B $\delta-$funkce

Diracovu *δ-funkci* $\delta(x)$ *definujeme* vztahem

$$\int_{-a}^{b} \delta(x)\,\mathrm{d}x = 1 \qquad \text{pro libovolná } a, b > 0\,. \tag{B.1}$$

Odtud je vidět, že $\delta(x) = 0$ pro $x \neq 0$ a v $x = 0$ není definovaná. Nejde tedy o funkci v běžném slova smyslu, ale spíše o symbol, který má jasný význam jen v integrandu. Zřejmě platí

$$\int f(x)\delta(x - x_0)\mathrm{d}x = f(x_0)\,, \tag{B.2}$$

jestliže integrační obor obsahuje bod x_0 a $f(x)$ je libovolná funkce spojitá v $x = x_0$.

Dále platí vztahy (mají opět smysl až za $\int$)

$$\begin{aligned} x\delta(x) &= 0\,, \\ \delta(x - x_0) &= \delta(x_0 - x)\,, \\ \delta(ax) &= \frac{1}{a}\delta(x) \quad (a > 0)\,, \\ \delta(x^2 - a^2) &= \frac{1}{2a}[\delta(x - a) + \delta(x + a)] \quad (a > 0)\,. \end{aligned} \tag{B.3}$$

δ-funkci lze vyjádřit *jako limitu posloupnosti funkcí*, např. podle (C.3). Možné jsou též *integrální reprezentace*, např.

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k \tag{B.4}$$

nebo

$$\delta(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}.\boldsymbol{r}}\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\,. \tag{B.5}$$