Integrální počet

Neurčitý integrál

Integrování je opačný početní výkon k diferencování, tj. při integrování hledáme k dané funkci takovou funkci, jejíž derivace je rovna funkci integrované.

Je-li spojitá funkce $f(x)$ definována v otevřeném intervalu (a, b) a také funkce $F(x)$ ve všech bodech intervalu (a, b) a platí-li

$$F'(x) = f(x),$$

pak je funkce $F(x)$ *primitivní funkcí* k funkci $f(x)$ a funkce $F(x)$ se nazývá *neurčitým integrálem* funkce $f(x)$, tj.

$$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Pravá strana této rovnosti je neurčitý integrál funkce $f(x)$, integrovanou funkcí (integrandem) je $f(x)$, integrační proměnnou je x a integračním znaménkem je $\int$.

Protože $[F(x) + C]' = F'(x) + 0 = F'(x)$, je primitivní funkcí také $F(x) + C$, kde C je každé reálné číslo, kterému říkame *integrační konstanta*. Neurčitým integrálem funkce $f(x)$ definované v intervalu (a, b) je tedy množina všech primitivních funkcí

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C.$$

Tento zápis geometricky představuje nekonečné množství integrálních křivek rovnoběžně posunutých ve směru osy y.

Výpočet neurčitého integrálu je obtížnější než počítání derivací a neexistuje pro něj žádný obecný předpis. Musíme znát základní vzorce diferenciálního počtu, znát vlastnosti neurčitého integrálu shrnuté do základních vět a prakticky poznat integrační metody.

Výpočet neurčitých integrálů provádíme pomocí několika základních postupů, na které se nyní podíváme blíž.

1. Přímou integrací, která používá výsledků diferenciálního počtu shrnutých do základních (tabulkových) vzorců neurčitých integrálů, které je nutné umět z paměti. Jsou to:

1. $\displaystyle\int x^n \, \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

2. $\displaystyle\int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \ln|x| + C$

3. $\displaystyle\int \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = e^x + C$

4. $\displaystyle\int a^x \, \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C = a^x \log_a \mathrm{e} + C$

5. $\displaystyle\int \sin x \, \mathrm{d}x = -\cos x + C$

6. $\displaystyle\int \cos x \, \mathrm{d}x = \sin x + C$

7. $\displaystyle\int \operatorname{tg} x \, \mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C$

8. $\displaystyle\int \operatorname{cotg} x \, \mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C$

9. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x} \, \mathrm{d}x = \operatorname{tg} x + C$

10. $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x} \, \mathrm{d}x = -\operatorname{cotg} x + C$

11. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x = \arcsin x + C$

12. $\displaystyle\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x = \arccos x + C$

13. $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2} \, \mathrm{d}x = \operatorname{arctg} x + C$

14. $\displaystyle\int -\frac{1}{1+x^2} \, \mathrm{d}x = \operatorname{arccotg} x + C$

15. $\displaystyle\int \sinh x \, \mathrm{d}x = \cosh x + C$

16. $\displaystyle\int \cosh x \,\mathrm{d}x = \sinh x + C$

17. $\displaystyle\int \operatorname{tgh} x \,\mathrm{d}x = \ln|\cosh x| + C$

18. $\displaystyle\int \operatorname{cotgh} x \,\mathrm{d}x = \ln|\sinh x| + C$

19. $\displaystyle\int \frac{1}{\sinh^2 x} \,\mathrm{d}x = -\operatorname{cotgh} x + C$

20. $\displaystyle\int \frac{1}{\cosh^2 x} \,\mathrm{d}x = \operatorname{tgh} x + C$

21. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \,\mathrm{d}x = \operatorname{argsinh} x + C = \ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right| + K$

22. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \,\mathrm{d}x = \operatorname{argcosh} x + C = \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + K$

23. $\displaystyle\int \frac{1}{1-x^2} \,\mathrm{d}x = \operatorname{argtgh} x + C = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} + K$

24. $\displaystyle\int \frac{1}{1-x^2} \,\mathrm{d}x = \operatorname{argcotgh} x + C = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1} + K$

25. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-1} \,\mathrm{d}x = -\operatorname{argcotgh} x + C = \frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1} + K$

26. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+a^2} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$

27. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-a^2} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

28. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \,\mathrm{d}x = \arcsin\frac{x}{a} + C$

29. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} \,\mathrm{d}x = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C$

30. $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)} \,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C$

2. Pomocí vlastností neurčitého integrálu

$$\mathrm{d}\left[\int f(x)\,\mathrm{d}x\right] = f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\int \mathrm{d}f(x) = f(x) + C,$$

$$\int kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int f(x)\,\mathrm{d}x, \quad k \neq 0,$$

$$\int [f(x) \pm g(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Nelze-li ihned použít vzorců uvedených ad 1. a ad 2., upravujeme integrovanou funkci vhodnými způsoby; nejčastěji používané jsou tyto:

- Integrovanou funkci upravíme (když to jde) na algebraický součet funkcí jednoduchých, jejichž integrály vypočteme pomocí základních vzorců

$$\begin{aligned}\int \frac{(x^2+1)^2}{x^3}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{x^4+2x^2+1}{x^3}\,\mathrm{d}x = \\ &= \int x\,\mathrm{d}x + 2\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{x^2}{2} + C_1 + 2\ln x + C_2 + \frac{x^{-2}}{-2} + C_3 = \\ &= \frac{x^2}{2} + 2\ln x - \frac{1}{2x^2} + C;\end{aligned}$$

  integrační konstanty C_1, C_2, C_3 jsou sloučeny do integrační konstanty C.

- Je-li integrovaná funkce zlomek, podíváme se, jestli není čitatel zlomku derivací jmenovatele nebo nedá-li se dovolenými úpravami na takový případ převést

$$\begin{aligned}&\int \frac{x}{x^3-3}\,\mathrm{d}x = \\ &\qquad = \int \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2-3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2-3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln|x^2-3| + C,\end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(\ln x)'}{\ln x}\,\mathrm{d}x = \ln|\ln x| + C.$$

- Můžeme-li integrovanou funkci vyjádřit jako součin dvou funkcí ve tvaru

  $$[f(x)]^n\, f'(x),$$

  tj. první součinitel je mocnina funkce $f(x)$ a druhý je derivací $f'(x)$, potom je

  $$\int [f(x)]^n\, f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + C.$$

  Konkrétně

  $$\int (8x^3 + 4x)\,\mathrm{d}x = \int (2x^2+1)\,4x\,\mathrm{d}x = \frac{(2x^2+1)^2}{2} + C.$$

- Úpravou diferenciálu lze přejít při výpočtu na jednoduchý integrál

  $$\int \sin 2x = \int \sin 2x\,\mathrm{d}\left(\frac{2x}{2}\right) = \frac{1}{2}\int \sin 2x\,\mathrm{d}(2x) = -\frac{1}{2}\cos 2x + C.$$

3. Substituční metodou (je založena na derivaci složených funkcí), kterou zavádíme za vhodnou část nebo za celou funkci novou proměnnou (obvykle t nebo z) a v nové proměnné vyjádříme i diferenciál $\mathrm{d}x$. Substituci provedeme substituční rovnicí, kterou proto musíme diferencovat. Jsou dvě možnosti substituce

$$t = \varphi(x) \quad \text{nebo} \quad x = g(t),$$

označované jako první nebo druhé pravidlo o substituci. Které z nich použijeme záleží na konkrétním příkladě.

Podle prvního pravidla o substituci zjednodušíme integrál

$$\int f[\varphi(x)]\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$$

substitucí

$$t = \varphi(x) \Rightarrow \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t,$$

takže je

$$\int f[\varphi(x)]\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Integrál na pravé straně řešíme a do výsledku dosadíme za $t = \varphi(x)$, čímž se vrátíme k původní proměnné.

Konkrétně vypočítejme $\int (2x-3)^{10}\,\mathrm{d}x$, $x \in (-\infty, \infty)$. Povýšit dvojčlen v závorce na desátou a počítat jednotlivé integrály jeho členů by bylo velmi zdlouhavé. Proto položíme

$$t = \varphi(x) = 2x - 3.$$

Tuto substituční rovnici diferencujeme

$$\mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x \Rightarrow\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t$$

a dosadíme

$$\int (2x-3)^{10}\,\mathrm{d}x = \int t^{10} \cdot \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int t^{10}\,\mathrm{d}t =$$

(dostali jsme jednoduchý integrál, který řešíme přímou integrací a ve výsledku se vrátíme k původní proměnné x)

$$= \frac{1}{2}\frac{t^{11}}{11} + C = \frac{1}{22}(2x-3)^{11} + C.$$

Podle výše uvedeného druhého substitučního pravidla převádíme řešení integrálu $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ substitucí

$$x = g(t) \Rightarrow\ \mathrm{d}x = g'(t)\,\mathrm{d}t$$

na výpočet integrálu na pravé straně rovnosti

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f[g(t)]\,g'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Do výsledku pak za t dosadíme inverzní funkci k funkci $x = g(t)$.

Například $\int (a^2 - x^2)^{1/2}\,\mathrm{d}x$, $a \neq 0$, $|x| < a$. Substituční rovnice je $x = a\sin t$, kterou diferencujeme ($\mathrm{d}x = a\cos t\,\mathrm{d}t$) a hned si najdeme inverzní funkci k funkci $x = a\sin t$ ($\sin t = x/a$, $t = \arcsin(x/a)$) pro dosazení do výsledku.

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}} a\cos t\,\mathrm{d}t = \int \frac{a\cos t\,\mathrm{d}t}{a\sqrt{1-\sin^2 t}} =$$

$$= \int \frac{\cos t}{\cos t}\,\mathrm{d}t = \int \mathrm{d}t = t = \arcsin\frac{x}{a} + C.$$

4. Metodou per partes (tj. integrací po částech), která je založena na derivaci součinu dvou funkcí. Pro funkce $u(x)$ a $v(x)$ – zkráceně psáno u a v – které mají v nějakém intervalu spojité derivace, platí pro derivaci jejich součinu vzorec

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Integrací této rovnice dostaneme $\int (uv)' \,\mathrm{d}x = \int u'v \,\mathrm{d}x + \int uv' \,\mathrm{d}x$ a z toho vyplývá, že

$$\int u'v \,\mathrm{d}x = uv - \int uv' \,\mathrm{d}x.$$

Tento vzorec předepisuje postup při integrování metodou per partes. Integrovanou funkci rozložíme na součin $u'v$ tak, aby se integrál funkce u' dal poměrně snadno určit (nejlépe ze základních integrálů, je-li to možné), dále určíme derivaci druhého činitele součinu v. Výpočet je pak zřejmý z pravé strany vzorce, tj. tu část funkce, kterou jsme označili u' integrujeme (dostaneme u) a část, kterou jsme označili v derivujeme (dostaneme v'). Za znaménko rovnosti napíšeme součin $u \cdot v$ a od něho odečteme (pozor na znaménko) integrál $\int uv' \,\mathrm{d}x$, který vypočítáme. Metoda má smysl tehdy, je-li integrál $\int uv' \,\mathrm{d}x$ na pravé straně vzorce jednodušší než integrál $\int u'v \,\mathrm{d}x$ na straně levé. V některých případech musíme postup opakovat vícekrát a je proto nutné volit (místo písmen u a v) další písmena r', s, q', p atd., aby byl postup řešení přehledný a lépe kontrolovatelný. Výpočet provedeme na dvou typických příkladech.

1. $\int \ln x \,\mathrm{d}x$, $x > 0$; integrovanou funkci $\ln x$ rozložíme na součin $1 \cdot \ln x$ a položíme $u' = 1$ a $v = \ln x$. Určíme $u = \int 1 \,\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x = x$ a $v' = (\ln x)' = 1/x$. Dosadíme do vzorce a dostaneme

$$\int \ln x \,\mathrm{d}x = x \ln x - \int x \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = x \ln x - x = x(\ln x - 1) =$$
$$= x(\ln x - \ln \mathrm{e}) = x \ln \frac{x}{\mathrm{e}} + C.$$

2. $\int (x^2/\mathrm{e}^x) \,\mathrm{d}x$, $x \in (-\infty, \infty)$. $u' = 1/\mathrm{e}^x$, $v = x^2 \Rightarrow \int \mathrm{e}^{-x} \,\mathrm{d}x = -1/\mathrm{e}^x$, $v' = 2x$.

$$\int \frac{x^2}{\mathrm{e}^x} \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\mathrm{e}^x} x^2 - \int -\frac{1}{\mathrm{e}^x} 2x \,\mathrm{d}x = -\frac{x^2}{\mathrm{e}^x} + 2 \int \frac{x}{\mathrm{e}^x} \,\mathrm{d}x.$$

Postup znovu opakujeme s jinými písmeny: $r' = \mathrm{e}^{-x}$, $s = x \Rightarrow r = \int \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -e^{-x}$, $s' = 1$ a pokračujeme v dosazování podle vzorce, takže dostaneme

$$-\frac{x^2}{\mathrm{e}^x} + 2\left(-\frac{1}{\mathrm{e}^x}x - \int -\frac{1}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x\right) = -\frac{x^2}{\mathrm{e}^x} + 2\left(-\frac{x}{\mathrm{e}^x} - \frac{1}{\mathrm{e}^x}\right) = $$
$$= -\frac{x^2+2x+2}{\mathrm{e}^x} + C.$$

Při výpočtu některého integrálu je často nutné uvedené metody kombinovat.

Integrování reálných racionálních funkcí

Při integrování reálných racionálních funkcí jde vlastně o integrování mnohočlenů a částečných (parciálních) zlomků. Každou neryze racionální funkci $f(x) = P(x)/Q(x)$, kde $P(x)$ a $Q(x)$ jsou mnohočleny (stupeň mnohočlenu $P(x)$ je vyšší nebo stejný jako stupeň mnohočlenu $Q(x)$), lze po dělení čitatele jmenovatelem rozložit na mnohočlen a funkci ryze racionální, tj.

$$f(x) = R(x) + \frac{S(x)}{Q(x)};$$

$R(x)$ je mnohočlen (podíl), $S(x)$ je zbytek po dělení a $S(x)/Q(x)$ je funkce ryze racionální. Ryze racionální funkci rozložíme na parciální zlomky. Ty můžeme rozdělit na čtyři typy:

- $A/(x-\alpha)$, A, α jsou reálná čísla, α jsou různé reálné kořeny jmenovatele $Q(x)$,
- $A/(x-\alpha)^k$, $k > 1$ přirozené a α je k-násobný reálný kořen jmenovatele $Q(x)$,
- $(Bx+C)/(x^2+px+q)$, diskriminant $D < 0$, tj. jmenovatel zlomku má komplexní kořeny,
- $(Bx+C)/(x^2+px+q)^k$, $D < 0$, $k > 1$ celé a jmenovatel zlomku má k-násobné komplexní kořeny.

Koeficienty A, B, C najdeme buď porovnáním nebo výpočtem. Integrály prvních dvou typů počítáme mezi integrály základní:

$$\int \frac{1}{x-\alpha}\,\mathrm{d}x = \ln|x-\alpha| + C, \quad x \neq \alpha,$$

$$\int \frac{1}{(x-\alpha)^k}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(1-k)(x-\alpha)^{k-1}} + C, \quad x \neq \alpha,\ k > 1 \text{ celé.}$$

(a) Je-li stupeň čitatele integrovaného zlomku vyšší (nebo stejný) než stupeň jmenovatele, dělíme čitatele jmenovatelem:

$$\int \frac{2x^3}{x+1}\,\mathrm{d}x = 2\int \frac{x^3}{x+1}\,\mathrm{d}x, \quad x \neq -1,$$

$$x^3 : (x+1) = x^2 - x + 1 - \frac{1}{x+1},$$

nebo úpravou

$$\frac{x^3}{x+1} = \frac{x^3+1-1}{x+1} = \frac{x^3+1}{x+1} - \frac{1}{x+1} = x^2 - x + 1 - \frac{1}{x+1}.$$

Je tedy

$$\begin{aligned} 2\int \frac{x^3}{x+1}\,\mathrm{d}x &= 2\int \left(x^2 - x + 1 - \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x = \\ &= 2\int x^2\,\mathrm{d}x - 2\int x\,\mathrm{d}x + 2\int \mathrm{d}x - 2\int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{2}{3}x^3 - x^2 + 2x - 2\ln|x+1| + C. \end{aligned}$$

$\int (3x^2 - 10x + 4)/(x^3 - x^2 - 4x + 4)\,\mathrm{d}x$, $x \neq 1$, $x \neq \pm 2$; jmenovatele upravíme vytýkáním:

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^2-10x+4}{x^3-x^2-4x+4}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{3x^2-10x+4}{x^2(x-1)-4(x-1)}\,\mathrm{d}x = \\ &= \int \frac{3x^2-10x+4}{(x-1)(x+2)(x-2)}\,\mathrm{d}x; \end{aligned}$$

$$\frac{3x^2-10x+4}{(x-1)(x+2)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-2}.$$

Koeficienty A, B, C určíme nejprve porovnáním a potom výpočtem. Vynásobením jmenovatelem dostaneme

$$\begin{aligned} 3x^2 - 10x + 4 &= \\ &= A(x+2)(x-2) + B(x-1)(x-2) + C(x-1)(x+2) = \\ &= Ax^2 - 4A + Bx^2 - 3Bx + 2B + Cx^2 + Cx - 2C = \\ &= (A+B+C)x^2 + (-3B+C)x + (-4A+2B-2C) \end{aligned}$$

Vzniklá rovnice je identicky platná pro každou hodnotu proměnné x a koeficienty stejných mocnin na obou stranách se sobě rovnají, tj.

$$\begin{aligned} A + B + C &= 3 \\ -3B + C &= -10 \\ -2A + B - C &= 2 \end{aligned}$$

Řešením tohoto systému rovnic dostáváme

$$A = 1,\ B = 3,\ C = -1.$$

Proto

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^2 - 10x + 4}{x^3 - x^2 - 4x + 4}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x + 3\int \frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x-2}\,\mathrm{d}x = \\ &= \ln|x-1| + 3\ln|x+2| - \ln|x-2| = \\ &= \ln\left|\frac{(x-1)(x+2)^3}{x-2}\right| + C. \end{aligned}$$

Výpočtem dostaneme:

$$\frac{3x^2 - 10x + 4}{(x-1)(x+2)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-2}.$$

Abychom vypočítali A, vynásobíme rovnici výrazem $x - 1$. Dostaneme

$$\frac{3x^2 - 10x + 4}{(x+2)(x-2)} = A + (x-1)\left(\frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-2}\right).$$

Položíme-li $x = 1$ na obou stranách, bude součin na pravé straně roven nule:

$$\frac{3 \cdot 1^2 - 10 \cdot 1 + 4}{(1+2)(1-2)} = A = 1.$$

Koeficienty B a C vypočítáme stejným postupem (při výpočtu B násobíme $x + 2$ a dosadíme do obou stran rovnice $x = -2$, při výpočtu C násobíme $x - 2$ a dosadíme $x = 2$); $B = 3$, $C = -1$.

(b) Má-li jmenovatel ryze racionální funkce $S(x)/Q(x)$ reálný vícenásobný kořen α, pak mají parciální zlomky tvar $A/(x-\alpha)^k$. Funkci $S(x)/Q(x)$ potom můžeme rozložit na

$$\frac{S(x)}{Q(x)} = \frac{A_k}{(x-\alpha)^k} + \frac{A_{k-1}}{(x-\alpha)^{k-1}} + \frac{A_{k-2}}{(x-\alpha)^{k-2}} + \cdots + \frac{A_1}{x-\alpha}$$

a koeficienty $A_k, A_{k-1}, \ldots$ můžeme počítat podle vzorce

$$A_{k-r} = \frac{1}{r!}\left[\left(\frac{S(x)}{Q_1(x)}\right)^{(r)}\right]_{x=\alpha}$$

nebo (a to je častější) porovnáním, případně výpočtem jako v předchozím příkladě.

$\int (3x^3 - 14x^2 + 27x - 16)/((x^2 - 4x + 4)(x^2 - 2x))\,\mathrm{d}x$, $x \neq 0$, $x \neq 2$. Integrovanou funkci rozložíme na elementární zlomky. Jelikož jmenovatele upravíme na $(x-2)^2 x(x-2) = x(x-2)^3$, bude

$$\frac{3x^3 - 14x^2 + 27x - 16}{(x-2)^3 x} = \frac{A_3}{(x-2)^3} + \frac{A_2}{(x-2)^2} + \frac{A_1}{x-2} + \frac{B}{x}.$$

Použitím vzorce A_{k-r} spočítáme koeficienty A_3, A_2, A_1, B:

$$A_3 = A_{3-0} = \frac{1}{0!}\left[\left(\frac{3x^3 - 14x^2 + 27x - 16}{x}\right)^{(0)}\right]_{x=2} =$$

(nultá derivace je táž funkce)

$$= \frac{1}{1} \cdot \frac{24 - 56 + 54 - 16}{2} = \frac{6}{2} = 3.$$

$$A_2 = A_{3-1} = \frac{1}{1!}\left[\left(\frac{3x^3 - 14x^2 + 27x - 16}{x}\right)'\right]_{x=2} =$$

$$= \left[\left(3x^2 - 14x + 27 - \frac{16}{x}\right)'\right]_{x=2} = \left[\left(6x - 14 + 0 + \frac{16}{x^2}\right)\right]_{x=2} =$$

$$= 12 - 14 + 4 = 2.$$

$$
\begin{aligned}
A_1 = A_{3-2} &= \frac{1}{2!}\left[\left(3x^2 - 14x + 27 - \frac{16}{x}\right)''\right]_{x=2} = \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(6x - 14 + \frac{16}{x^2}\right)'\right]_{x=2} = \frac{1}{2}\left[6 - \frac{32}{x^3}\right]_{x=2} = \\
&= \frac{1}{2}\left(6 - \frac{32}{8}\right) = \frac{1}{2}(6-4) = 1.
\end{aligned}
$$

$$
B = \left[\frac{3x^3 - 14x^2 + 27x - 16}{(x-2)^3}\right]_{x=0} = \frac{-16}{(0-2)^3} = 2.
$$

Řešením je tedy

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{3x^3 - 14x^2 + 27x - 16}{(x^2 - 4x + 4)(x^2 - 2x)}\,\mathrm{d}x = \\
&\quad = \int \frac{3}{(x-2)^3}\,\mathrm{d}x + \int \frac{2}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{x-2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x = \\
&\quad = 3\frac{1}{(1-3)(x-2)^2} + 2\frac{1}{(1-2)(x-2)} + \ln|x-2| + 2\ln|x| = \\
&\quad = -\frac{3}{2}\frac{1}{(x-2)^2} - \frac{2}{x-2} + \ln|x-2| + 2\ln|x| + C.
\end{aligned}
$$

(c) V případě, že má jmenovatel racionální lomené funkce kromě reálných součinitelů také kvadratický trojčlen, jehož diskriminant $D < 0$, je rozložitelný na sdružené komplexní součinitele. Jeden (případně i víc) z parciálních zlomků bude třetího typu $(Bx+C)/(x^2+px+q)$, jak uvidíme z následujícího příkladu.

$\int (x^2 - 3x + 1)/((x+3)(x^2 - 2x + 5))\,\mathrm{d}x$. Integrovanou funkci rozložíme na parciální zlomky:

$$
\begin{aligned}
\frac{x^2 - 3x + 1}{(x+3)(x^2 - 2x + 5)} &= \frac{A}{x+3} + \frac{Bx + C}{x^2 - 2x + 5} \qquad | \cdot (x+3)(x^2 - 2x + 5) \\
x^2 - 3x + 1 &= A(x^2 - 2x + 5) + (Bx + C)(x+3) = \\
&= (A+B)x^2 - (2A - 3B - C)x + (5A + 3C)
\end{aligned}
$$

Rovnice platí identicky pro každou hodnotu x. Porovnáme-li součinitele při stejných mocninách, dostaneme systém jehož řešením jsou čísla $A = 19/20$, $B = 1/20$ a $C = -25/20$. Danou funkci tedy můžeme rozložit na

$$\frac{x^2 - 3x + 1}{(x+3)(x^2 - 2x + 5)} = \frac{19}{20}\frac{1}{x+3} + \frac{1}{20}\frac{x - 25}{x^2 - 2x + 5},$$

čili

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2 - 3x + 1}{(x+3)(x^2 - 2x + 5)}\,\mathrm{d}x &= \frac{19}{20}\int \frac{1}{x+3}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{20}\int \frac{x-25}{x^2 - 2x + 5}\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{19}{20}\ln|x+3| + \frac{1}{20}\int \frac{x-25}{x^2 - 2x + 5}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Integrál $\int (x-25)/(x^2-2x+5)\,\mathrm{d}x$ je typu $\int (Mx+N)/(x^2+px+q)\,\mathrm{d}x$ v němž je diskriminant jmenovatele $D < 0$, tj. $p^2/4 - q < 0$. Integrovanou funkci rozložíme tak, aby první část byla typu $f'(x)/f(x)$ a druhá $1/(x^2 + px + q)$ a to pomocí neurčitých koeficientů k_1 a k_2

$$\frac{x - 25}{x^2 - 2x + 5} = k_1\frac{2x - 2}{x^2 - 2x + 5} + k_2\frac{1}{x^2 - 2x + 5}.$$

k_1 a k_2 se určí z identické rovnice

$$\begin{aligned} k_1(2x - 2) + k_2 &= x - 25, \\ 2k_1x - 2k_1 + k_2 &= x - 25.\end{aligned}$$

Odtud dostaneme porovnáním u stejných mocnin, že $k_1 = 1/2$ a $k_2 = -24$, takže

$$\begin{aligned}\frac{1}{20}\int \frac{x - 25}{x^2 - 2x + 5}\,\mathrm{d}x &= \\ &= \frac{1}{20}\left(\frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2 - 2x + 5}\,\mathrm{d}x - 24\int \frac{1}{x^2 - 2x + 5}\,\mathrm{d}x\right) = \\ &= \frac{1}{40}\int \frac{2x-2}{x^2 - 2x + 5}\,\mathrm{d}x - \frac{24}{20}\int \frac{1}{x^2 - 2x + 5}\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{40}\ln|x^2 - 2x + 5| - \frac{6}{5}\int \frac{1}{x^2 - 2x + 5}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Zbývá tedy ještě vypočítat poslední integrál, což provedeme úpravou jmenovatele a jednoduchou substitucí:

$$\begin{aligned}
-\frac{6}{5}\int \frac{1}{x^2-2x+5}\,\mathrm{d}x &= -\frac{6}{5}\int \frac{1}{x^2-2x+1+4}\,\mathrm{d}x = \\
&= -\frac{6}{5}\int \frac{1}{(x-1)^2+4}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} x-1=2t \\ \mathrm{d}x = 2\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \\
&= -\frac{6}{5}\int \frac{1}{4t^2+4} 2\,\mathrm{d}t = -\frac{5}{3}\int \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \\
&= -\frac{3}{5}\operatorname{arctg} t = -\frac{3}{5}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2}.
\end{aligned}$$

Celkové řešení je tedy

$$\begin{aligned}
&\int \frac{x^2-3x+1}{(x+3)(x^2-2x+5)}\,\mathrm{d}x = \\
&\quad = \frac{19}{20}\ln|x+3| + \frac{1}{40}\ln|x^2-2x+5| - \frac{3}{5}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2} + C.
\end{aligned}$$

Poznámka. Integrál $\int 1/(x^2+px+q)\,\mathrm{d}x, D<0$, je nutné si zapamatovat jako integrál základní:

$$\int \frac{1}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C.$$

Integrování parciálního zlomku čtvrtého typu $(Bx+C)/(x^2+px+q)^k$, $k>1$ celé, provádíme pomocí rekurentního vzorce

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^k}\,\mathrm{d}x = -\frac{B}{2(k-1)}\cdot\frac{1}{(x^2+px+q)^{k-1}} + \left(C-\frac{Bp}{2}\right) I_k,$$

kde

$$\begin{aligned}
I_k &= \int \frac{1}{(x^2+px+q)^k}\,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{x+\frac{p}{2}}{2(k-1)\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}\cdot\frac{1}{(x^2+px+q)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2(k-1)\left(q-\frac{p^2}{4}\right)} I_{k-1}.
\end{aligned}$$

Jako příklad vypočítejme $\int(3x+2)/(x^2+x+1)^2\,\mathrm{d}x,\ x^2+x+1\neq 0.$

$$\begin{aligned}\int\frac{3x+2}{(x^2+x+1)^2}\,\mathrm{d}x &= -\frac{3}{2(2-1)}\cdot\frac{1}{x^2+x+1}+\left(2-\frac{3\cdot 1}{2}\right)I_2 = \\ &= -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x^2+x+1}+\frac{1}{2}I_2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_2 &= \int\frac{1}{(x^2+x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{x+\dfrac{1}{2}}{2(2-1)\left(1-\dfrac{1}{4}\right)}\cdot\frac{1}{x^2+x+1}+\frac{4-3}{2(2-1)\left(1-\dfrac{1}{4}\right)}I_1 = \\ &= \frac{2x+1}{3}\cdot\frac{1}{x^2+x+1}+\frac{2}{3}I_1.\end{aligned}$$

Integrál I_1 je ale základní integrál z poznámky předcházejícího příkladu, proto použitím jeho vzorce dostáváme, že

$$\int\frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{1}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\dfrac{1}{2}}{\sqrt{1-\dfrac{1}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$$

Konečně je tedy zadaný integrál roven

$$\begin{aligned}&\int\frac{3x+2}{(x^2+x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \\ &= -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x^2+x+1}+\frac{1}{2}\left(\frac{2x+1}{3}\cdot\frac{1}{x^2+x+1}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) = \\ &= \frac{1}{x^2+x+1}\left(-\frac{3}{2}+\frac{2x+1}{6}\right)+\frac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} = \\ &= \frac{1}{x^2+x+1}\cdot\frac{x-4}{3}+\frac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.\end{aligned}$$

(d) Metoda Ostrogradského je výhodná při integrování funkcí ryze racionálních lomených (je-li funkce neryze racionální, postupujeme tak, jak už bylo uvedeno), jejichž rozklad jmenovatele na kořenové činitele neznáme, ale lze ji použít i když je známe.

Integrál racionální funkce $f(x) = P(x)/Q(x)$, jejíž jmenovatel $Q(x)$ má vícenásobné kořeny, je

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}\,\mathrm{d}x, \tag{1}$$

kde mnohočleny $P_1(x)$ a $P_2(x)$ jsou stupně o jednotku nižšího než mnohočleny $Q_1(x)$ a $Q_2(x)$. Koeficienty těchto mnohočlenů se určí pomocí neurčitých koeficientů porovnáním z rovnosti

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \left(\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\right)' + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)},$$

kterou dostaneme z rovnosti (1) derivováním. Postup ukážeme na konkrétním příkladě $\int x^2/(x^2+2x+2)^2\,\mathrm{d}x,\ x^2+2x+2 \neq 0$. Podle rovnosti (1) je

$$\int \frac{x^2}{(x^2+2x+2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{Ax+B}{x^2+2x+2} + \int \frac{Cx+D}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x.$$

Tuto rovnost zderivujeme:

$$\frac{x^2}{(x^2+2x+2)^2} = \frac{A(x^2+2x+2)-(Ax+B)(2x+2)}{(x^2+2x+2)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+2}.$$

Vynásobením jmenovatelem $(x^2+2x+2)^2$ a jednoduchou úpravou dostaneme

$$x^2 = Cx^3 + (-A+2C+D)x^2 + (2C-2B+2D)x + (2A-2B+2D).$$

Porovnáním koeficientů při stejných mocninách na obou stranách dostaneme soustavu čtyř lineárních rovnic jejímž řešením jsou čísla $A=0,\ B=1,\ C=0,\ D=1$. Proto má integrál řešení

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{(x^2+2x+2)^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{x^2+2x+2} + \int \frac{1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{x^2+2x+2} + \frac{1}{\sqrt{2-1^2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2-1^2}} = \\ &= \frac{1}{x^2+2x+2} + \operatorname{arctg}(x+1) + C.\end{aligned}$$

Integrování iracionálních a transcendentních funkcí

Integrováním iracionálních funkcí dostaneme elementární funkce jen v některých případech a takové integrály můžeme vhodnou substitucí převést na integrály funkcí racionálních. Uvedeme je ve stručném přehledu s ukázkovými příklady, neboť při řešení těchto příkladů jde o to, poznat, kterému typu zadaný integrál odpovídá.

a) integrál typu

$$\int R\left(x, \sqrt[s]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) \mathrm{d}x, \ ad - bc \neq 0, \ s \geq 2 \text{ celé},$$

kde a, b, c, d jsou konstanty. Písmeno R znamená, že integrovaná funkce vznikla racionálními početními úkony (sčítáním, odčítáním, násobením a dělením) výrazů, obsahujících x a uvedené odmocniny. Takové integrály řešíme substitucí

$$t = \sqrt[s]{\frac{ax+b}{cx+d}},$$

z níž vypočteme x a diferencujeme:

$$\mathrm{d}x = \frac{(ad-bc)st^{s-1}}{(a-ct^s)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Tomuto typu odpovídají například tyto integrály:

$$\int \frac{x^2 - \sqrt{2x+1}}{x - 3\sqrt{2x+1}}\,\mathrm{d}x, \ \text{kde } a = 2, \ b = 1, \ c = 0, \ d = 0, \ s = 2;$$

$$\int \sqrt[3]{\frac{1+2x}{1+3x}}\,\mathrm{d}x, \ a = 2, \ b = 1, \ c = -3, \ d = 2, \ s = 3;$$

$$\int \frac{5x^2 - 3}{\sqrt[4]{3-5x}}\,\mathrm{d}x, \ a = -5, \ b = 3, \ c = 0, \ d = 1, \ s = 4.$$

Máme vypočítat integrál $\int (x+1)/(3x+1)^{1/3}\,\mathrm{d}x$, $x \neq -1/3$, kde $a = 3, \ b = 1, \ c = 0, \ d = 1, \ s = 3$. Řešíme ho substitucí

$$t = \sqrt[3]{3x+1},$$
$$x = (t^3 - 1)/3,$$
$$\mathrm{d}x = t^2\,\mathrm{d}t.$$

Původní integrál ještě upravíme a dosadíme:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{x}{\sqrt[3]{3x+1}}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{\sqrt[3]{3x+1}}\,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{3}\int (t^4 - t)\,\mathrm{d}t + \frac{2}{3}\int t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\int t^4\,\mathrm{d}t + \frac{2}{3}\int t\,\mathrm{d}t = \\
&= \frac{t^5}{15} + \frac{2t^2}{6} = \frac{1}{15}\sqrt[3]{(3x+1)^5} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{(3x+1)^2} = \\
&= \frac{\sqrt[3]{(3x+1)^2}}{3}\left[\frac{3x+1}{5} + 1\right] = \frac{\sqrt[3]{(3x+1)^2}}{3} \cdot \frac{3(x+2)}{5} = \\
&= \frac{(x+2)\sqrt[3]{(3x+1)^2}}{5} + C.
\end{aligned}
$$

b) Integrály typu

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right),\ a \neq 0,$$

(např. $\int(1-x^2)^{1/2}\,\mathrm{d}x$, $\int x^2/(x^2-1)^{1/2}\,\mathrm{d}x$, $\int(2x-10)/(1+x-x^2)^{1/2}\,\mathrm{d}x$, $\int(x+1+(x^2+3x+6)^{1/2})/(x^2+3x+6)^{1/2}\,\mathrm{d}x$. Narozdíl od uvedených, integrál $\int(1+x+(x^2+3x+6)^{1/2})/(x^2-3x+6)^{1/2}\,\mathrm{d}x$ uvedeného typu není, protože kvadratické trojčleny pod odmocninou nejsou stejné) se racionalizují Eulerovými substitucemi:

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{ax^2+bx+c} \pm x\sqrt{a},\ \text{pro } a>0,\\ xt &= \sqrt{ax^2+bx+c} \pm \sqrt{c},\quad \text{pro } c \geq 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Jsou-li α a β dva různé reálné kořeny kvadratické rovnice $ax^2+bx+c=0$, použijeme substituci

$$t = \sqrt{a\frac{x-\beta}{x-\alpha}}.$$

Substituce (2) používáme tehdy, když nemá kvadratický trojčlen pod odmocninou reálné kořeny, ale je pro všechna x kladný. Výpočty pomocí Eulerových substitucí jsou dost zdlouhavé a proto, pokud to jde, se snažíme najít jednodušší řešení.

Příklad: $\int(x^2+6x+5)^{-1/2}\,\mathrm{d}x,\ x \in [(-\infty,-5);(-1,\infty)]$.

Řešení:

- Eulerovou substitucí

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+6x+5} &= t-x\\ x^2+6x+5 &= t^2-2tx+x^2\\ 6x+5 &= t^2-2tx, \end{aligned}$$

tuto rovnici diferencujeme

$$6\,\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t - 2t\,\mathrm{d}x - 2x\,\mathrm{d}t,$$

a upravíme na

$$\begin{aligned} (t+3)\,\mathrm{d}x &= (t-x)\,\mathrm{d}t\\ \Rightarrow\ \frac{\mathrm{d}x}{t-x} &= \frac{\mathrm{d}t}{(t+3)}. \end{aligned}$$

Po dosazení do původního integrálu dostaneme:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+6x+5}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}t}{t+3} = \ln|t+3| = \\ = \ln\left|\sqrt{x^2+6x+5}+x+3\right| + C.$$

- Doplněním na úplný čtverec

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+6x+5}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{(x+3)^2-4}}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{c} x+3=2t \\ \mathrm{d}x = 2\,\mathrm{d}t \end{array}\right| = \\ = \int \frac{1}{\sqrt{4t^2-4}} 2\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t = \int (\operatorname{argcosh} t)'\,\mathrm{d}t = \\ = \ln|t+\sqrt{t^2-1}| = \ln\left|\frac{x+3}{2} + \sqrt{\left(\frac{x+3}{2}\right)^2 - 1}\right| = \\ = \ln\frac{\left|x+3+\sqrt{x^2+6x+5}\right|}{2} = \ln\left|x+3+\sqrt{x^2+6x+5}\right| + C,$$

kde je $\ln 2$ zahrnut do integrační konstanty.

c) Integrály následujících typů se racionalizují goniometrickými substitucemi. $\int R\big(x,(a^2-x^2)^{1/2}\big)\,\mathrm{d}x$ pomocí substituce $x = a\sin t$ a integrály $\int R\big(x,(a^2+x^2)^{1/2}\big)\,\mathrm{d}x$ substitucí $x = a\operatorname{tg} t$.

Například $\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x,\ |x| \le a$:

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{c} x = a\sin t \\ \mathrm{d}x = a\cos t\,\mathrm{d}t \end{array}\right| = a^2 \int \sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t\,\mathrm{d}t = \\ = a^2 \int \cos^2 t\,\mathrm{d}t = a^2 \int \frac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{4}\sin 2t = \\ = \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{2}\sin\sqrt{1-\sin^2 t} = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{a^2}{2}\frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} = \\ = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{a}\sqrt{a^2-x^2} + C.$$

d) Metoda neurčitých koeficientů je vhodná pro integrály typu

$$\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x,\ \ ax^2+bx+c>0,$$

kde $P(x)$ je mnohočlen stupně $n \geq 1$. Je založena na větě, která tvrdí, že pro mnohočlen $P(x)$ je možné určit mnohočlen $Q(x)$ stupně o jednu nižšího (tedy $n-1$) a číslo k tak, že platí

$$\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x = Q(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + k\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x.$$

Derivací této rovnosti a po odstranění zlomků dostaneme výraz

$$P(x) = \left[Q(x)\sqrt{ax^2+bx+c}\right]' \cdot \sqrt{ax^2+bx+c} + k,$$

z něhož porovnáním koeficientů na obou stranách určíme koeficienty mnohočlenu $Q(x)$ a k. Například $\int (x^2+4x)/(x^2+2x+2)^{1/2}\,\mathrm{d}x,\ x^2+2x+2 > 0,\ x \in (-\infty,\infty)$. V tomto příkladu je $P(x) = x^2+4x$, tedy $Q(x) = ax+b$, kde $a,\ b$ jsou zatím neurčené koeficienty a proto, jak bylo řečeno výše, píšeme

$$\int \frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,\mathrm{d}x = (ax+b)\sqrt{x^2+2x+2} + k\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,\mathrm{d}x.$$

Tuto rovnost dále zderivujeme

$$\frac{x^2+4x}{\sqrt{x^2+2x+2}} = a\sqrt{x^2+2x+2} + \frac{(ax+b)(x+1)}{\sqrt{x^2+2x+2}} + \frac{k}{\sqrt{x^2+2x+2}},$$

odstraníme zlomky a porovnáním koeficientů u stejných mocnin x určíme jednotlivé koeficienty: $a = 1/2,\ b = 5/2,\ k = -7/2$. Po jejich dosazení dostáváme

$$\int \frac{x^2+4x}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}\right)\sqrt{x^2+2x+2} - \frac{7}{2}\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,\mathrm{d}x.$$

Poslední integrál vypočteme doplněním na úplný čtverec a pomocí Eulerovy substituce

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+1}}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{c} x+1=t \\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array}\right| = $$
$$= \int \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\,\mathrm{d}t = \left|\begin{array}{c} \sqrt{t^2+1} = z-t \\ 1 = z^2-2zt \end{array}\right|.$$

Derivací poslední rovnosti v Eulerově substituci zjistíme, že $\mathrm{d}t = ((z-t)/z)\,\mathrm{d}z$. Po dosazení proto dostáváme

$$\int \frac{\mathrm{d}z}{z} = \ln|z| = \ln\left|\sqrt{t^2+1}+t\right| = \ln\left|\sqrt{(x+1)^2+1}+x+1\right| =$$
$$= \ln\left|\sqrt{x^2+2x+2}+x+1\right|.$$

Potom řešení původního integrálu je:

$$\int \frac{x^2+4x}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{x+5}{2}\sqrt{x^2+2x+2} - \frac{7}{2}\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right| + C.$$

e) Integrál typu

$$\int \frac{Mx+N}{(x-a)\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x$$

se racionalizuje substitucí $x-a=1/t$. Například $\int 1/((x+1)(x^2+2x+2)^{1/2})\,\mathrm{d}x,\ x \neq -1$ (v tomto případě je $M=0$, $N=1$); úpravou kvadratického trojčlenu pod odmocninou dostáváme

$$\int \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+2x+2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x+1)\sqrt{(x+1)^2+1}}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \left|\begin{array}{c} x+1 = \dfrac{1}{t} \\ \mathrm{d}x = -\dfrac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t \end{array}\right| = \int \frac{1}{\dfrac{1}{t}\sqrt{\dfrac{1}{t^2}+1}}\left(-\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t\right) = -\int \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\,\mathrm{d}t.$$

Tento integrál vyřešíme opět pomocí Eulerovy substituce

$$
\begin{aligned}
\sqrt{t^2+1} &= z - t, \qquad z = t + \sqrt{t^2+1}, \\
1 &= z^2 - 2zt, \\
\Rightarrow \quad \mathrm{d}t &= (z-t)\frac{\mathrm{d}z}{z}.
\end{aligned}
$$

Proto je konečné řešení integrálu

$$
\begin{aligned}
-\int \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\,\mathrm{d}t &= -\int \frac{\mathrm{d}z}{z} = -\ln|z| = -\ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right| = \\
&= -\ln\left|\frac{1}{x+1} + \sqrt{\frac{1}{(x+1)^2}+1}\right| = -\ln\left|\frac{1+\sqrt{x^2+2x+2}}{x+1}\right| = \\
&= \ln\left|\frac{x+1}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}\right| + C.
\end{aligned}
$$

f) Binomický integrál

$$
\int x^m(a+bx^n)^p\,\mathrm{d}x,
$$

kde m, n, p jsou racionální čísla, můžeme převést na integrál z racionální funkce, jestliže alespoň jedno z čísel p, $(m+1)/n$, $(m+1)/n+p$ je číslem celým.

Je-li p číslo celé kladné, rozvineme $(a+bx^n)^p$ podle binomické věty do řady, jednotlivé členy řady vynásobíme x^m a integrujeme člen po členu. Je-li p číslo celé záporné, najdeme nejmenší společný násobek s jmenovatelů zlomků m a n a zavedeme substituci $x = t^s$.

Je-li $(m+1)/n$ číslo celé, použijeme substituce $a + bx^n = t^s$ (s je jmenovatel zlomku p). Podle toho, jaký je exponent integrované funkce po substituci, tj. kladný nebo záporný, volíme další postup tak, jak je uvedeno v předchozím odstavci.

Je-li $(m+1)/n+p$ celé číslo, použijeme substituce $ax^{-n}+b = t$, když jsme předtím výraz $a + bx^n$ upravili vytknutím x^n, tj. $a + bx^n = x^n(ax^{-n} + b)$.

Například $\int x^{-2/3}(1-x^{1/6})^3\,\mathrm{d}x,\ x>0$, je binomický integrál, kde $p=3$ – tedy celé kladné číslo. Proto provedeme umocnění třemi, vynásobíme výsledek prvním členem a integrujeme člen po členu.

$$\begin{aligned}\int \frac{(1-\sqrt[6]{x})^3}{\sqrt{x^3}}\,\mathrm{d}x &= \int x^{-\frac{2}{3}}\left(1-3x^{\frac{1}{6}}+3x^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}x = \\ &= \int x^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x - 3\int x^{-\frac{4}{3}}\,\mathrm{d}x + 3\int x^{-\frac{7}{6}} - \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \\ &= -\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{9}{\sqrt[3]{x}} - \frac{18}{\sqrt[6]{x}} - \ln|x| + C.\end{aligned}$$

$\int x^{-3}(1+x^2)^{-1/2}\,\mathrm{d}x,\ x\neq 0$ je binomický integrál, kde $a=1,\ b=1,\ m=-3,\ n=2,\ p=-1/2$, který ještě dále upravíme:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^3\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x &= \int x^{-4}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot x\,\mathrm{d}x = \left|\begin{matrix}1+x^2=t^2\\ x\,\mathrm{d}x = t\,\mathrm{d}t\end{matrix}\right| = \\ &= \int \frac{1}{(t^2-1)^2}\,\mathrm{d}t = \underbrace{\int \frac{t^2}{(t^2-1)^2}\,\mathrm{d}t}_{I_1} - \underbrace{\int \frac{1}{t^2-1}\,\mathrm{d}t}_{I_2}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_1 = \int \frac{t}{(t^2-1)^2}t\,\mathrm{d}t = &\left|\begin{matrix}u'=\dfrac{t}{(t^2-1)^2}, & v=t\\ u=-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{t^2-1}, & v'=1\end{matrix}\right| = \\ = &-\frac{1}{2}\frac{t}{t^2-1}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{t^2-1}\,\mathrm{d}t = \\ = &-\frac{1}{2}\frac{t}{t^2-1}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{t-1}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int\frac{t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t = \\ = &-\frac{1}{2}\frac{t}{t^2-1}+\frac{1}{2}\ln|t-1| - \frac{1}{4}\ln|t^2-1| = \\ = &-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}+\frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{1+x^2}-1\right| - \frac{1}{2}\ln|x| = \\ = &-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right|.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= -\int \frac{1}{t^2-1}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{t-1}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int \frac{1}{t+1} = \\
&= -\frac{1}{2}\ln|t-1| + \frac{1}{2}\ln|t+1| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| = \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{\sqrt{1+x^2}-1}\right|.
\end{aligned}$$

Takže konečné řešení zadaného integrálu je:

$$\begin{aligned}
&\int \frac{1}{x^3\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = \\
&\qquad = -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right| + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{\sqrt{1+x^2}-1}\right| = \\
&\qquad = -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} + \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{|x|} + C.
\end{aligned}$$

Poznámka. Binomické integrály $\int x^m(a+bx^n)^p\,\mathrm{d}x$, kde ani jedno z čísel p, $(m+1)/n$, $(m+1)/n+p$ není celé číslo, nelze vyjádřit pomocí elementárních funkcí. Důkaz provedl ruský matematik Čebyšev.

g) Integrály typu

$$\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x,$$

se racionalizují substitucí $t = \operatorname{tg}(x/2)$, $x = 2\operatorname{arctg} t$, přičemž platí, že $\sin x = 2t/(1+t^2)$, $\cos x = (1-t^2)/(1+t^2)$, $\mathrm{d}x = 2/(1+t^2)\,\mathrm{d}t$. V některých případech je vhodnější použít substituce $\sin x = t$, $\cos x = t$, $\operatorname{tg} x = t$.

Obecně platí následující tvrzení:

- Jestliže je funkce $R(\cos x, \sin x)$ lichá vzhledem k funkci $\sin x$, tj. platí-li $R(\cos x, \sin x) = -R(\cos x, -\sin x)$, lze k racionalizaci integrálu $\int R(\cos x, \sin x)\,\mathrm{d}x$ použít substituce $\cos x = t$.
- Jestliže je funkce $R(\cos x, \sin x)$ lichá vzhledem k funkci $\cos x$, tj. platí-li $R(\cos x, \sin x) = -R(-\cos x, \sin x)$, lze k racionalizaci integrálu $\int R(\cos x, \sin x)\,\mathrm{d}x$ použít substituce $\sin x = t$.

- Jestliže je funkce $R(\cos x, \sin x)$ sudá vzhledem k oběma funkcím, tj. platí-li $R(\cos x, \sin x) = R(-\cos x, -\sin x)$, lze požít substituci $\operatorname{tg} x = t$.

Integrály typu

$$\int \sin^n x \cos^m x \, \mathrm{d}x,$$

kde m a n jsou celá čísla, řešíme, je-li n (resp. m) liché číslo substitucí $\cos x = t$ (resp. $\sin x = t$).

Příklad: $\int \operatorname{cotg} x/(\sin x + \cos x - 1)\,\mathrm{d}x$, $x \neq \pi/2 + k\pi$. Použijeme substituce $\operatorname{tg}(x/2) = t$ a vztahů $\sin x = 2t/(1+t^2)$, $\cos x = (1-t^2)/(1+t^2)$, $\operatorname{cotg} x = (1-t^2)/(2t)$.

$$\int \frac{\operatorname{cotg} x}{\sin x + \cos x - 1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\dfrac{1-t^2}{2t}}{\dfrac{2t}{1+t^2} + \dfrac{1-t^2}{1+t^2} - 1} \cdot \frac{2}{1-t^2}\,\mathrm{d}t =$$
$$= \int \frac{1-t^2}{2t^2(1-t)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2t} + \frac{1}{2}\ln|t| =$$
$$= -\frac{1}{2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}} + \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

h) Integrály typu

$$\int R(a^x)\,\mathrm{d}x, \qquad \int R(\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x,$$

řešíme substitucí $t = a^x$, $\mathrm{d}x = 1/(t \cdot \ln a)\,\mathrm{d}t$, respektive $t = \mathrm{e}^x$, $\mathrm{d}x = 1/t\,\mathrm{d}t$.

Integrál $\int R(\ln x)/x\,\mathrm{d}x$ řešíme substitucí $t = \ln x$, $1/x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$. Integrál $\int \mathrm{e}^{ax+b}\,P(x)\,\mathrm{d}x$, kde $P(x)$ je mnohočlen n-tého stupně, se výhodně vypočítá metodou neurčitých koeficientů na základě rovnosti

$$\int \mathrm{e}^{ax+b}\,P(x)\,\mathrm{d}x = Q(x)\,\mathrm{e}^{ax+b} + C,$$

kde $Q(x)$ je mnohočlen n-tého stupně. Po derivaci této rovnosti porovnáme koeficienty na obou stranách. Například $\int (x^3 + x^2 - x + 4)\,\mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x$, $x \in (-\infty, \infty)$:

$$\int (x^3 + x^2 - x + 4)\,\mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x = (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)\,\mathrm{e}^{3x} + \text{const.}$$

Tuto rovnost zderivujeme

$$(x^3 + x^2 - x + 4)\,\mathrm{e}^{3x} = (3Ax^2 + 2Bx + C)\,\mathrm{e}^{3x} + (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) \cdot 3e^{3x},$$

a porovnáním koeficientů u stejných mocnin x učíme hledané koeficienty: $A = 1/3$, $B = 0$, $C = -1/3$, $D = 13/9$. Dosazením těchto koeficientů do mnohočlenu $Q(x)$ pak dostáváme konečné řešení zadaného integrálu

$$\int (x^3 + x^2 - x + 4)\,\mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x = (3x^3 - 3x + 13)\frac{\mathrm{e}^{3x}}{9} + C.$$

Řešené příklady

$$\int \frac{1+x^2}{\sqrt{1-2x-4x^2}}\,\mathrm{d}x = (Ax+B)\sqrt{1-2x-4x^2} + k\int \frac{1}{\sqrt{1-2x-4x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

Provedeme derivaci, čímž dostáváme

$$\frac{1+x^2}{\sqrt{1-2x-4x^2}} = A\sqrt{1-2x-4x^2} - \frac{(Ax+B)(4x+1)}{\sqrt{1-2x-4x^2}} + \frac{k}{\sqrt{1-2x-4x^2}}.$$

Porovnáním členů u stejných mocnin x určíme jednotlivé koeficienty: $A = -1/8$, $B = 3/32$ a $k = 39/32$. Dosazením dostáváme

$$\int \frac{1+x^2}{\sqrt{1-2x-4x^2}}\,\mathrm{d}x = \left(-\frac{1}{8}x+\frac{3}{32}\right)\sqrt{1-2x-4x^2} + \\ + \frac{39}{32}\int \frac{1}{\sqrt{1-2x-4x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

Poslední integrál již vyřešíme doplněním na úplný čtverec jednoduchou substitucí:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-2x-4x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(2x+\frac{1}{2}\right)^2}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} 2x+\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}t \\ \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{5}}{4}\,\mathrm{d}t \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{2}\arcsin t = \frac{1}{2}\arcsin\frac{4x+1}{\sqrt{5}}.$$

Dosazením pak dostáváme konečné řešení integrálu:

$$\int \frac{1+x^2}{\sqrt{1-2x-4x^2}}\,\mathrm{d}x = \left(-\frac{1}{8}x+\frac{3}{32}\right)\sqrt{1-2x-4x^2} + \frac{39}{64}\arcsin\frac{4x+1}{\sqrt{5}}.$$

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} x = \operatorname{tg} t \\ \mathrm{d}x = \dfrac{1}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{1}{(1+\operatorname{tg}^2 t)^2} \cdot \frac{1}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int \cos^2 t \,\mathrm{d}t = \int \frac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int \cos 2t \,\mathrm{d}\left(\frac{2t}{2}\right) =$$

$$= \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin 2t = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\sin t \cos t =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Konečné řešení integrálu má tedy tvar

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2} + C.$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{2ax-x^2}} = \left| \begin{array}{c} x = \dfrac{1}{t} \\ dx = -\dfrac{\mathrm{d}t}{t^2} \end{array} \right| = \int \frac{-\dfrac{\mathrm{d}t}{t^2}}{\dfrac{1}{t}\sqrt{\dfrac{2a}{t} - \dfrac{1}{t^2}}} = -\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{2at-1}} =$$

$$= \left| \begin{array}{c} 2at - 1 = z^2 \\ \mathrm{d}t = \dfrac{z}{a}\,\mathrm{d}z \end{array} \right| = -\frac{1}{a}\int \mathrm{d}z = -\frac{1}{a}z + C = -\frac{1}{a}\sqrt{2at-1} + C =$$

$$= -\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2a}{x} - 1} + C = -\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2a-x}{x}} + C.$$

$$\int \frac{3x^2+1}{x^4-3x^2+2x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{3x^2+1}{x(x^3-3x+2)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{3x^2+1}{x(x-1)^2(x+2)}\,\mathrm{d}x$$

Poslední výraz kvůli integraci rozložíme na parciální zlomky podle následujícího schematu:

$$\frac{3x^2+1}{x(x-1)^2(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{x+2}$$

Vynásobením a porovnáním koeficientů u jednotlivých mocnin proměnné x dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} A+B+D &= 0 \\ B+C-2D &= 3 \\ -3A-2B+2C+D &= 0 \\ 2A &= 1 \end{aligned}$$

Jejím řešením dostaneme pro jednotlivé koeficienty hodnoty $A = 1/2$, $B = 2/9$, $C = 4/3$ a $D = -13/18$. Z toho plyne tvar pro výsledný integrál:

$$\int \frac{3x^2+1}{x^4-3x^2+2x}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x} + \frac{2}{9}\int \frac{\mathrm{d}x}{x-1} + \frac{4}{3}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2} - \frac{13}{18}\int \frac{\mathrm{d}x}{x+2} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x| + \frac{2}{9}\ln|x-1| - \frac{13}{18}\ln|x+2| - \frac{4}{3(x-1)} + C$$

$$\int \frac{x^2-3x+2}{x^3+2x^2+x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^2-3x+2}{x(x^2+2x+1)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^2-3x+2}{x(x+1)^2}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int \left[\frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}\right]\mathrm{d}x$$

Vynásobením a porovnáním koeficientů u jednotlivých mocnin x dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} A+B&=1\\ 2A+B+C&=-3\\ A&=2 \end{aligned}$$

Jejím řešením jsou koeficienty $A=2$, $B=-1$ a $C=-6$, proto je řešení zadaného integrálu již přímočaré:

$$\int \frac{x^2-3x+2}{x^3+2x^2+x}\,\mathrm{d}x = 2\int \frac{\mathrm{d}x}{x} - \int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} - 6\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2} =$$

$$= 2\ln|x| - \ln|x+1| + \frac{6}{x+1} + C = \frac{6}{x+1} + \ln\frac{x^2}{|x+1|} + C$$

$$\int \frac{x^3-6x^2+11x-5}{x^4-8x^3+24x^2-32x+16}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^3-6x^2+11x-5}{(x-2)^4}\,\mathrm{d}x$$

Poslední výraz rozložíme podle následujcícího schematu na parciální zlomky:

$$\frac{x^3-6x^2+11x-5}{(x-2)^4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{(x-2)^3} + \frac{D}{(x-2)^4}$$

Porovnáním koeficinetů dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} A&=1\\ -6A+B&=-6\\ 12A-4B+C&=11\\ -8A+4B-2C+D&=-5 \end{aligned}$$

Jejím řešením jsou potom koeficienty $A=1$, $B=0$, $C=-1$ a $D=1$. Integrál je již snadné vyřešit:

$$\int \frac{x^3-6x^2+11x-5}{(x-2)^4}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{x-2} - \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-2)^3} + \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-2)^4} =$$

$$= \ln|x-2| + \frac{1}{2(x-2)^2} - \frac{1}{3(x-2)^3} + C = \ln|x-2| + \frac{3x-8}{6(x-2)^3} + C.$$

$$\int \frac{1+\sin x}{1-\sin x}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \;\Rightarrow\; \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \end{array} \right| = 2\int \frac{t^2+2t+1}{t^2-2t+1}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} =$$

$$= 2\int \frac{t^2+2t+1}{(t-1)^2(1+t^2)}\,\mathrm{d}t = 2\int \left[\frac{2}{(t-1)^2} - \frac{1}{1+t^2}\right]\mathrm{d}t =$$

$$= -\frac{4}{t-1} - 2\operatorname{arctg} t = \frac{4}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}} - x + C.$$

$$\int \frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ccc} t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} & \Rightarrow & \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2}; & & \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{4t(1-t^2)}{(1+2t-t^2)(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$$

Nyní provedeme rozložení výrazu na parciální zlomky, podle schematu

$$\frac{4t(1-t^2)}{(1+2t-t^2)(1+t^2)^2} = \frac{At+B}{1+2t-t^2} + \frac{Ct+D}{1+t^2} + \frac{Et+F}{(1+t^2)^2}.$$

Porovnáním koeficientů u jednotlivých mocnin x dostaneme následující soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} A - C &= 0 \\ B + 2C - D &= 0 \\ 2A + 2D - E &= -4 \\ 2B + 2C + 2E - F &= 0 \\ A + C + 2D + E + 2F &= 4 \\ B + D + F &= 0 \end{aligned}$$

Jejím řešením jsou koeficienty $A = 0$, $B = -1$, $C = 0$, $D = -1$, $E = 2$ a $F = 2$. Tím se integrál redukuje na následující tvar:

$$\int \frac{4t(1-t^2)}{(1+2t-t^2)(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = \int \left[-\frac{1}{1+2t-t^2} - \frac{1}{1+t^2} + \frac{2t+2}{(1+t^2)^2} \right] \mathrm{d}t =$$

$$= \underbrace{\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2-2t-1}}_{I_1} - \operatorname{arctg} t + \underbrace{\int \frac{2t\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}}_{I_2} + 2\underbrace{\int \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}}_{I_3}$$

$$I_1 = \int \frac{\mathrm{d}t}{(t-1)^2-2} = \left| \begin{array}{c} t-1 = \sqrt{2}u \\ \mathrm{d}t = \sqrt{2}\,\mathrm{d}u \end{array} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{\mathrm{d}u}{u^2-1} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1} \right) \mathrm{d}u = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{u-1}{u+1} \right| =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{t-1-\sqrt{2}}{t-1+\sqrt{2}} \right|$$

$$I_2 = \int \frac{2t\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} = \left| \begin{array}{c} 1+t^2 = u \\ 2t\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}u \end{array} \right| = \int \frac{\mathrm{d}u}{u^2} = -\frac{1}{u} = -\frac{1}{1+t^2}$$

$$I_3 = \int \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} = \left| \begin{array}{c} t = \operatorname{tg} u \\ \mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}u}{\cos^2 u} \end{array} \right| = \int \frac{1}{(1+\operatorname{tg}^2 u)^2} \cdot \frac{1}{\cos^2 u}\,\mathrm{d}u =$$

$$= \int \cos^2 u\,\mathrm{d}u = \int \frac{1+\cos 2u}{2}\,\mathrm{d}u = \frac{u}{2} + \frac{\sin 2u}{4} =$$

$$= \frac{u}{2} + \frac{\sin u \cos u}{2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + \frac{1}{2}\frac{t}{1+t^2}$$

Využitím předchozích výsledků dostaneme řešení pro zadaný integrál:

$$\int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x = \frac{t-1}{1+t^2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{t-1-\sqrt{2}}{t-1+\sqrt{2}}\right| =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1 - \sqrt{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1 + \sqrt{2}}\right| =$$

$$= \frac{\sin x - \cos x - 1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1 - \sqrt{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1 + \sqrt{2}}\right| + C.$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{3\sin x - 4\cos x} = \left| \begin{array}{c} t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} \;\Rightarrow\; \mathrm{d}x = \dfrac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2} \\ \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}t}{2t^2+3t-2} = \int \frac{\mathrm{d}t}{2\left(t+\dfrac{3}{4}\right)^2 - \dfrac{25}{8}} = \left| \begin{array}{c} t + \dfrac{3}{4} = \dfrac{5}{4}u \\ \mathrm{d}t = \dfrac{5}{4}\,\mathrm{d}u \end{array} \right| =$$

$$= \frac{2}{5}\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2-1} = \frac{1}{5}\int \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right)\mathrm{d}u = \frac{1}{5}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| =$$

$$= \frac{1}{5}\ln\left|\frac{2t-1}{2t+4}\right| = \frac{1}{5}\ln\left|\frac{2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}-1}{2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+4}\right| = \frac{1}{5}\ln\left|\frac{2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}-1}{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+2}\right| + C.$$

Vypočítejte integrál

$$\varphi = \int \frac{\frac{L}{r^2}\,\mathrm{d}r}{\sqrt{2m[E-U(r)] - \frac{L^2}{r^2}}}\ ,$$

kde $U = -\alpha/r$. (Jedná se o rozptyl na potenciálu.)

Řešení tohoto integrálu je poměrně snadné, důležité je jen jeho tvar správně upravit, aby integrace pomocí substituční metody vedla nejkratší cestou k cíli. To znamená, že jmenovatele upravíme na čtverec:

$$\begin{aligned}
2mE + 2m\frac{\alpha}{r} - \frac{L^2}{r^2} &= -\left(\frac{L}{r} - \frac{m\alpha}{L}\right)^2 + \frac{m^2\alpha^2}{L^2} + 2mE = \\
&= \left(\frac{m^2\alpha^2}{L^2} + 2mE\right) \cdot \left\{1 - \frac{\left(\frac{L}{r} - \frac{m\alpha}{L}\right)^2}{\frac{m^2\alpha^2}{L^2} + 2mE}\right\}
\end{aligned}$$

$$\int \frac{\frac{L}{r^2}\,\mathrm{d}r}{\sqrt{2m\left(E + \frac{\alpha}{r}\right) - \frac{L^2}{r^2}}} = \int \frac{\frac{L}{r^2}\,\mathrm{d}r}{\sqrt{\frac{m^2\alpha^2}{L^2} + 2mE}\sqrt{1 - \frac{\left(\frac{L}{r} - \frac{m\alpha}{L}\right)^2}{\frac{m^2\alpha^2}{L^2} + 2mE}}}$$

Odtud už je integrace přímá, po substituci

$$x = \frac{\frac{L}{r} - \frac{m\alpha}{L}}{\sqrt{\frac{m^2\alpha^2}{L^2} + 2mE}} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{d}x = -\frac{\frac{L}{r^2}\,\mathrm{d}r}{\sqrt{\frac{m^2\alpha^2}{L^2} + 2mE}}\ ,$$

již dostáváme základní, snadno řešitelný integrál

$$-\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arccos x \quad \Rightarrow$$

$$\varphi = \arccos \frac{\dfrac{L}{r} - \dfrac{m\alpha}{L}}{\sqrt{\dfrac{m^2\alpha^2}{L^2} + 2mE}} + \text{konst.}$$