Parciální diferenciální rovnice 1. řádu

Mějme rovnici

$$a_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)u_{x_1} + a_2(x_i)u_{x_2} + \ldots = 0.$$

Když teda máme rovnici, hodilo by se ji vyřešit. Tož to jdeme na to.

Obecně je více metod, ja takovou rovnici vyřešit. Nejjednodušší případy jsou takové, kde funkce a_i jsou konstantní, případně speciálních tvarů. To se učilo v předmětu Matematická analýza 2. Těmi se tu zabývat nebudeme. Podíváme se na jinou metodu, a to na *metodu charakteristik*.

Metoda charakteristik

Nejprve budeme uvažovat případ dvou proměnných. Pak máme diferenciální rovnici, jejímž vyřešením získáme nějaký předpis, který bodům roviny xy přiřadí výšku. Snad to jako přiblížení stačí. Když si to trochu promyslíme, získali jsme nějaký předpis, který nám určuje nějakou 2-rozměrnou varietu v 3-rozměrném prostoru. Takže plochu v prostoru.

To je zatím pěkné, ale k čemu to je? My totiž můžeme najít předpis, který nám určuje tvar té plochy pro danou výšku. Jinak řečeno, můžeme najít rovnici pro vrstevnici. Tedy nějakou rovnici pro x, y tak, aby výška byla konstantní. Celkovým výsledkem pak bude funkce, která bude závislá právě na té funkci vrstevnice, a ne už na dvou proměnných, což je i celkem logické.

Tak a zbývá otázka, jak něco takového vůbec řešit. Můžeme předpokládat, že obě proměnné x, y budou záviste na nějakém parametru t. Nyní chceme najít vrstevnici, tedy nějaké řešení, kde $u(x(t), y(t)) = const$. Pak získáme rovnici

$$\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Porovnáním s rovnicí na začátku získáme zajímavé rovnice.

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t} &= a(x, y) \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= b(x, y) \end{aligned}$$

No a ty řešíme. Získáme tak, že x a y jsou nějak závislé na t. Tento parametr ještě musíme vyloučit, což je už pod mou úroveň to tady vysvětlovat :-)

Výsledkem bude jedna rovnice o dvou neznámých x, y s nějakou konstantou. A to jsme přece chtěli, ne? Tu konstantu si vyjádříme pomocí x a y. A to je vše! Tato konstanta, to je hodnota, pro kterou je funkce u konstantní. Výsledkem pak bude funkce, která bude závislá jen na hodnotě té konstanty.

No asi nejlepší to bude ukázat na nějakém příkladě.

1. $u_t + au_x = 0$

   Získáme rovnice

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} &= 1 && (1) \\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} &= a. && (2) \\ & && (3) \end{aligned}$$

Z rovnice (1) máme

$$t = s + K_1.$$

Z rovnice (2)

$$x = as + K_2.$$

Musíme vyloučit parametr s :

$$s = t - K_1 \Rightarrow x = a(t - K_1) + K_2 \Rightarrow x - at = K_3.$$

Funkce u pak tedy nebude funkcí proměnných x a t, ale jen jedné proměnné $x - at$. Jak tato funkce bude vypadat, se dá zjistit z počátečních a okrajových podmínek, jak uvidíme v jednom z dalších příkladů.

2. Nyní přejdeme k více proměnným. Řešme rovnici $(z+y-x)v_x+(z+x-y)v_y+zv_z = 0$.

   Opět získáme rovnice

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= z + y - x \quad (1) \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= z + x - y \quad (2) \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} &= z \quad (3) \end{aligned}$$

   Z poslední rovnice máme $z = K_1 e^t$.

   Rovnice (1) a (2) sečteme:

$$\frac{\mathrm{d}(x+y)}{\mathrm{d}t} = 2z = 2K_1 e^t \Rightarrow x + y = 2K_1 e^t + K_2 \Rightarrow x + y - 2z = K_2.$$

   Už se nám alespoň z jedné rovnice povedlo vyloučit parametr t.

   Ty stejné rovnice od sebe odečteme:

$$\frac{\mathrm{d}(x-y)}{\mathrm{t}} = 2(y - x) = -2(x - y) \Rightarrow (x - y) = K_3 e^{-2t}$$

   Můžeme dosadit výsledek rovnice (3):

$$(x - y) = K_4 z^{-2} \Rightarrow (x - y)z^2 = K_4.$$

   Tak a máme druhou rovnici charakteristiky. Máme tři proměnné, takže jsou potřeba dvě rovnice charakteristiky. Mámě obě. Výsledkem je tedy nějaká funkce dvou proměnných

$$v(x, y, z) = \Phi(x + y - 2z, (x - y)z^2).$$

3. Zkusíme se podívat na nějaké počáteční podmínky. Vezměme si první příklad a dodejme mu počáteční podmínku $u(x, 0) = \sin x$.

   Vyšlo nám, že $u(x, t) = \Phi(x - at)$. Pak pro $t = 0$ máme $\Phi(x) = \sin x \Rightarrow \Phi(x - at) = \sin(x - at) = u(x, t)$. Super, máme kompletně vyřešeno!

4. A podíváme se na trochu obecnější případ. Mějme rovnici

$$2xu_x + yu_y = 4u + 1$$

s počáteční podmínkou $u(x,1) = x^2$.

Máme problém, na pravé straně je nějaká funkce u! Ale i tak se to dá vyřešit.

Opět si sestavíme soustavu rovnic, ales jednou drobnou změnou.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2x \tag{1}$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = y \tag{2}$$
$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 4u + 1 \tag{3}$$

Přidali jsme jednu rovnici. Jako obvykle vyřešíme, vyloučíme parametry. Napíšu jen výsledky.

$$xy^{-2} = K_1$$
$$\frac{4u+1}{x^2} = K_2$$

Teď ještě potřebujeme tyto dvě rovnice nějak sloučit. Využijeme k tomu počátečních podmínek. Jejich aplikací získáme

$$4 + x^{-2} = K_2 \wedge x = K_1 \Rightarrow \frac{K_1^2 K_2 - 1}{K_1^2} = 4.$$

Paráda, získali jsme nějaký vztah mezi konstantami. Získali jsme jen jednu požadovanou rovnici!!! No a protože K_1 i K_2 známe, můžeme dosadit.

$$\frac{4u+1}{x^2} \cdot x^2y^{-4} - 1 = 4x^2y^{-4} \Rightarrow \ldots \Rightarrow u = x^2 + \frac{1}{4}(y^4 - 1)$$

Tak a máme to za sebou.

Existuje ještě jeden způsob řešení, jakýsi superobecný, ale doufám, že se to na písmece neobjeví. Ještě k tomu nemám dost dobře propočítaný příklady, proto tady nechcu nějak balamutit.