření jeho stran.

Konkrétně, je-li veličina C součtem či rozdílem veličin A a B, platí

$$C = A \pm B: \qquad s(\bar{C}) = \sqrt{s(\bar{A})^2 + s(\bar{B})^2}.$$

Je-li veličina C dána součinem či podílem veličin A a B, platí

$$C = AB, C = A/B: \qquad s(\overline{C}) = \bar{C}\sqrt{\frac{s(\bar{A})^2}{\bar{A}^2} + \frac{s(\bar{B})^2}{\bar{B}^2}}.$$

V obou uvedených případech je tedy možné krajní nejistotu nepřímého měření dopočítat z nejistot určených pro přímo měřené veličiny.

Literatura

V. Mitvalský, Zpracováni naměřených hodnot, VUT Brno (1978)
P. Pánek, Úvod do fyzikálních měření, MU Brno (2001)

Tabulka koeficientů Studentova rozdělení

Počet	Hladina spolehlivosti P					
měření N	0,500	0,683	0,900	0,955	0,980	0,990
2	1,000	1,838	6,314	13,968	31,821	63,657
3	0,816	1,321	2,920	4,527	6,965	9,925
4	0,765	1,197	2,353	3,307	4,541	5,841
5	0,741	1,142	2,132	2,869	3,747	4,604
6	0,727	1,111	2,015	2,649	3,365	4,032
7	0,718	1,091	1,943	2,517	3,143	3,707
8	0,711	1,077	1,895	2,429	2,998	3,500
9	0,706	1,067	1,860	2,366	2,896	3,355
10	0,703	1,059	1,833	2,320	2,821	3,250
11	0,700	1,053	1,812	2,284	2,764	3,169
12	0,697	1,048	1,796	2,255	2,718	3,106
13	0,696	1,043	1,782	2,231	2,681	3,055
14	0,694	1,040	1,771	2,212	2,650	3,012
15	0,692	1,037	1,761	2,195	2,625	2,977
16	0,691	1,034	1,753	2,181	2,603	2,947
17	0,690	1,032	1,746	2,169	2,584	2,921
18	0,689	1,030	1,740	2,158	2,567	2,898
19	0,688	1,029	1,734	2,149	2,552	2,878
20	0,688	1,027	1,729	2,141	2,540	2,861
25	0,684	1,020	1,708	2,105	2,485	2,787
30	0,683	1,017	1,697	2,087	2,457	2,750
40	0,681	1,013	1,684	2,064	2,423	2,704
50	0,679	1,010	1,676	2,051	2,403	2,678
100	0,677	1,005	1,660	2,025	2,364	2,626
∞	0,675	1,000	1,645	2,000	2,326	2,576

Table 1: Hodnoty Studentova koeficientu $t_{p,N-1}$.