Kapitola 1

Úvod

1.1 Základní vlastnosti plazmatu

1.1.1 Definice plazmatu

plazma - makroskopicky neutrální, mnoho interagujících nabitých částic vykazujících kolektivní chování (Coulombovské sily). Ne vždy plazma pokud látka obsahuje nabité částice $\Rightarrow$ kritéria existence plazmatu!

Angl. *plasma* - z řečtiny, *něco roztaveného*. Tonks a Langmuir (1929) = vnitřní oblasti zářícího ionizovaného plynu v el. výbojové trubici.

V češtině pojem zavedl J. E. Purkyně. Rozlišujeme *ta plazma* a *to plazma*.

1.1.2 Plazma jako čtvrté skupenství hmoty

čtyř skupenství: pevné, kapalné, plynné a plazma.

pevného $\times$ kapalné $\times$ plynné skupenství = rozdíl v síle vazeb, skupenství dáno vnitřní kinetickou energií (tepelnou energií) částic látky, tj. její teplotou. Zahříváním pevné nebo kapalné látky $\Rightarrow$ fázový přechod při konstantní teplotě

Dodání energii molekulárnímu plynu $\Rightarrow$ disociace, pak ionizace. Nejde o termodynamický fázový přechod, děje se postupně

1.1.3 Vytváření plazmatu

- dostatečné zvýšení teploty plynu, v termodynamické rovnováze je elektronová teplota a stupeň ionizace přímo svázány (Sahova rovnice).
- ionizační procesy zvyšující mnohonásobně stupeň ionizace: fotoionizace a elektrický výboj v plynech. Pokud vypneme ionizující zdroj, ionizace klesá díky rekombinaci $\Rightarrow$ rovnovážná hodnota příslušná teplotě.

1.1.4 Interakce částic a kolektivní jevy

Charakteristický rys plazmatu - kolektivní jevy. Dynamika částic je dána vnitřními poli (výsledek existence a pohybu částic) a externě aplikovanými poli. Základní typy interakcí = elmag charakter.

Rozlišujeme

- interakci dvou nabitých částic
- interakci mezi nabitou částic a neutrálem

Plazma dělíme dle vzájemných interakcí na slabě a silně ionizované.

1.2 Kritéria pro definici plazmatu

1.2.1 Kvazineutralita

Pokud nejsou přítomy nějaké vnější poruchy je plazma makroskopicky neutrální, tzv. kvazineutrální. V opačném případě vznik velkých Coulombovských sil obnovujících kvazineutralitu. Musely by být vyvažovány enormně velkou kinetickou (tepelnou) energií částic.

Příklad: Plazma o hustotě 10^{20} m^{-3}, hustota elektronů (n_e) v kouli o poloměru

10^{-3} m se liší o 1 % od hustoty iontů (n_i). Jaká by musela být teplota plazmatu, aby se tato el. potenciální energii udržela?

Odchylky od kvazineutrality jen na vzdálenostech, na kterých je možné elstat. potenciální energii vyvážit tepelnou energií částic ≈ charakteristická délková míra v plazmatu, tzv. Debyeovská délka.

1.2.2 Debyeovské stínění

Debyeovská délka je důležitý fyzikální parametr popisující plazma: míra vzdálenosti, na kterou nabitá částice "pocítí" vliv jiné nabité částice nebo plochy s nenulovým potenciálem. Odstínění je důsledkem kolektivního chování částic.

$$\lambda_D = \left(\frac{\varepsilon_0 kT}{n_e e^2}\right)^{1/2}. \tag{1.1}$$

Pokud je v plazmatu nějaká stěna, jím vytvořená perturbace se může šířit do vzdálenosti řádově λ_D od tohoto povrchu. Oblast v blízkosti stěny, která se nedá považovat za kvazineutrální se nazývá stěnová vrstva (angl. sheath).

λ_D je velmi malé

- výboje v plynech $T = 10^4$ K a $n_e = 10^{16}$ m^{-3} $\Rightarrow \lambda_D = 10^{-4}$ m
- ionosféra $T = 10^3$ K a $n_e = 10^{12}$ m^{-3} $\Rightarrow \lambda_D = 10^{-3}$ m
- mezihvězdné plazma $\Rightarrow$ Debyeovská délka až několik metrů

Definujeme Debyeovu kouli: koule uvnitř plazmatu o poloměru λ_D. Elstat. pole mimo tuto kouli je odstíněno $\Rightarrow$ každý náboj v plazmatu interaguje kolektivně pouze s nabitými částicemi v Debyeově kouli.

Počet elektronů v Debyeově kouli je roven

$$N_D = \frac{4}{3}\pi\lambda_D^3 n_e = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{\varepsilon_0 kT}{n_e^{1/3}e^2}\right)^{3/2}. \tag{1.2}$$

Debyeovské stínění je charakteristické pro všechny typy plazmatu $\Rightarrow$ *první tři kritériím pro definici plazmatu*:

1. V médium musí být dostatek prostoru pro kolektivní stínící efekt

$$L \gg \lambda_D, \tag{1.3}$$

   kde L jsou fyzikální rozměry plazmatu.

2. počet částic uvnitř Debyeovy koule dostatečně velký

$$n_e \lambda_D^3 \gg 1. \tag{1.4}$$

Definujeme plazmový parametr

$$g = \frac{1}{n_e \lambda_D^3} \tag{1.5}$$

a podmínka $g \ll 1$ je tzv. *plazmová aproximace.*

3. Ačkoliv vztah (1.3) již vyjadřuje podmínku kvazineutrality často se tato podmínka zdůrazňuje nezávisle:

$$n_e = \sum_i n_i. \tag{1.6}$$

1.2.3 Plazmová frekvence

Důležitou vlastností plazmatu je stabilita jeho kvazineutrality. Pokud je plazma vychylováno z rovnovážných podmínek, kolektivních pohybů částic kvůli obnovení nábojové neutrality $\Rightarrow$. charakterizováno přirozenou frekvencí, tzv. *plazmová frekvence.* Perioda oscilací = přirozené časové měřitko pro srovnání s disipativními mechanizmy potlačujícími kolektivní pohyby elektronů.

Elektronová plazmová frekvence

$$\omega_{pe} = \left(\frac{n_e e^2}{m_e \varepsilon_0}\right)^{1/2}. \tag{1.7}$$

Čtvrtá podmínka pro existenci plazmatu:
Srážky mezi elektrony a neutrály tlumí oscilace, ty nesmí být potlačovány příliš

$$\nu_{pe} > \nu_{en}, \tag{1.8}$$

kde ν_{en} je srážková frekvence elektronů s neutrály, $\nu_{pe} = \omega_{pe}/2\pi$. Alternativně

$$\omega_{pe}\tau > 1, \tag{1.9}$$

kde $\tau = 1/\nu_{en}$ vyjadřuje průměrnou dobu, kterou elektron putuje mezi dvěma srážkami s neutrály. Čtvrtá podmínka pro existenci plazmatu také vyjadřuje, že průměrná doba mezi srážkami elektron-neutrál musí být velká ve srovnání s charakteristickou dobou, během níž se mění fyzikální parametry plazmatu.

Kapitola 2

Základy kinetická teorie plazmatu

2.1 Úvod

Plazma je systém obsahující velké množství interagujících částic, takže je vhodné využít pro jeho analýzu statistický přístup.

2.2 Fázový prostor

V každém časovém okamžiku je částice plazmatu lokalizována pomocí polohového vektoru $\mathbf{r}$

$$\mathbf{r} = x\vec{x} + y\vec{y} + z\vec{z}, \tag{2.1}$$

kde $\vec{x}$, $\vec{y}$ a $\vec{z}$ označuje jednotkové vektory ve směru os x, y a z. Rychlost těžiště částice je dána vektorem

$$\mathbf{v} = v_{\mathrm{x}}\vec{x} + v_{\mathrm{y}}\vec{y} + v_{\mathrm{z}}\vec{z}, \tag{2.2}$$

kde $v_{\mathrm{x}} = dx/dt$, $v_{\mathrm{y}} = dy/dt$ a $v_{\mathrm{z}} = dz/dt$.

Analogicky ke konfigurační prostoru definovaném souřadnicemi poloh (x,y,z) zavedeme rychlostní prostor $(v_{\mathrm{x}}, v_{\mathrm{y}}, v_{\mathrm{z}})$.

2.2.1 Jednočásticový fázový prostor

Klasická mechanika - dynamický stav každé částice určen polohovým vektorem a vektorem rychlosti $\Rightarrow$ zvádíme fázový prostor $(x, y, z, v_{\mathrm{x}}, v_{\mathrm{y}}, v_{\mathrm{z}})$ (μ-prostor).

Dynamický stav každé částice reprezentován jedním bodem. Když se částice pohybuje, její reprezentativní bod opisuje trajektorii ve fázovém prostoru. Systém N částic je v každém okamžiku popsán N body fázového μ-prostoru.

2.2.2 Vícečásticový fázový prostor

Γ-prostor: systém N částic bez vnitřních stupňů volnosti reprezentován jedním bodem v $6N$-dim prostoru, $3N$ souřadnice poloh $(\mathbf{r_1}, \mathbf{r_2}, ..., \mathbf{r}_{\mathrm{N}})$ a $3N$ souřadnice rychlostí $(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, ..., \mathbf{v}_\mathrm{N})$. Jeden bod v Γ-prostoru koresponduje s mikroskopickým stavem celého systému částic.

2.3 Objemové elementy

Malý objemový element v konfiguračním prostoru je dán jako $d^3r = dx\,dy\,dz$. Zde konečně velký objemový element obsahující dostatečné množství částic. Na druhou stranu dostatečně malý ve srovnání s charakteristickými rozměry prostorových změn fyzikálních veličin. Pokud v plynu obsahujícím 10^{18} molekul/m^3 vezmeme v úvahu např. $d^3r = 10^{-12}$ m^3 (bod), nachází se v objemu d^3r stále ještě 10^6 molekul.

Ve fázovém prostoru (μ-prostoru) je diferenciální objemový element zobrazen jako šestidimenzionální kostka:

$$d^3r\,d^3v = dx\,dy\,dz\,dv_\mathrm{x}\,dv_\mathrm{y}\,dv_\mathrm{z}, \tag{2.3}$$

Počet bodů uvnitř objemového elementu $d^3r\,d^3v$ je obecně funkcí času a polohy objemového elementu ve fázovém prostoru. Souřadnice $\mathbf{r}$ a $\mathbf{v}$ fázového prostoru jsou navzájem nezávislé, protože představují polohu individuálních objemových elementů ve fázovém prostoru.

2.4 Rozdělovací funkce

$d^6N_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ počet částic typu α uvnitř objemového elementu $d^3r\, d^3v$ kolem souřadnic fázového prostoru ($\mathbf{r}$,$\mathbf{v}$) v čase t. Rozdělovací funkce ve fázovém prostoru je hustota bodů reprezentujících částice α

$$f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \frac{d^6N_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)}{d^3r\, d^3v} \tag{2.4}$$

$f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ je kontinuální, kladná a konečná funkce svých argumentů. Klesá k nule, když se rychlost blíží k nejonečnu.

Rozdělovací funkce je obecně funkcí polohového vektoru $\mathbf{r} \Rightarrow$ nehomogenní plazma.

V rychlostním prostoru může být rozdělovací funkce anizotropní, pokud závisí na orientaci vektoru rychlosti $\mathbf{v}$, nebo izotropní pokud nezávisí na orientaci $\mathbf{v}$, ale pouze na jeho velikosti, tj. na rychlosti částice $v =\mid \mathbf{v} \mid$.

Plazma v termodynamické rovnováze je popsáno homogenní, izotropní a časově nezávislou rozdělovací funkcí.

Jeden ze základních problémů kinetické teorie je určení rozdělovací funkce daného systému.

2.5 Hustota a průměrná rychlost

Hustota $n_\alpha(\mathbf{r},t)$

$$n_\alpha(\mathbf{r},t) = \frac{1}{d^3r}\int_v d^6N_\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v},t) \tag{2.5}$$

nebo za použití definice (2.4)

$$n_\alpha(\mathbf{r},t) = \int_v f_\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v},t) \tag{2.6}$$

Průměrná (driftová) rychlost $\mathbf{u}_\alpha(\mathbf{r},t)$ je definovaná jako makroskopická rychlost toku částic α v okolí bodu s polohým vektorem $\mathbf{r}$ v čase t

$$\mathbf{u}_\alpha(\mathbf{r},t) = \frac{1}{n_\alpha(\mathbf{r},t)d^3r}\int_v \mathbf{v}d^6N_\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v},t). \tag{2.7}$$

Použijeme-li definici rozdělovací funkce (2.4) dostáváme

$$\mathbf{u}_\alpha(\mathbf{r},t) = \frac{1}{n_\alpha(\mathbf{r},t)}\int_v \mathbf{v}f_\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v},t)d^3v. \tag{2.8}$$

Tento vztah reprezentuje obvyklý statistický postup pro vyjadřování průměrných hodnot veličin.

$n_\alpha(\mathbf{r},t)$ a $\mathbf{u}_\alpha(\mathbf{r},t)$ jsou makroskopické proměnné, které závisí pouze na souřadnicích ($\mathbf{r}$ a t.

2.6 Boltzmannova kinetická rovnice

Závislost rozdělovací funkce na nezávislých proměnných ($\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$) a t se řídí tzv. Boltzmannovou kinetickou rovnicí (BKR). Zde odvodíme bezsrážkovou BKR i obecnou podobu BKR zahrnující vliv interakcí mezi částicemi, aniž bychom explicitně odvodili konkrétní výraz pro srážkový člen.

2.6.1 Bezsrážková BKR

Připomeneme si, že

$$d^6 N_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3 r \, d^3 v \tag{2.9}$$

Předpokládejme, že na každou částici působí vnější síla $\mathbf{F}$. Bez interakcí bude částice za čas dt v bodě:

$$\mathbf{r}'(t + dt) \; = \; \mathbf{r}(t) + \mathbf{v} dt \tag{2.10}$$

$$\mathbf{v}'(t + dt) \; = \; \mathbf{v}(t) + \mathbf{a} dt, \tag{2.11}$$

kde $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m_\alpha$ je zrychlení částice a m_α její hmotnost. $\Rightarrow$ částice α nacházející se v čase t v okolí ($\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$) uvnitř $d^3 r \, d^3 v$ budou za čas dt zaujímat objem $d^3 r' \, d^3 v'$ v okolí bodu ($\mathbf{r}'$, $\mathbf{v}'$). Jde o stále stejné částice a neuvažujeme žádné srážky:

$$f_\alpha(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t + dt) d^3 r' \, d^3 v' = f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3 r \, d^3 v. \tag{2.12}$$

Objemový element $d^3r\, d^3v$ může mít zdeformovaný tvar v důsledku pohybu částic:

$$d^3r'\, d^3v' = \mid J \mid d^3r\, d^3v, \tag{2.13}$$

kde J označuje Jakobián transformace z ($\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$) na ($\mathbf{r}'$, $\mathbf{v}'$). Platí $\mid J \mid = 1$, takže

$$d^3r'\, d^3v' = d^3r\, d^3v \tag{2.14}$$

a z rovnice (2.12) dostáváme

$$[f_\alpha(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t + dt) - f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)] d^3r\, d^3v = 0. \tag{2.15}$$

První člen na levé straně rovnice (2.15) rozvineme do Taylorovy řady okolo $f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$:

$$\begin{aligned} f_\alpha(\mathbf{r} + \mathbf{v}dt, \mathbf{v} + \mathbf{a}dt, t + dt) = f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + [\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + (v_\mathrm{x}\frac{\partial f_\alpha}{\partial x} + v_\mathrm{y}\frac{\partial f_\alpha}{\partial y} + \\ v_\mathrm{z}\frac{\partial f_\alpha}{\partial z}) + (a_\mathrm{x}\frac{\partial f_\alpha}{\partial v_\mathrm{x}} + a_\mathrm{y}\frac{\partial f_\alpha}{\partial v_\mathrm{y}} + a_\mathrm{z}\frac{\partial f_\alpha}{\partial v_\mathrm{z}})]dt, \end{aligned} \tag{2.16}$$

přičemž zanedbáváme členy řádu $(dt)^2$ a vyšší. Použijeme-li operátor nabla

$$\nabla = \vec{x}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{y}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{z}\frac{\partial}{\partial z} \tag{2.17}$$

a podobně definujeme nabla operator v rychlostním prostoru

$$\nabla_v = \vec{x}\frac{\partial}{\partial v_{\mathrm{x}}} + \vec{y}\frac{\partial}{\partial v_{\mathrm{y}}} + \vec{z}\frac{\partial}{\partial v_{\mathrm{z}}}, \tag{2.18}$$

dostáváme z (2.16)

$$f_\alpha(\mathbf{r} + vdt, \mathbf{v} + adt, t{+}dt) = f_\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v},t) + \left[\frac{\partial f_\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v},t)}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla f_\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v},t) + \mathbf{a}\cdot\nabla_v f_\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v},t)\right] dt. \tag{2.19}$$

Po dosazení do vztahu (2.15) máme

$$\frac{\partial f_\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v},t)}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla f_\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v},t) + \mathbf{a}\cdot\nabla_v f_\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v},t) = 0, \tag{2.20}$$

což je Boltzmannova kinetická rovnice v bezsrážkovém případě.

Tuto rovnici můžeme přepsat do tvaru

$$\frac{\mathcal{D} f_\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v},t)}{\mathcal{D}t} = 0, \tag{2.21}$$

kde operátor

$$\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla + \mathbf{a}\cdot\nabla_v \tag{2.22}$$

představuje úplnou derivaci vzhledem k času, ve fázovém prostoru. $\Rightarrow$ zákon zachování hustoty bodů ve fázovém prostoru, tzv. *Liouvillův teorém* - srážky stejně jako radiační ztráty a procesy vzniku a zániku částic nepovažujeme za důležité.

2.6.2 Jakobián transformace ve fázovém prostoru

2.6.3 Vliv interakcí mezi částicemi

Vliv interakcí mezi částicemi? $\Rightarrow$ modifikace vztahu (2.20). Díky srážkám mohou během času dt některé částice α, které byly původně v $d^3r\,d^3v$, z tohoto elementu zmizet a obráceně jiné částice, které byly mimo tento objemový element, se v něm mohou objevit. Čistý zisk nebo úbytek částic α z $d^3r\,d^3v$ způsobený srážkami v průběhu časového intervalu dt označíme

$$\left(\frac{\delta f_\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v},t)}{\delta t}\right)_{srazk} d^3r\,d^3v\,dt, \tag{2.23}$$

kde $(\delta f_\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v},t)/\delta t)_{srazk}$ představuje rychlost změny $f_\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v},t)$ díky srážkám. Pokud tedy uvažujeme srážky, musíme vztah (**??**) přepsat jako

$$[f_\alpha(\mathbf{r}',\mathbf{v}',t+dt) - f_\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v},t)]d^3r\,d^3v = \left(\frac{\delta f_\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v},t)}{\delta t}\right)_{srazk} d^3r\,d^3v\,dt \tag{2.24}$$

a Boltzmannova rovnice modifikována pro tento případ má tvar

$$\frac{\partial f_\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v},t)}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla f_\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v},t) + \mathbf{a}\cdot\nabla_v f_\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v},t) = \left(\frac{\delta f_\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v},t)}{\delta t}\right)_{srazk} . \tag{2.25}$$

Za použití operátoru úplného diferenciálu podle času definovaného vztahem (2.22) můžeme tento vztah přepsat do kompaktní podoby

$$\frac{\mathcal{D} f_\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v},t)}{\mathcal{D} t} = \left(\frac{\delta f_\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v},t)}{\delta t}\right)_{srazk} . \tag{2.26}$$

Přesná podoba srážkového členu není známa.

2.7 Relaxační model pro srážkový člen

Uvažujeme velmi jednoduché vyjádření srážkového členu, tzv. Krookův model nebo relaxační model. Existuje i mnohem propracovanější vyjádření, např. Boltzmannův srážkový integrál nebo Fokker-Planckův srážkový člen.

Předpokládá se, že srážky obnovují lokální rovnováhu (lokálně rovnovážná rozdělovací fce $f_{\alpha 0}(\mathbf{r},\mathbf{v})$). Pokud nepůsobí externí síly, systém, který původně není v rovnováze a je popsán rozdělovací funkcí $f_\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v},t)$, dosáhne v průběhu času díky srážkám lokální rovnováhy podle exponenciálního zákona. Doba charakteristická pro tento proces je tzv. relaxační doba τ. Relaxační doba řádově odpovídá době mezi dvěma srážkami a může být rovněž vyjádřena jako ν^{-1}, kde ν je relaxační srážková frekvence. Model byl původně vyvinut Krookem:

$$\left(\frac{\delta f_\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v},t)}{\delta t}\right)_{srazk} = -\frac{(f_\alpha - f_{\alpha 0})}{\tau}. \tag{2.27}$$

Podle tohoto vztahu pro srážkový člen platí, že když $f_\alpha = f_{\alpha 0}$ máme $(\delta f_\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v},t)/\delta t)_{srazk} = 0$, takže ve stavu lokální rovnováhy se rozdělovací funkce díky srážkám nemění.

Fyzikální smysl relaxačního modelu? Uvažujme BKR se srážkovým členem bez vnějších sil a prostorových gradientů, $f_{\alpha 0}$ a τ jsou na čase nezávislé:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = -\frac{(f_\alpha - f_\alpha 0)}{\tau}, \tag{2.28}$$

což můžeme přepsat jako

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \frac{f_\alpha}{\tau} = \frac{f_\alpha 0}{\tau}. \tag{2.29}$$

Řešení této jednoduché nehomogenní diferenciální rovnice dostaneme pomocí řešení příslušné homogenní rovnice, tj. $C\,e^{t/\tau}$ (C je konstanta). Kompletní řešení rovnice je tedy

$$f_\alpha(\mathbf{v},t) = f_{\alpha 0} + [f_\alpha(\mathbf{v},0) - f_{\alpha 0}]e^{-t/\tau}. \tag{2.30}$$

Tedy, rozdíl mezi f_α a $f_{\alpha 0}$ exponencielně klesá v čase rychlostí, která odpovídá relaxační srážkové frekvenci $\nu = 1/\tau$.

Užitečný srážkový model, v mnoha případech vede k výsledků téměř identickým s těmi, které získáme pomocí Boltzmannova srážkového integrálu. Především vhodný pro slabě ionizované plazma (pouze srážky iontů s neutrály). Ale relaxační model se dá použít pouze pro srážky částic přibližně stejných hmotností.

2.8 Vlasovova rovnice

Aproximace - pohyb částic plazmatu je řízen jednak vnějšími silovými poli a jednak makroskopicky vystředovanými

Vlasovova rovnice je parciální diferenciální rovnice, která popisuje časový vývoj rozdělovací funkce ve fázovém prostoru a která přímo využívá makroskopicky vystředovaných elektromagnetických polí. Tuto rovnici můžeme získat z Boltzmannovy rovnice (2.20), když zahrneme do silového členu makroskopická pole

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_\alpha + \frac{1}{m_\alpha} \left[\mathbf{F}_{ext} + q_\alpha (\mathbf{E}_{int} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_{int}) \right] \cdot \nabla_v f_\alpha = 0. \tag{2.31}$$

Zde $\mathbf{F}_{ext}$ představuje vnější síly včetně síly Lorentzovi odpovídající externě přiloženým elektrickým a magnetickým polím a $\mathbf{E}_{int}$, $\mathbf{B}_{int}$ jsou vystředované vnitřní elektrické a magnetické pole vznikající v důsledku přítomnosti a pohybu všech nabitých částic uvnitř plazmatu. Aby byly vnitřní makroskopické elmag pole $\mathbf{E}_{int}$ a $\mathbf{B}_{int}$ konzistentní s makroskopickým nábojem a proudy existující v plazmatu, musí splňovat Maxwellovy rovnice

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_{int} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{2.32}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_{int} = 0 \tag{2.33}$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_{int} = -\frac{\partial \mathbf{B}_{int}}{\partial t} \tag{2.34}$$

$$\nabla \times \mathbf{B}_{int} = \mu_0 \left(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_{int}}{\partial t} \right), \tag{2.35}$$

kde hustota náboje v plazmatu ρ a hustota proudu v plazmatu $\mathbf{J}$ jsou dány výrazy

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_\alpha q_\alpha n_\alpha(\mathbf{r}, t) = \sum_\alpha q_\alpha \int_v f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3 v \tag{2.36}$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \sum_\alpha q_\alpha n_\alpha(\mathbf{r}, t) \mathbf{u}_\alpha(\mathbf{r}, t) = \sum_\alpha q_\alpha \int_v \mathbf{v} f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3 v, \tag{2.37}$$

kde sumace probíhá přes různé nabité částice v plazmatu a $\mathbf{u}_\alpha(\mathbf{r}, t)$ je makroskopická průměrná rychlost pro částice typu α daná vztahem (2.8).

Rovnice (2.31 až (2.35) představují kompletní soustavu self-konzistentních rovnic, které se musí řešit zároveň. Takže např. v iterativní postupu začneme s nějakými přibližnými hodnotami $\mathbf{E}_{int}(\mathbf{r}, t)$ a $\mathbf{B}_{int}(\mathbf{r}, t)$. Vyřešíme rovnici (2.31 a získáme

$f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ pro různé typy částic. Z rovnic (2.36) a (2.37) pak za použití vypočítaných rozdělovacích funkcí f_α dostáváme hustotu náboje a proudu (ρ a J) v plazmatu. Jejich velikosti pak substitujeme do Maxwellových rovnic, které řešíme pro $\mathbf{E}_{int}(\mathbf{r}, t)$ a $\mathbf{B}_{int}(\mathbf{r}, t)$. Nyní hodnoty vystředovaných makroskopických elmag polí opět dosadíme do Vlasovovy rovnice a pokračujeme v postupu znovu dokola, abychom získali self-konzistentní řešení pro rozdělovací funkce jednotlivých typů částic.

Ačkoliv Vlasovova rovnice explicitně nezahrnuje srážkový člen na pravé straně, tj. nebere v úvahu krátkodosahové srážky, není až tak v tomto směru restriktivní, jak by se mohlo zdát, protože část efektů spojených s interakcí částic je už zahrnuta v Lorentzově síle přes vnitřní self-konzistetní vystředované elmag pole.

Kapitola 3

Střední hodnoty a makroskopické veličiny

3.1 Střední hodnota fyzikální veličiny

Ke každé částici v plazmatu můžeme přiřadit nějakou její vlastnost $\chi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$.

Celková velikost veličiny $\chi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ pro částice α uvnitř objemového elementu fázového prostoru $d^3r\, d^3v$ je

$$\chi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)d^6N_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \chi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)d^3r\, d^3v. \tag{3.1}$$

Velikost této veličiny uvnitř objemového elementu d^3r nezávisle na rychlosti

$$d^3r \int_v \chi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)d^3v. \tag{3.2}$$

Střední hodnota

$$< \chi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) >_\alpha = \frac{1}{n_\alpha(\mathbf{r}, t)} \int_v \chi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)d^3v. \tag{3.3}$$

3.2 Driftová a tepelná rychlost

Nechť $\chi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \mathbf{v} \Rightarrow$ střední neboli *driftová (unášivou) rychlost* $\mathbf{u}_\alpha(\mathbf{r}, t)$

$$\mathbf{u}_\alpha(\mathbf{r}, t) =< \mathbf{v} >_\alpha= \frac{1}{n_\alpha(\mathbf{r}, t)} \int_v \mathbf{v} f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v, \tag{3.4}$$

Pokud $\chi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ je nezávislá na rychlosti částic

$$< \chi(\mathbf{r}, t) >_\alpha= \chi(\mathbf{r}t), \tag{3.5}$$

takže např. $< \mathbf{u}_\alpha >= \mathbf{u}_\alpha$.

Rychlost tepelného neuspořádaného pohybu neboli *náhodná (zvláštní) rychlost* je definována vzhledem k $\mathbf{u}_\alpha(\mathbf{r}, t)$ takto

$$\mathbf{V}_\alpha = \mathbf{v} - \mathbf{u}_\alpha. \tag{3.6}$$

Následně vždy platí, že $< \mathbf{V}_\alpha >= 0$, neboť $< \mathbf{v} >_\alpha= \mathbf{u}_\alpha$.

3.3 Tok

Makroskopické veličiny *hustota proudu částic* (nebo *tok částic*), *tenzor tlaku* a *vektor toku tepla* (nebo *tok tepelné energie*) zahrnují vždy *tok* nějaké mikroskopické veličiny $\chi(\mathbf{r},\mathbf{v},t)$. Tok $\chi(\mathbf{r},\mathbf{v},t)$ je definován jako velikost veličiny $\chi(\mathbf{r},\mathbf{v},t)$ přenesené skrze daný povrch na jednotku plochy a jednotku času.

Uvažujme povrchový element

$$d\mathbf{S} = dS\vec{\mathbf{n}}, \tag{3.7}$$

kde $\vec{\mathbf{n}}$ je normála povrchového elementu: otevřený povrch $\Rightarrow$ dvě možnosti orientace normály, uzavřený povrch $\Rightarrow$ kladná normála konvenčně ven.

Částice v plazmatu se pohybují skrz povrchový element $d\mathbf{S}$ nesouce s sebou vlastnost $\chi(\mathbf{r},\mathbf{v},t)$. Počet těchto částic typu za čas dt?

Částice mající rychlost $<\mathbf{v},\mathbf{v}+\mathbf{dv}>$ a projdou skrze $d\mathbf{S}$ v časovém intervalu $<t,t+dt>$ musí ležet v objemu hranolu o základně dS a stěně vdt. Objem hranolu:

$$d^3r = d\mathbf{S}\cdot\mathbf{v}dt = \vec{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{v}dS\,dt. \tag{3.8}$$

Počet těchto částic v tomto objemu:

$$f_\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v},t)d^3r\,d^3v = f_\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v},t)\vec{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{v}dS\,dt\,d^3v, \tag{3.9}$$

$\Rightarrow$ celkovou přenesená velikost $\chi(\mathbf{r},\mathbf{v},t)$:

$$\int_v \chi(\mathbf{r},\mathbf{v},t)f_\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v},t)\vec{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{v}d^3v\,dS\,dt. \tag{3.10}$$

Čistý zisk transportu (tok) veličiny $\chi(\mathbf{r},\mathbf{v},t)$ ve směru $\vec{\mathbf{n}}$:

$$\Phi_{\alpha n}(\chi) = \int_v \chi(\mathbf{r},\mathbf{v},t) f_\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v},t)\vec{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{v}d^3v \tag{3.11}$$

nebo za použití symbolů pro střední hodnotu

$$\Phi_{\alpha n}(\chi) = n_\alpha(\mathbf{r},t) < \chi(\mathbf{r},\mathbf{v},t)\vec{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{v} >_\alpha = n_\alpha < \chi v_n >_\alpha, \tag{3.12}$$

kde $v_n = \vec{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{v}$ označuje komponentu $\mathbf{v}$ ve směru jednotkového vektoru $\vec{\mathbf{n}}$.

- $\chi(\mathbf{r},\mathbf{v},t)$ je *skalární* veličina $\Rightarrow$ $\Phi_{\alpha n}(\chi)$ komponenta *vektoru toku* $\mathbf{\Phi}_{\alpha n}(\chi)$ ve směru $\vec{\mathbf{n}}$, tj.

  $$\Phi_{\alpha n}(\chi) = \vec{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{\Phi}_{\alpha n}(\chi), \tag{3.13}$$

  kde

  $$\mathbf{\Phi}_\alpha(\chi) = n_\alpha < \chi\mathbf{v} >_\alpha . \tag{3.14}$$

- $\chi(\mathbf{r},\mathbf{v},t)$ je *vektorová* veličina, správně $\mathbf{X}(\mathbf{r},\mathbf{v},t)$ $\Rightarrow$ *tenzor (2. řádu) toku*

  $$\hat{\mathbf{\Phi}}_\alpha(\chi) = n_\alpha < \mathbf{X}\otimes\mathbf{v} >_\alpha . \tag{3.15}$$

- $\chi(\mathbf{r},\mathbf{v},t)$ *tenzor 2. řádu* $\Rightarrow$ *tok ve tvaru tenzoru 3. řádu* a tak dále.

Můžeme oddělit příspěvek díky driftové rychlosti $\mathbf{u}_\alpha(\mathbf{r}, t)$ a příspěvek související s *náhodnou tepelnou* rychlostí $\mathbf{V}_\alpha$:

$$\Phi_{\alpha n}(\chi) = n_\alpha < \chi V_{\alpha n} > + n_\alpha < \chi u_{\alpha n} >, \tag{3.16}$$

kde $V_{\alpha n} = \vec{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{V}_\alpha$ a $u_{\alpha n} = \vec{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{u}_\alpha$.

Je-li $\mathbf{u}_\alpha = 0$ nebo zvolíme $d\mathbf{S}$ v souřadném systému, který se pohybuje driftovou rychlostí $\mathbf{u}_\alpha$

$$\Phi_{\alpha n}(\chi) = n_\alpha < \chi V_{\alpha n} >, \tag{3.17}$$

3.4 Tok částic

Tok částic: počet částic, které projdou daným povrchem na jednotku plochy za jednotku času. Vezmeme-li $\chi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = 1$ ve vztahu (3.12):

$$\Gamma_{\alpha n}(\mathbf{r}, t) = n_\alpha < v_n >_\alpha = n_\alpha u_{\alpha n}, \tag{3.18}$$

protože $< V_{\alpha n} >= 0$.

Jestliže $\mathbf{u}_\alpha = 0$, můžeme uvažovat tok pouze z kladného směru místo celkového čistého toku

$$\Gamma^+_{\alpha n}(\mathbf{r}, t) = \int_{v(+)} \vec{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{V}_\alpha f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3 v, \tag{3.19}$$

kde integrujeme pouze přes rychlosti $\vec{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{V}_\alpha > 0$.

Náhodný tok hmoty v kladném směru $\vec{\mathbf{n}}$ je tedy dán vztahem $m_\alpha \Gamma^+_{\alpha n}$, kde m_α je hmotnost částic α.

3.5 Tenzor toku hybnosti

$\cdots$ celková hybnost přenesená skrze povrchový element $\vec{\mathbf{n}} dS$ na jednotku plochy a času.

$$\chi_j = m_\alpha \mathbf{v} \cdot \vec{\mathbf{j}}, \tag{3.20}$$

kde $\vec{\mathbf{j}}$ jednotkový vektor $\Rightarrow$ složka $\Pi_{\alpha j n}(\mathbf{r}, t)$ tenzoru toku hybnosti

$$\Pi_{\alpha j n}(\mathbf{r}, t) = n_\alpha < m_\alpha (\vec{\mathbf{j}} \cdot \mathbf{v})(\vec{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}) >_\alpha = \varrho_{m\alpha} < v_j v_n >_\alpha, \tag{3.21}$$

kde $\varrho_{m\alpha} = n_\alpha m_\alpha$ je hustota hmotnosti částic α.

Platí $(< \mathbf{u}_\alpha \mathbf{V}_\alpha >= \mathbf{u}_\alpha < \mathbf{V}_\alpha >= 0)$

$$\Pi_{\alpha j n}(\mathbf{r}, t) = \varrho_{m\alpha} < V_j V_n > + \varrho_{m\alpha} u_j u_n \tag{3.22}$$

nebo v tenzorové podobě

$$\mathbf{\Pi}_\alpha(\mathbf{r}, t) = \varrho_{m\alpha} < \mathbf{V}_\alpha \otimes \mathbf{V}_\alpha > + \varrho_{m\alpha} \mathbf{u}_\alpha \otimes \mathbf{u}_\alpha. \tag{3.23}$$

V kartézských souřadnicích (x, y, z) můžeme tenzot toku hybnosti zapsat

$$\begin{aligned} \mathbf{\Pi}_\alpha &= \vec{\mathbf{x}} \otimes \vec{\mathbf{x}}\Pi_{\alpha xx} + \vec{\mathbf{x}} \otimes \vec{\mathbf{y}}\Pi_{\alpha xy} + \vec{\mathbf{x}} \otimes \vec{\mathbf{z}}\Pi_{\alpha xz} \\ &+ \vec{\mathbf{y}} \otimes \vec{\mathbf{x}}\Pi_{\alpha yx} + \vec{\mathbf{y}} \otimes \vec{\mathbf{y}}\Pi_{\alpha yy} + \vec{\mathbf{y}} \otimes \vec{\mathbf{z}}\Pi_{\alpha yz} \\ &+ \vec{\mathbf{z}} \otimes \vec{\mathbf{x}}\Pi_{\alpha zx} + \vec{\mathbf{z}} \otimes \vec{\mathbf{y}}\Pi_{\alpha zy} + \vec{\mathbf{z}} \otimes \vec{\mathbf{z}}\Pi_{\alpha zz}. \end{aligned} \tag{3.24}$$

nebo podle pravidel maticového násobení

$$\mathbf{\Pi}_\alpha = (\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}, \vec{\mathbf{z}}) \begin{pmatrix} \Pi_{\alpha xx} & \Pi_{\alpha xy} & \Pi_{\alpha xz} \\ \Pi_{\alpha yx} & \Pi_{\alpha yy} & \Pi_{\alpha yz} \\ \Pi_{\alpha zx} & \Pi_{\alpha zy} & \Pi_{\alpha zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\mathbf{x}} \\ \vec{\mathbf{y}} \\ \vec{\mathbf{z}} \end{pmatrix} \tag{3.25}$$

Obvykle ovšem tenzor 2. řádu zapisujeme jen jako matici 3x3 obsahující prvky $\Pi_{\alpha ij}$.

$\Pi_{\alpha ij} = \Pi_{\alpha ji} \Rightarrow$ matice 3x3 je *symetrická* $\Rightarrow$ pouze 6 prvků tenzoru toku hybnosti na sobě nezávislých.

3.6 Tenzor tlaku

3.6.1 Definice tlaku

Tlak plynu - síla na jednotku plochy vytvářená molekulami plynu díky srážkám se stěnou nádoby obsahující plyn. Tato síla je rovna rychlosti přenosu hybnosti molekul na stěnu nádoby.

Definici tlaku zobecníme na jakýkoliv bod uvnitř plynu (myšlený plošný element $d\mathbf{S} = \vec{\mathbf{n}}\, dS$ pohybující se střední rychlostí toku uvnitř plynu). Tlak na $d\mathbf{S}$ - *tok* hybnosti na plochu $d\mathbf{S}$ díky *náhodnému* pohybu částic.

Definujeme *parciální* tlak každého druhu částic α.

Vezmeme-li $\chi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = m_\alpha V_{\alpha j}$, dostaneme prvek $P_{\alpha jn}$ tenzoru tlaku

$$P_{\alpha jn} = \varrho_{m\alpha} < V_{\alpha j} V_{\alpha n} > . \tag{3.26}$$

Tenzor tlaku je tedy dán jako

$$\mathcal{P}_\alpha = \varrho_{m\alpha} < \mathbf{V}_\alpha \mathbf{V}_\alpha > . \tag{3.27}$$

Z (3.25) získáme vztah mezi tenzorem tlaku $\mathcal{P}_\alpha$ a tenzorem toku hybnosti $\mathbf{\Pi}_\alpha$

$$P_{\alpha jn} = \mathbf{\Pi}_\alpha - \varrho_{m\alpha} \mathbf{u}_\alpha \mathbf{u}_\alpha. \tag{3.28}$$

3.6.2 Síla na jednotku plochy

Mějme malý objemový element ohraničený uzavřeným povrchem S a $d\mathbf{S} = \vec{\mathbf{n}}dS$ jako element povrchu patřící k S, jehož normála $\vec{\mathbf{n}}$ směřuje ven.

Předpokládejme na okamžik, že všechny částice α mají stejnou rychlost $\mathbf{V}_\alpha$.

- $\mathbf{V}_\alpha$ svírá úhel menší než $90°$ s $\vec{\mathbf{n}} \Rightarrow$
  $n_\alpha(\mathbf{V}_\alpha \cdot \vec{\mathbf{n}})dS$ je počet částic, které opouštějí objem $\Rightarrow$ *pokles* hybnosti plazmatu uzavřeného povrchem S: $-n_\alpha m_\alpha(\mathbf{V}_\alpha \cdot \vec{\mathbf{n}})dS$, protože $(\mathbf{V}_\alpha \cdot \vec{\mathbf{n}}) > 0$
- $\mathbf{V}_\alpha$ svírá úhel větší než $90°$ s $\vec{\mathbf{n}} \Rightarrow$
  $n_\alpha(\mathbf{V}_\alpha \cdot \vec{\mathbf{n}})dS$ je počet částic, které přicházejí do objemu $\Rightarrow$ *vzrůst* hybnosti plazmatu uzavřeného povrchem S: $-n_\alpha m_\alpha(\mathbf{V}_\alpha \cdot \vec{\mathbf{n}})dS$, protože $(\mathbf{V}_\alpha \cdot \vec{\mathbf{n}}) < 0$

Zobecněním, rychlost změny hybnosti plazmatu v uzavřeném objemu S, díky výměně částic α skrz povrchový element $\vec{\mathbf{n}}dS$:

$$-n_\alpha m_\alpha < \mathbf{V}_\alpha(\mathbf{V}_\alpha \cdot \vec{\mathbf{n}}) > dS = -\mathcal{P}_\alpha \cdot \vec{\mathbf{n}}dS \tag{3.29}$$

Síla na jednotku plochy $\mathbf{f}_\alpha$ působící na plošný element $\vec{\mathbf{n}}dS$ jako výsledek náhodného pohybu částic je

$$\mathbf{f}_\alpha = \mathcal{P}_\alpha \cdot \vec{\mathbf{n}} = -\varrho_{m\alpha} < \mathbf{V}_\alpha(\mathbf{V}_\alpha \cdot \vec{\mathbf{n}}) > . \tag{3.30}$$

Jestliže vezmeme $\vec{\mathbf{n}} = \vec{\mathbf{x}}$, máme

$$-\mathcal{P}_\alpha \cdot \vec{\mathbf{n}} = -\vec{\mathbf{x}} P_{\alpha xx} - \vec{\mathbf{y}} P_{\alpha yx} - \vec{\mathbf{z}} P_{\alpha zx}, \tag{3.31}$$

kde $P_{\alpha xx}$ je *normála* k ploše $\Rightarrow$ *hydrostatický tlak*, zatímco prvky $P_{\alpha yx}$ a $P_{\alpha zx}$ jsou tlaky díky tangenciálním silám.

3.6.3 Síla na jednotku objemu

Sílu na jednotku objemu uvnitř plazmatu způsobená náhodným pohybem získáme integrací (3.29)

$$-\lim_{V \to 0} [\frac{1}{V} \oint_S \mathcal{P}_\alpha \vec{\mathbf{n}} dS] = -\nabla \cdot \mathcal{P}_\alpha \tag{3.32}$$

a z Gaussova teorému

$$-\oint_S \mathcal{P}_\alpha . \vec{\mathbf{n}} dS = -\int_V \nabla \mathcal{P}_\alpha d^3 r \tag{3.33}$$

3.6.4 Skalární tlak a absolutí teplota

Důležitá makroskopická veličina je *skalární tlak* neboli *střední hydrostatický tlak*:

$$p_\alpha = \frac{1}{3}\sum_{i,j} P_{\alpha i,j}\delta_{i,j} = \frac{1}{3}\sum_i P_{\alpha i,i} = \frac{1}{3}(P_{\alpha xx} + P_{\alpha yy} + P_{\alpha zz}), \tag{3.34}$$

kde $\delta_{i,j}$ je *Kronekerovo delta.*
Ze vztahu (3.26)

$$p_\alpha = \frac{1}{3}\rho_{m\alpha} < V_{\alpha x}^2 + V_{\alpha y}^2 + V_{\alpha z}^2 > \tag{3.35}$$

Protože $V_\alpha^2 = V_{\alpha x}^2 + V_{\alpha y}^2 + V_{\alpha z}^2$, dostaneme

$$p_\alpha = \frac{1}{3}\rho_{m\alpha} < V_\alpha^2 > \tag{3.36}$$

Dalším důležitým makroskopickým parametrem je teplota. *Absolutní teplota* T_α pro částice α je mírou *střední kinetické energie náhodného* pohybu částic. Z termodynamiky: střední tepelná energie $kT_{\alpha\, i}/2$ přísluší každému translačnímu stupni volnosti $(i = x, y, z)$:

$$\frac{1}{2}kT_{\alpha i} = \frac{1}{2}m_\alpha < V_{\alpha i}^2 > \tag{3.37}$$

Jestliže je rozdělení *izotropní* (např. Maxwell-Boltzmannovo)

$$p_\alpha = P_{\alpha xx} = P_{\alpha yy} = P_{\alpha zz} = \rho_{m\alpha} < V_{\alpha i}^2 > \tag{3.38}$$

a tedy dostáváme *stavovou rovnici pro ideální plyn*

$$p_\alpha = n_\alpha k T_\alpha \tag{3.39}$$

Pro Maxwell-Boltzmannovo rozdělelní

$$\mathcal{P}_\alpha = (\vec{\mathbf{x}}\vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{y}}\vec{\mathbf{y}} + \vec{\mathbf{z}}\vec{\mathbf{z}})p_\alpha = \mathbf{1}p_\alpha, \tag{3.40}$$

kde $\mathbf{1}$ je jednotkový tenzor

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.41}$$

V tomto případě

$$-\nabla \cdot \mathcal{P}_\alpha = -(\vec{\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial x}p_\alpha + \vec{\mathbf{y}}\frac{\partial}{\partial y}p_\alpha + \vec{\mathbf{z}}\frac{\partial}{\partial z}p_\alpha) = -\nabla p_\alpha, \tag{3.42}$$

takže pro *izotropní* rozdělení rychlosti je síla na jednotkový objem způsobená náhodným pohybem dána gradientem skalárního tlaku.

V některých praktických příkladech předpokládáme, že

$$\mathcal{P}_\alpha = \vec{\mathbf{x}}\vec{\mathbf{x}}P_{\alpha xx} + \vec{\mathbf{y}}\vec{\mathbf{y}}P_{\alpha yy} + \vec{\mathbf{z}}\vec{\mathbf{z}}P_{\alpha zz} \tag{3.43}$$

nebo

$$\mathcal{P}_\alpha = \begin{pmatrix} P_{\alpha xx} & 0 & 0 \\ 0 & P_{\alpha yy} & 0 \\ 0 & 0 & P_{\alpha zz} \end{pmatrix}, \tag{3.44}$$

což vyjadřuje *anizotropii* náhodných rychlostí, ale nepřítomnost tangenciálních sil, tj. viskozity. V tomto případě máme rozdílnou absolutní teplotu $T_{\alpha\, i}$ pro každý směr.

3.7 Vektor toku tepla

Komponenta vektoru toku tepla $q_{\alpha n}$ je def. jako tok *náhodné* neboli *tepelné energie* skrz povrch s normálou $\vec{\mathbf{n}}$. Vezmeme $\chi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = m_\alpha V_\alpha^2/2$ a dostaneme

$$q_{\alpha n} = \mathbf{q}_\alpha.\vec{\mathbf{n}} = \frac{1}{2}\rho_{m\alpha} < V_\alpha^2\, \mathbf{V}_\alpha.\vec{\mathbf{n}} > \tag{3.45}$$

Vektor toku tepla je tedy

$$\mathbf{q}_\alpha = \frac{1}{2}\rho_{m\alpha} < V_\alpha^2\, \mathbf{V}_\alpha > . \tag{3.46}$$

3.8 Tenzor toku tepelné energie

Standardně můžeme zavést *tenzor 3. řádu toku tepelné energie*

$$\mathcal{Q}_\alpha = \rho_{m\alpha} < \mathbf{V}_\alpha \otimes \mathbf{V}_\alpha \otimes \mathbf{V}_\alpha > \tag{3.47}$$

a jeho složky

$$Q_{\alpha\, ijk} = \rho_{m\alpha} < V_{\alpha i} V_{\alpha j} V_{\alpha k} > \tag{3.48}$$

Za použití kartézských souřadnic

$$\mathcal{Q}_\alpha = \mathcal{Q}_{\alpha x}\vec{\mathbf{x}} + \mathcal{Q}_{\alpha y}\vec{\mathbf{y}}, + \mathcal{Q}_{\alpha z}\vec{\mathbf{z}} \tag{3.49}$$

kde každý *tenzor 2. řádu* $\mathcal{Q}_{\alpha\, n}$ $(n = x,\, y,\, z)$

$$\mathcal{Q}_{\alpha n} = \begin{pmatrix} \mathcal{Q}_{\alpha xxn} & \mathcal{Q}_{\alpha xyn} & \mathcal{Q}_{\alpha xzn} \\ \mathcal{Q}_{\alpha yxn} & \mathcal{Q}_{\alpha yyn} & \mathcal{Q}_{\alpha yzn} \\ \mathcal{Q}_{\alpha zxn} & \mathcal{Q}_{\alpha zyn} & \mathcal{Q}_{\alpha zzn} \end{pmatrix} \tag{3.50}$$

Abychom získali vztah mezi vektorem toku tepla $\mathbf{q}_\alpha$ a tenzorem toku tepelné energie $\mathcal{Q}_\alpha$, přepišme vztah (3.45) jako

$$q_{\alpha n} = \frac{1}{2}\rho_{m\alpha}(< c_{\alpha x}^2 c_{\alpha n} > + < c_{\alpha y}^2 c_{\alpha n} > + < c_{\alpha z}^2 c_{\alpha n} >) \tag{3.51}$$

a tedy

$$q_{\alpha n} = \frac{1}{2}(Q_{\alpha xxn} + Q_{\alpha yyn} + Q_{\alpha zzn}) \tag{3.52}$$

3.9 Tenzor toku celkové energie

Analogicky jako při definici tenzoru toku tepelné energie

$$E_{\alpha ijk}(\mathbf{r},t) = \rho_{m\alpha} < v_i v_j v_k >_\alpha, \tag{3.53}$$

což představuje jednu z 9 složek *tenzoru toku celkové energie* $\mathcal{E}_\alpha(\mathbf{r},t)$. Tato složka je vlastně součtem tří výrazů

$$\begin{aligned} < v_i v_j v_k >_\alpha &= < V_{\alpha i} V_{\alpha j} V_{\alpha k} + u_{\alpha i} V_{\alpha j} V_{\alpha k} + u_{\alpha j} V_{\alpha k} V_{\alpha i} \\ &+ u_{\alpha k} V_{\alpha i} V_{\alpha j} + u_{\alpha i} u_{\alpha j} V_{\alpha k} + u_{\alpha j} u_{\alpha k} V_{\alpha i} \\ &+ u_{\alpha k} u_{\alpha i} V_{\alpha j} + u_{\alpha i} u_{\alpha j} u_{\alpha k}. \end{aligned} \tag{3.54}$$

Neboť $< u_{\alpha i} >= u_{\alpha i}$ a $< V_{\alpha i} >= 0$ a za použití (3.48) a (3.26)

$$\rho_{m\alpha} < v_i v_j v_k >_\alpha = \rho_{m\alpha} u_{\alpha i} u_{\alpha j} u_{\alpha k} + (\mathbf{u}_\alpha, \mathcal{P}_\alpha)_{ijk} + Q_{\alpha ijk}, \tag{3.55}$$

kde jsme použili zápis

$$(\mathbf{u}_\alpha, \mathcal{P}_\alpha)_{ijk} = u_{\alpha i} P_{\alpha jk} + u_{\alpha j} P_{\alpha ki} + u_{\alpha k} P_{\alpha ij}. \tag{3.56}$$

Takže vztah (3.53) můžeme zapsat ve tvaru tenzoru 3. řádu

$$\mathcal{E}_\alpha(\mathbf{r},t) = \rho_{m\alpha} < \mathbf{vvv} >_\alpha = \rho_{m\alpha} \mathbf{u}_\alpha \mathbf{u}_\alpha \mathbf{u}_\alpha + (\mathbf{u}_\alpha, \mathcal{P}_\alpha) + \mathcal{Q}_\alpha \tag{3.57}$$

Tenzor celkového toku energie je tedy součtem toku energie přenesené *konvektivním* pohybem částic (1. dva členy) a toku *tepelné* energie $\mathcal{Q}_\alpha$ způsobeného náhodným tepelným pohybem částic.

3.10 Vyšší momenty rozdělovací funkce

První čtyři *momenty rozdělovací funkce* jsou hustota $n_\alpha(\mathbf{r},t)$, driftová rychlost $u_{\alpha i}(\mathbf{r},\mathbf{t})$, tenzor 2. řádu toku hybnosti $\mathbf{\Pi}_{\alpha ij}(\mathbf{r},t)$ a tenzor 3. řádu toku celkové energie $E_{\alpha ijk}(\mathbf{r},t)$:

$$n_\alpha(\mathbf{r},t) = \int_v f_\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v},t)d^3v \tag{3.58}$$

$$u_{\alpha i}(\mathbf{r},\mathbf{t}) = < v_i >_\alpha = \frac{1}{n_\alpha(\mathbf{r},t)}\int_v v_i f_\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v},t)d^3v \tag{3.59}$$

$$\Pi_{\alpha ij}(\mathbf{r},t) = \rho_{m\alpha} < v_i v_j >_\alpha = m_\alpha \int_v v_i v_j f_\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v},t)d^3v \tag{3.60}$$

$$E_{\alpha ijk}(\mathbf{r},t) = \rho_{m\alpha} < v_i v_j v_k >_\alpha = m_\alpha \int_v v_i v_j v_k f_\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v},t)d^3v \tag{3.61}$$

Jestliže $u_{\alpha i}(\mathbf{r},\mathbf{t}) = 0$, máme $\mathbf{v} = \mathbf{V}_\alpha \Rightarrow$ z tenzoru toku hybnosti $\mathbf{\Pi}_{\alpha\mathbf{ij}}(\mathbf{r},t)$ se stane tenzor tlaku $\mathcal{P}_\alpha$ a z tenzoru toku celkové energie $E_{\alpha ijk}(\mathbf{r},t)$ se stane tenzor toku tepelné energie $\mathcal{Q}_\alpha$.

Jako formální rozšíření výše uvedených definicí, můžeme, pokud je to nutné, zavést vyšší momenty rozdělovací funkce

$$M^{(N)}_{\alpha ij\ldots k}(\mathbf{r},t) = \int_v v_i v_j \ldots v_k f_\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v},t)d^3v, \tag{3.62}$$

kde složky rychlosti v_i se v integrálu objeví N-krát.

Kapitola 4

Rovnovážný stav

4.1 Rozdělovací funkce v rovnovážném stavu

Předpokládejme

- pouze jeden druh částic
- $\mathbf{F}_{ext} = 0$
- homogenní rozdělovací funkce
- časově nezávislé řešení BKR

$$\left(\frac{\delta f}{\delta t}\right) = 0 \tag{4.1}$$

Později odvodíme výraz pro *rovnovážnou rozdělovací funkci* pomocí Boltzmannova srážkového integrálu, ale nyní budeme jednoduše pracovat s *obecným principem detailní rovnováhy* tak, jak se používá ve statistické fyzice.

4.1.1 Obecný princip detailní rovnováhy a binární srážky

Za rovnovážných podmínek je pravděpodobnost výskytu jakéhokoliv fyzikálního jevu rovna pravděpodobnosti jevu inverzního (kompenzace).

$$f f_1 d^3v d^3v_1 = f' f_1' d^3v' d^3v_1' \tag{4.2}$$

a protože můžeme dokázat, že $d^3v d^3v_1 = d^3v' d^3v_1'$ dostaneme

$$f(\mathbf{v}) f_1(\mathbf{v_1}) = f'(\mathbf{v}') f_1'(\mathbf{v_1'}) \tag{4.3}$$

Předpoklad, že rychlosti částic nejsou korelované je tzv. předpoklad *molekulárního chaosu*. Dobře platí pokud hustota plynu je tak malá, že střední volná dráha je větší něž dosah charakteristických sil mezi částicemi. Ačkoliv toto obecně není případ plazmatu, experiment ukazuje, že Maxwell-Boltzmannova rozdělovací funkce je často použitelná.

4.1.2 Sumační invariant

$$\chi(\mathbf{v}) + \chi(\mathbf{v_1}) = \chi(\mathbf{v'}) + \chi(\mathbf{v_1'}) \tag{4.4}$$

Ze zákona zachování hmotnosti, hybnosti a energie $\Rightarrow$ jsou to sumační invarianty:

$$\begin{aligned} m + m_1 &= m + m_1 & (4.5) \\ m\mathbf{v} + m_1\mathbf{v_1} &= m\mathbf{v}' + m_1\mathbf{v}_1' & (4.6) \\ \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m_1v_1^2 &= \frac{1}{2}m(v')^2 + \frac{1}{2}m_1(v'_1)^2 & (4.7) \\ & & (4.8) \end{aligned}$$

4.1.3 Maxwell-Boltzmannovská rozdělovací funkce

Použijeme přirozený logaritmus na rovnici (4.3)

$$\ln f + \ln f_1 = \ln f' + \ln f_1' \tag{4.9}$$

$\Rightarrow$ $\ln f$ je sumační invariant srážkového procesu
$\Rightarrow$ lineární kombinace sumačních invariantů m, $m\mathbf{v}$ a $mv^2/2$:

$$\ln f = m(a_0 + \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{v} - a_2v^2/2), \tag{4.10}$$

kde a_0, $\mathbf{a}_1 = a_{1x}\vec{\mathbf{x}} + a_{1y}\vec{\mathbf{y}} + a_{1y}\vec{\mathbf{y}}$ a a_2 jsou konstanty.

$$\ln f = m[a_0 + (a_{1x}^2 + a_{1y}^2 + a_{1z}^2)/(2a_2)] \tag{4.11}$$

$$-\frac{1}{2}ma_2[(v_x - a_{1x}/a_2)^2 + (v_y - a_{1y}/a_2)^2 + (v_z - a_{1z}/a_2)^2 = \tag{4.12}$$

$$= m[a_0 + a_1^2/(2a_2)] - \frac{1}{2}ma_2(\mathbf{v} - \mathbf{a}_1/a_2)^2 \tag{4.13}$$

a definujeme konstanty

$$\ln C = m[a_0 + a_1^2/(2a_2)] \tag{4.14}$$

$$\mathbf{v_0} = \mathbf{a}_1/a_2, \tag{4.15}$$

takže

$$f = C \exp[-\frac{1}{2}ma_2(\mathbf{v} - \mathbf{v_0})^2], \tag{4.16}$$

což je *Maxwell-Boltzmannovo* nebo *Maxwellovo* rozdělení.

4.1.4 Určení konstatních koeficientů

Při určení pěti neznámých konstantních koeficientů v Maxwellově rozdělení vycházíme z

$$n = \int_v f d^3 v \tag{4.17}$$

$$\mathbf{u} = <\mathbf{v}>= \frac{1}{n} \int_v f \mathbf{v} d^3 v \tag{4.18}$$

$$\frac{3}{2} nkT = \frac{1}{2} nm < V^2 >= \frac{1}{2} m \int_v f V^2 d^3 v. \tag{4.19}$$

Následně dostáváme

$$f(V) = n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{mV^2}{2kT} \right). \tag{4.20}$$

Uvědomme si, že n a T jsou konstanty nezávislé na $\mathbf{r}$ a t.

4.1.5 Lokální Maxwell-Boltzmannova rozdělovací funkce

Často sice nejsme ve stavu termodynamické rovnováhy, ale velmi blízko. Dobrou aproximací je pak zavedení *lokální* Maxwell-Boltzmannovy rozdělovací funkce

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = n(\mathbf{r}, t) \left(\frac{m}{2\pi kT(\mathbf{r}, t)} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{m[\mathbf{v} - \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)]^2}{2kT(\mathbf{r}, t)} \right). \tag{4.21}$$

4.2 Vlastnosti Maxwell-Boltzmannovy rozdělovací funkce

Předpokládáme, že $\mathbf{u} = 0$ nebo se pozorovatel pohybuje střední rychlostí plynu $\Rightarrow$ $\mathbf{v} = \mathbf{V}$:

$$f(v)d^3v = n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)d^3v. \tag{4.22}$$

4.2.1 Rozdělení komponenty rychlosti

$$g(v_x)dv_x = \int_{v_y}\int_{v_z} f(v)dv_xdv_ydv_z \tag{4.23}$$

a dosazením M.-B. rozdělovací funkce

$$g(v_x)dv_x = n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{mv_x^2}{2kT}\right)dv_x\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{mv_y^2}{2kT}\right)dv_y\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{mv_z^2}{2kT}\right)dv_z. \tag{4.24}$$

Každý integrál je roven $(2\pi kT/m)^{1/2}$, takže

$$g(v_x)dv_x = n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{mv_x^2}{2kT}\right)dv_x \tag{4.25}$$

$\Rightarrow$ každá komponenta rychlosti ma *Gaussovské* rozdělení, které je symetrické kolem $< v_i >= 0$ pro $i = x, y, z$. Ale $< v_i^2 >$ je kladné a vyjadřuje disperzi

$$< v_i^2 >= \frac{1}{n}\int_{-\infty}^{+\infty} g(v_i)v_i^2dv_i = \frac{kT}{m}. \tag{4.26}$$

Tento výsledek je v souladu s ekvipartičním teorémem

$$\frac{1}{2}mv_i^2 = \frac{1}{2}kT \tag{4.27}$$

4.2.2 Rozdělení rychlostí

Protože M.-B. rozdělení je izotropní, můžeme definovat rozdělení *rychlosti* $v \equiv |\mathbf{v}|$. Přejdeme do sférických souřadnic

$$d^3v = v^2 \sin\theta d\theta d\phi. \tag{4.28}$$

Rozdělovací funkce rychlostí $F(v)$

$$F(v)dv = \int_\theta \int_\phi f(v)v^2 \sin\theta d\theta d\phi dv \tag{4.29}$$

a tedy

$$F(v) = 4\pi n \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp v^2 \left(-\frac{mv^2}{kT}\right) \tag{4.30}$$

4.2.3 Střední hodnoty související s rychlostí molekul

Střední hodnota rychlosti

$$< v >= \frac{1}{n}\int_v fvd^3v = \frac{1}{n}\int_0^\infty F(v)vdv \tag{4.31}$$

a po výpočtu

$$< v >= (8/\pi)^{1/2}(kT/m)^{1/2}. \tag{4.32}$$

Střední hodnota čtverce rychlosti

$$< v^2 >= \frac{1}{n}\int\int\int_{-\infty}^{+\infty} f v^2 dv_x dv_y dv_z = \frac{4\pi}{n}\int_0^{\infty} v^4 f(v) dv \tag{4.33}$$

a tedy

$$< v^2 >= 3kT/m, \tag{4.34}$$

což odpovídá také vztahu $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ a $< v_x^2 >=< v_y^2 >=< v_z^2 >$.

Nejpravděpodobnější rychlost v_p:

$$\left(\frac{dF(v)}{dv}\right)_{v=v_p} = 0 \tag{4.35}$$

a tedy

$$v_p = (2kT/m)^{1/2}. \tag{4.36}$$

4.2.4 Náhodný tok částic

Tok částic

$$\Gamma_n = n < v_n >= \int_v f \mathbf{v} \cdot \vec{\mathbf{n}} d^3 v \tag{4.37}$$

je pro náhodný pohyb částic roven nule. Jaký je tok na jednu stranu myšlené plochy?

$$\Gamma = n\left(\frac{kT}{2\pi m}\right)^{1/2} = \frac{1}{4}n < v > \tag{4.38}$$

4.2.5 Kinetický tlak a tok tepla

Z definice tenzoru kinetického tlaku

$$\mathcal{P} = \rho_m < \mathbf{cc} >= m\int_v \mathbf{VV} f d^3v \tag{4.39}$$

a vektoru toku tepla

$$\mathbf{q} = \frac{1}{2}\rho_m < V^2\mathbf{V} >= \frac{1}{2}m\int_v V^2\mathbf{V} f d^3v \tag{4.40}$$

dostaneme za použití M.-B. rozdělení

$$\mathcal{P} = \rho_m(< V_x^2 > \vec{\mathbf{x}}\vec{\mathbf{x}} + < V_y^2 > \vec{\mathbf{y}}\vec{\mathbf{y}} + < V_z^2 > \vec{\mathbf{z}}\vec{\mathbf{z}}) = nkT(\vec{\mathbf{x}}\vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{y}}\vec{\mathbf{y}} + \vec{\mathbf{z}}\vec{\mathbf{z}}) \tag{4.41}$$

a

$$\mathbf{q} = 0, \tag{4.42}$$

protože integrály s lichými integrandy jsou rovny nule. Skalární tlak je tedy

$$p = nkT. \tag{4.43}$$

4.3 Rovnováha za přítomnosti vnějších sil

Plyn za rovnovážných podmínek vložený do pole konzervativních sil je popsán rozdělovací funkcí, která se liší od M.-B. rozdělovací funkce exponenciálním tzv. *Boltzmannovým faktorem*. Pole konzervativních sil popíšeme pomocí potenciální energie $U(\mathbf{r})$:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r}). \tag{4.44}$$

Protože jde pouze o funkci $\mathbf{r}$, předpokládáme, že řešení BKR je ve tvaru

$$f(\mathbf{r}, v) = f_0(v)\psi(\mathbf{r}), \tag{4.45}$$

kde $f_0(v)$ je M.-B. rovnovážná rozděl. fce. Určíme neznámou funkci $\psi(\mathbf{r})$ z BKR za rovnovážných podmínek v přítomnosti konzervativních sil:

$$\mathbf{v}.\nabla[f_0(v)\psi(\mathbf{r})] - \frac{1}{m}[\nabla U(\mathbf{r})].\nabla_v[f_0(v)\psi(\mathbf{r})] = 0. \tag{4.46}$$

Ze vztahu pro $f_0(v)$ můžeme ověřit

$$\nabla_v f_0(v) = -\frac{m\mathbf{v}}{kT} f_0(v), \tag{4.47}$$

takže rovnice (4.46) se zjednodušuje

$$f_0(v)\mathbf{v}.[\nabla\psi(\mathbf{r}) + \frac{1}{kT}\psi(\mathbf{r})\nabla U(\mathbf{r})] = 0 \tag{4.48}$$

a odtud

$$\frac{\nabla\psi(\mathbf{r})}{\psi(\mathbf{r})} = -\frac{1}{kT}\nabla U(\mathbf{r}). \tag{4.49}$$

Protože $d\psi = \nabla\psi \cdot d\mathbf{r}$, můžeme vztah (4.49) přepsat jako

$$\frac{d\psi(\mathbf{r})}{\psi(\mathbf{r})} = -\frac{1}{kT}dU(\mathbf{r}) \tag{4.50}$$

a řešení této rovnice je

$$\psi(\mathbf{r}) = A_0 \exp[-\frac{U(\mathbf{r})}{kT}], \tag{4.51}$$

kde A_0 určíme z

$$\int_v f(\mathbf{r}, v) d^3v = n(\mathbf{r}), \tag{4.52}$$

takže

$$n(\mathbf{r}) = A_0 \exp[-\frac{U(\mathbf{r})}{kT}] \int_v f_0(v) d^3v. \tag{4.53}$$

Označíme n_0 hustotu v oblasti, kde $U(\mathbf{r}) = 0$ za rovnovážných podmínek, takže

$$n_0 = \int_v f_0(v) d^3v, \tag{4.54}$$

kde jsme museli zvolit $A_0 = 1$. Za rovnovážných podmínek, pro $\mathbf{u} = 0$ a v přítomnosti konzervativnívh sil máme tedy rozdělovací funkci ve tvaru

$$f(\mathbf{r}, v) = f_0(v) \exp[-\frac{U(\mathbf{r})}{kT}] = n_0 \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{2}{3}} \exp[-\frac{(\frac{1}{2}mv^2 + U)}{kT}]. \tag{4.55}$$

Hustota částic v systému s touto rozdělovací funkcí je popsána vztahem:

$$n(\mathbf{r}) = n_0 \exp[-\frac{U(\mathbf{r})}{kT}]. \tag{4.56}$$

Faktor $\exp[-U\mathbf{r}/kT]$, který určuje nehomogenitu $f(\mathbf{r}, v)$ je *Boltzmannův faktor*.

Důležitým případem v plazmatu je přítomnost elstat. pole

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi(\mathbf{r}), \tag{4.57}$$

kde $\phi(\mathbf{r})$ je elstat. skalární potenciál. Potenciální energie je

$$U(\mathbf{r}) = q\phi(\mathbf{r}) \tag{4.58}$$

a hustota částic s nábojem q v rovnovážném stavu

$$n(\mathbf{r}) = n_0 \exp[-\frac{q\phi(\mathbf{r})}{kT}]. \tag{4.59}$$

4.4 Stupeň ionizace za rovnovážného stavu a Sahova rovnice

Ze statistické mechaniky můžeme určit stupeň ionizace plynu v termodynam. rovnováze za teploty T bez znalosti detailů ionizačního procesu. Pouze musíme rozumět pojmu *ionizační energie (potenciál)*, který se udává v *elektronvoltech*. Hodnoty 1. ionizačního potenciálu některých atomů:

Element	**U(eV)**
Helium (He)	24.59
Argon (Ar)	15.76
Nitrogen (N)	14.53
Oxygen (O)	13.62
Hydrogen (H)	13.60
Mercury (Hg)	10.44
Iron (Fe)	7.87
Sodium (Na)	5.14
Potassium (K)	4.34
Cesium (Cs)	3.89

Tepelná energie kT velikosti 1 eV $\sim$ 11600 K $\Rightarrow$ pouze při velmi vysokých teplotách tepelná enrgie částice $3kT/2$ dosáhne ionizační energie. Přesto můžeme dosáhnout značného stupně ionizace i při nižších teplotách $\Leftrightarrow$ částice z ocasu Maxwellova rozdělení u vysokých energií mají dostatečnou energii!

Použijeme vztah (4.56), ale musíme uvažovat kvantově-mechanicky:

$$\frac{n_a}{n_b} = \frac{g_a}{g_b} exp[-\frac{(U_a - U_b)}{kT}], \tag{4.60}$$

kde g_a a g_b jsou *statistické váhy* stavů s energiemi U_a a U_b, tj. *degenerace* těchto stavů. Pro konkrétní příklad systému majícího pouze tyto dva stavy je část α všech částic s vyšší energií U_a:

$$\alpha = \frac{n_a}{(n_a + n_b)} = \frac{n_a}{n_b}\left(\frac{n_a}{n_b} + 1\right)^{-1} \tag{4.61}$$

nebo z (4.60) a pro $U = U_a - U_b$

$$\alpha = \frac{(g_a/g_b)\exp(-U/kT)}{(g_a/g_b)\exp(-U/kT) + 1} \tag{4.62}$$

Při řešení problému ionizace vezmeme stav a jako stav iont-elektronového páru a stav b jako stav neutrálního atomu $\Rightarrow U = U_a - U_b$ je ionizační energie a α je stupeň ionizace. Teplota, při níž je $\alpha = 0.5 \Rightarrow$

$$\frac{g_a}{g_b}\exp(-\frac{U}{kT_{1/2}}) = 1, \tag{4.63}$$

tj.

$$T_{1/2} = \frac{U}{k\ln(g_a/g_b)} \tag{4.64}$$

Procento částic v ionizovaném stavu se mění z téměř nuly na téměř jedničku v úzkém teplotním intervalu, který můžeme *odhadnout*. Aproximujme $\alpha(T)$ přímkou a hledejme interval ΔT, na němž $\alpha = 0$ a $\alpha = 1$:

$$\left(\frac{d\alpha(T)}{dT}\right)_{T_{1/2}} = \frac{1}{\Delta T}. \tag{4.65}$$

Ze vztahu (4.62) za předpokladu $d(g_a/g_b)/dT = 0$

$$\left(\frac{d\alpha(T)}{dT}\right)_{T_{1/2}} = \left[\frac{U\alpha^2}{T^2(g_a/g_b)\exp(-U/kT)}\right]_{T_{1/2}} = \frac{U}{4T_{1/2}^2}, \tag{4.66}$$

takže

$$\Delta T = \frac{4T_{1/2}}{k\ln(g_a/g_b)} = \frac{4U}{[k\ln(g_a/g_b)]^2} \tag{4.67}$$

odkud vidíme, že čím vyšší je g_a/g_b, tím menší je $\Delta T \Rightarrow$ (degenerace ionizovaného stavu je mnohem vyšší) téměř skoková fce kolem $T_{1/2}$.

Degeneraci (váhy) g_a a g_b stavů musíme určit kvantově-mechanicky. Zde jen výsledek pro zanedbání malé interakce mezi volným elektronem a iontem a zanedbání vnitřních stupňů volnosti všech částic:

$$\frac{g_a}{g_b} = \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2}\right)^{3/2} \frac{1}{n_i}, \tag{4.68}$$

kde h je Planckova konstanta a n_i je hustota iontů. Dosazením do (4.60) dostáváme *Sahovu rovnici*

$$\frac{n_i}{n_n} = \left(\frac{2\pi m_e k}{h^2}\right)^{3/2} T^{3/2} \frac{1}{n_i} \exp(-\frac{U}{kT}). \tag{4.69}$$

Nebo vyjádřením konstatních faktorů, teploty T v eV a n_i v m^{-3}

$$\frac{n_i}{n_n} = 3.00 \times 10^{27} T^{3/2} \frac{1}{n_i} \exp(-\frac{U}{T}). \tag{4.70}$$

$\Rightarrow$ Pokud je celková hustota $n = n_i + n_n$ nízká, můžeme i při teplotách hodně pod ionizační energií dosáhnout značného stupně ionizace.

Kapitola 5

Interakce částic v plazmatu

5.1 Úvod

Slova *srážka* a *interakce* mohou být používány v mikroskopickém světě jako synonyma. Srážky dělíme na

- *elastické, tj. pružné* - platí zákon zachovaní hmotnosti, hybnosti a energie takovým způsobem, že nedochází ke změnám vnitřních stavů částic, vzniku ani zániku částic.
- *neelastické, tj. nepružné* - změna vnitřního stavu několika nebo všech zúčastněných částic, možnost vzniku nebo zániku částic; *rekombinace* nabitých částic za vzniku částice neutrální; *záchyt* nabité částice částicí neutrální za vzniku větší nabité částice; energie elektronu atomu se může zvýšit $\Rightarrow$ *excitace* elektronu do vyššího stavu nebo dokonce oddělení elektronu od atomu, tj. *ionizace*.

V plazmatu musí především rozlišovat

- interakce mezi nabitými částicemi: podle Coulombova zákona, tj. závislost $1/r^2$ $\Rightarrow$ *dalekodosahové interakce* $\Rightarrow$ *mnohonásobné* interakce
- interakce mezi nabitou částicí a neutrálem nebo dvěma neutrály: silové pole neutrální částice dostatečně silné pouze v oblasti elektronového obalu $\Rightarrow$ *krátkodosahové interakce* $\Rightarrow$ neutrální částice neinteragují často s dalšími částicemi a naprosto zřídka s více částicemi zaráz $\Rightarrow$ především *binární* srážky

Mnoha-částicové Coloumbovské interakce může popsat také jako současné binární interakce, v praxi jako sérii následných binárních interakcí s malým úhlem. Tyto interakce jsou důležité pro chování plazmatu. Nicméně ve *slabě ionizovaném plazmatu* nehrají několikanásobné interakce velkou roli a jednoduché binární srážky adektávně popisují jevy v plazmatu. Největší roli v těchto typech plazmatu pak hrají elektrony, protože rychle reagují na el. a mg. pole.

5.2 Binární srážky

Uvažujme pružnou srážku dvou částic o hmotnosti m a m_1 o rychlostech $\mathbf{v}$ a $\mathbf{v_1}$ před srážkou a $\mathbf{v}'$ a $\mathbf{v_1}'$ po srážce. V následujícím textu budou veličiny s *čárkou* označovat veličiny po srážce.

Můžeme pracovat v *laboratorním* systému souřadnic, ale konvečně spíše v systému, kde částice m je v klidu a částice m_1 se přibližuje *relativní rychlostí*

$$\mathbf{g} = \mathbf{v_1} - \mathbf{v}. \tag{5.1}$$

Po srážce je relativní rychlost

$$\mathbf{g}' = \mathbf{v_1}' - \mathbf{v}'. \tag{5.2}$$

Záměrná vzdálenost b je definována jako definována jako minimální vzdálenost příblížení, pokud by nedošlo k interakci. *Úhel rozptylu* je χ a úhel orientace *orbitální roviny* (nebo *roviny srážky*) vzhledem k nějakému danému směru kolmému na orbitální rovinu je ε.

Rychlost *těžiště* srážejících se částic před srážkou je

$$\mathbf{c_0} = \frac{m\mathbf{v} + m_1\mathbf{v_1}}{m + m_1} \tag{5.3}$$

a po srážce

$$\mathbf{c_0'} = \frac{m\mathbf{v}' + m_1\mathbf{v_1'}}{m + m_1} \tag{5.4}$$

Počáteční rychlosti můžeme vyjádřit pomocí $\mathbf{c_0}$ a $\mathbf{g}$

$$\mathbf{v} \;=\; \mathbf{c_0} - \frac{\mu}{m}\mathbf{g} \tag{5.5}$$

$$\mathbf{v}_1 \;=\; \mathbf{c_0} + \frac{\mu}{m_1}\mathbf{g}, \tag{5.6}$$

kde μ označuje *redukovanou hmotnost*

$$\mu = \frac{mm_1}{m + m_1}. \tag{5.7}$$

Podobně obdržíme i rychlosti po srážce

$$\mathbf{v}' \;=\; \mathbf{c_0'} - \frac{\mu}{m}\mathbf{g}' \tag{5.8}$$

$$\mathbf{v}'_1 \;=\; \mathbf{c_0'} + \frac{\mu}{m_1}\mathbf{g}'. \tag{5.9}$$

Ze zákona *zachování hybnosti* během pružné srážky

$$m\mathbf{v} + m_1\mathbf{v_1} = m\mathbf{v}' + m_1\mathbf{v_1'} \tag{5.10}$$

nebo ze vztahů (5.3) a (5.4)

$$(m + m_1)\mathbf{c_0} = (m + m_1)\mathbf{c_0'}, \tag{5.11}$$

takže

$$\mathbf{c_0} = \mathbf{c_0'} \tag{5.12}$$

Ze zákona *zachování energie* během pružné srážky máme

$$\frac{1}{2}(mv^2 + m_1 v_1^2) = \frac{1}{2}[m(v')^2 + m_1(v_1')^2] \tag{5.13}$$

a přímou úpravou vztahů (5.5), (**??**), (5.8) a (5.9)

$$\frac{1}{2}(mv^2 + m_1 v_1^2) = \frac{1}{2}(m + m_1)c_0^2 + \frac{1}{2}\mu g^2 \tag{5.14}$$

$$\frac{1}{2}[m(v')^2 + m_1(v_1')^2] = \frac{1}{2}(m + m_1)(c_0'2)^2 + \frac{1}{2}\mu(g')^2. \tag{5.15}$$

Protože $\mathbf{c_0} = \mathbf{c_0'}$ dostáváme

$$g = g', \tag{5.16}$$

tedy *velikost*, ale nikoliv směr, je zachována při binárních pružných srážkách.

Úhel χ mezi **g** a **g'** je *úhel rozptylu* nebo také *deflekční úhel*. Abychom dostali vztah mezi vektory **g** a **g'**, zvolíme např. kartézké souřadnice s osou z ve směru **g**. Máme tedy

$$g_x = g_y = 0 \tag{5.17}$$

$$g_z = g = g' \tag{5.18}$$

$$g'_x = g \sin\chi \cos\varepsilon \tag{5.19}$$

$$g'_y = g \sin\chi \sin\varepsilon \tag{5.20}$$

$$g'_z = g \cos\chi, \tag{5.21}$$

kde ε určuje relativní orientaci *roviny srážky*. Pokud tedy známe počáteční rychlosti a úhel rozptylu χ můžeme určit rychlosti po srážce. Opačně, pokud známe konečné rychlosti a χ, můžeme určit původní rychlosti. Tento fakt umožňuje jednoduše uvažovat o *inverzní srážce*, protože χ je stejné jako pro přímou srážku (b, vzájemná síla a g jsou stejné).

Úhel rozptylu je jediná veličina, která závisí na detailech srážkového procesu. V případě vzájemné síly, která závisí pouze na vzdálenosti mezi interagujícími částicemi, χ závisí na následujících parametrech:

1. zákon vzájemného silového působení
2. velikost vzájemné rychlosti g
3. záměrná vzdálenost b.

5.3 Dynamika binární srážky

Dynamika binární srážky je řízena zákonem vzájemného silového působení. Pro každé b existuje odpovídající χ a jejich vztah je nezávislý na zákonu vzájemných sil. Tento vztah je obsažen v *diferenciálním účinném průřezu* definovaném v odstavci **??**.

Uvažujme srážku dvou částic m a m_1 v souřadném systému částice m. Polohový vektor částice m_1 bude $\mathbf{r}$. Předpokl., že síla interakce je centrální síla, tj.

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F(r)\vec{\mathbf{r}} \tag{5.22}$$

a poteniální energii lze tedy vyjádřit takto

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r}) = -\frac{\partial U(r)}{\partial r}\vec{\mathbf{r}}. \tag{5.23}$$

Pro centrální sílu je torze $\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}(\mathbf{r})$ nulová, a protože jde o časovou změnu momentu hybnosti $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$

$$\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}, \tag{5.24}$$

$\Rightarrow$ moment hybnosti je pohybová konstanta; $\mathbf{r}$ je stále kolmé na konstantní směr $\mathbf{L}$
$\Rightarrow$ pohyb leží v rovině.

Použijeme polární souřadnice (r, θ) a uvědomíme si, že jednotkové vektory $\vec{\mathbf{r}}$ a $\vec{\theta}$ závisí na θ:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{\mathbf{r}} + r\frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{\mathbf{r}} + r\frac{d\vec{\mathbf{r}}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}. \tag{5.25}$$

Protože $d\vec{\mathbf{r}}/d\theta = \vec{\theta}$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{\mathbf{r}} + r\frac{d\theta}{dt}\vec{\theta} \tag{5.26}$$

nebo jinak zapsáno

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\vec{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\vec{\theta}. \tag{5.27}$$

Trajektorii částice nalezneme ze zákona zachování *energie* a *momentu hybnosti* pomocí analogie s jednočásticovým problémem. Kinetická energie relativního pohybu je

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2). \tag{5.28}$$

Ze ZZE

$$\frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + U(r) = \frac{1}{2}\mu g^2. \tag{5.29}$$

Moment hybnosti vzhledem k počátku je dán

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times (\mu \dot{\mathbf{r}}) = \mu r^2 \dot{\theta}. \tag{5.30}$$

Původní hodnota momentu hybnosti je $b\mu g$, a tedy

$$r^2 \dot{\theta} = bg. \tag{5.31}$$

Pomocí předchozích vztahů získáme diferenciální rovnici pro dráhu $r(\theta)$. Napíšeme

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}, \tag{5.32}$$

použijeme (5.31) a (5.29) k eliminaci $d\theta/dt$ a dr/dt. Diferenciální rovnice trajektorie:

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{r^4}{b^2}\left[1 - \frac{b^2}{r^2} - \frac{2U(r)}{\mu g^2}\right], \tag{5.33}$$

což přeskupíme takto

$$d\theta = \pm \frac{b}{r^2}\left[1 - \frac{b^2}{r^2} - \frac{2U(r)}{\mu g^2}\right]^{-1/2} dr. \tag{5.34}$$

Výběr znaménka se musí udělat z fyzikálního náhledu. Kladné znaménko se použije pro $\theta > \theta_m$, záporné pro $\theta < \theta_m$, kde θ_m je úhel v bodě největšího přiblížení (*vertexa* trajektorie). Polohový vektor v tomto bodě označíme r_{m}.

Vzdálenost největšího přiblížení r_m dostaneme z (5.33), když si uvědomíme $dr/d\theta = 0$ a $r = r_m$:

$$1 - \frac{b^2}{r_m^2} - \frac{2U(r_m)}{\mu g^2} = 0 \tag{5.35}$$

tedy

$$r_m = b\left[1 - \frac{2U(r_m)}{\mu g^2}\right]^{-1/2} \tag{5.36}$$

Abychom určili *úhel rozptylu* χ, uvědomme si, že

$$\chi = \pi - 2\theta_m \tag{5.37}$$

a integrujme vztah (5.34) od θ_m po jiný úhel θ:

$$\theta - \theta_m = \pm \int_{r_m}^{r} \frac{b}{x^2}\left[1 - \frac{b^2}{x^2} - \frac{2U(x)}{\mu g^2}\right]^{-1/2} dx, \tag{5.38}$$

(stejná konvence znamének). Pro $r \to \infty$ máme $\theta_{(-)} \to 0$, zatímco $\theta_{(+)} \to 2\theta_m$, takže

$$\theta_m = \int_{r_m}^{\infty} \frac{b}{r^2}\left[1 - \frac{b^2}{r^2} - \frac{2U(r)}{\mu g^2}\right]^{-1/2} dr \tag{5.39}$$

a úhel rozptylu je

$$\chi(b,g) = \pi - 2\int_{r_m}^{\infty} \frac{b}{r^2}\left[1 - \frac{b^2}{r^2} - \frac{2U(r)}{\mu g^2}\right]^{-1/2} dr. \tag{5.40}$$

Abychom mohli vypočítat χ musíme znát záměrnou vzdálenost b, počáteční rychlosti g a vzájemnou potenciální energii intergajících částic $U(\mathbf{r})$.

5.4 Vyjádření úhlu rozptylu

Ukážeme si dvě konkrétní použití vztahu (5.40) k určení úhlu rozptylu χ pomocí záměrné vzdálenosti b a počáteční rychlosti g.

5.4.1 Dvě perfektně elastické tuhé koule

Uvažujme srážku dvou perfektně elastických tuhých koulí o poloměru R_1 a R_2. Potenciální energie je dána

$$\begin{aligned} U(r) &= 0\,\mathrm{pro}\,r > R_1 + R_2 \\ &= \infty\,\mathrm{pro}\,r < R_1 + R_2. \end{aligned} \tag{5.41}$$

Protože koule nemohou do sebe pronikat je jejich vzdálenost $r \geq R_1 + R_2$ a tedy zjednodušíme vztah (5.40) jako

$$\chi = \pi - 2\int_{r_m}^{\infty} \frac{b}{r^2}\left[1 - \frac{b^2}{r^2}\right]^{-1/2} dr. \tag{5.42}$$

Použijeme substituci $y = b/r$:

$$\chi = \pi - 2\int_0^{b/r_m} (1 - y^2)^{-1/2} dy, \tag{5.43}$$

což dává

$$\chi = \pi - 2\sin^{-1}(b/r_m). \tag{5.44}$$

Pro $b > R_1 + R_2$ nedochází k žádné interakci $\Rightarrow r_m = b$. Pro $b \leq R_1 + R_2$ se koule sráží $\Rightarrow r_m = R_1 + R_2$.

$$\begin{aligned} \chi &= \pi - 2\arcsin\left(\frac{b}{R_1 + R_2}\right) \text{ pro } b \leq R_1 + R_2 \\ &= 0 \text{ pro } b > R_1 + R_2 \end{aligned} \tag{5.45}$$

5.4.2 Coulombovský interakční potenciál

Uvažujme případ Coulombovského pole, jehož interakční potenciální energie je

$$U(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_1}{r}, \tag{5.46}$$

kde q a q_1 jsou elektrické náboje částic o hmotnosti m a m_1. Dosazenín do vztahu (5.40) dostaneme

$$\chi(b,g) = \pi - 2\int_{r_m}^{\infty} \frac{b}{r^2}\left[1 - \frac{b^2}{r^2} - \frac{qq_1}{2\pi\varepsilon_0 \mu g^2 r}\right]^{-1/2} dr. \tag{5.47}$$

Vzdálenost nejbližšího přiblížení r_m můžeme dostat z (5.36) a (5.46). Zavedeme konstantu

$$b_0 = \frac{qq_1}{4\pi\varepsilon_0 \mu g^2}, \tag{5.48}$$

takže b_0 vyjadřuje vzdálenost, na které je el. potenciální energii interakce dvakrát větší než relativní kinetická energie nekonečnu. Substitucí proměnné $y = 1/r$ a použitím b_0 ve vztahu (5.47) dostaneme

$$\chi(b,g) = \pi - 2b\int_0^{1/r_m} (-b^2y^2 - 2b_0 y + 1)^{-1/2} dy. \tag{5.49}$$

Použijeme standardní vztah pro integraci (Rektorys):

$$\int (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)^{-1/2} dx = \frac{1}{\sqrt{-\alpha}} \arcsin\left[\frac{-2\alpha x - \beta}{(\beta^2 - 4\alpha\gamma)^{1/2}}\right], \tag{5.50}$$

kde v našem případě $\alpha = -b^2$, $\beta = -2b_0$ a $\gamma = 1$. Použijeme meze integrálu, kde r_m je dáno vztahem (**??**):

$$\chi(b,g) = 2\arcsin\left[\frac{b_0}{(b_0^2 + b^2)^{1/2}}\right]. \tag{5.51}$$

Tato rovnice se ekvivalentně dá přepsat jako

$$\tan(\frac{1}{2}\chi) = \frac{b_0}{b}. \tag{5.52}$$

- $\chi = \pi \Rightarrow b = 0$
- $\chi = \pi/2 \Rightarrow b = b_0$
- $\chi = 0 \Rightarrow b \rightarrow \infty$
- znaménko náboje částic stejné $\Rightarrow b_0$ a χ jsou kladné
- znaménko náboje částic různé $\Rightarrow b_0$ a χ jsou záporné

5.5 Účinný průřez

Zatím interakce pouze dvou částic ALE účinný průřez definován ve smyslu svazku totožných částic dopadajících na terč $\Rightarrow$ mějme svazek částic o hmotnosti m_1 rovnoměrně rozprostřených v prostoru dopadajících rychlostí $\mathbf{g} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}$ na částici m. Částice se záměrnou vzdáleností b se rozptylují pod úhlem χ, se vzdáleností $b+db$ pod úhlem $\chi + d\chi$. Počet částic rozptýlených za 1s do $\langle \chi, \chi + d\chi \rangle$ závisí na toku částic $\mathbf{\Gamma}$.

5.5.1 Diferenciální účinný průřez

Počet částic rozptýlených za jednotku času do prostorového úhlu $d\Omega$ vyjádřeného pomocí úhlů χ a ε:

$$\frac{dN}{dt} = \sigma(\chi, \varepsilon)\Gamma d\Omega, \tag{5.53}$$

kde $\sigma(\chi, \varepsilon)$ je *diferenciální účinný průřez* nebo *úhlová rozdělovací funkce*. Stejný počet částic dopadá před srážkou z oblasti dané intervaly $\langle b, b + db\rangle$ a $\langle \varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon\rangle$:

$$\frac{dN}{dt} = \Gamma b\, db\, d\varepsilon. \tag{5.54}$$

A tedy

$$\sigma(\chi, \varepsilon) d\Omega = b\, db\, d\varepsilon. \tag{5.55}$$

Protože $d\Omega = \sin\chi d\chi d\varepsilon$:

$$\sigma(\chi, \varepsilon) \sin\chi d\chi = b\, db \tag{5.56}$$

a dále

$$\sigma(\chi, \varepsilon) = \frac{b}{\sin\chi} \left|\frac{db}{d\chi}\right|. \tag{5.57}$$

Absolutní hodnota je použita, protože b klesá, když χ stoupá ALE dif. účinný průřez vyjadřuje kladnou veličinu - počet rozptýlených částic. Veličinu $db/d\chi$ vyjádříme ze vztahu (5.40), jestliže budeme znát $U(r)$. $\sigma(\chi, \varepsilon)$ má rozměr plochy.

5.5.2 Celkový účinný průřez rozptylu

σ_t je definován jako počet částic rozptýlený za jednotku času a jednotku toku částic do *všech směrů* od rozptylového centra:

$$\sigma_\mathrm{t} = \int_\Omega \sigma(\chi, \varepsilon) d\Omega = \int_0^{2\pi} d\varepsilon \int_0^\pi \sigma(\chi, \varepsilon) \sin\chi d\chi. \tag{5.58}$$

Účinný průřez samozřejmě závisí na relativní rychlosti g.

Ve speciálním případě, kdy je interakční poteciál *izotropní* (např. Coulombovský), máme

$$\sigma_\mathrm{t} = 2\pi \int_0^\pi \sigma(\chi) \sin\chi d\chi. \tag{5.59}$$

5.5.3 Účinný průřez pro přenos hybnosti

Účinný průřez lze definovat pro různé interakční procesy. Jeden z důležitých je přenos hybnosti:

$$\sigma_\mathrm{m} = \frac{\text{prenos hybnosti za sekundu}}{\text{dopadajici tok hybnosti}}, \tag{5.60}$$

kde hybnosti před srážkou je $\Gamma\mu g$. Po srážce je hybnost ve směru dopadu $\mu g \cos\chi$, takže přenesená hybnost je $\mu g(1 - \cos\chi)$. Celkový přenos hybnosti všemi dopadajícími částicemi

$$\Gamma\mu g \int_\Omega (1 - \cos\chi) \sigma(\chi, \epsilon) d\Omega, \tag{5.61}$$

a protože celkový tok hybnosti dopadajících částic je $\Gamma\mu g$

$$\sigma_m = \int_\Omega (1 - \cos\chi)\sigma(\chi, \epsilon) d\Omega. \tag{5.62}$$

V případě *izotropní* interakce a využitím $d\Omega = \sin\chi d\chi d\varepsilon$

$$\sigma_m = 2\pi \int_0^\pi (1 - \cos\chi)\sigma(\chi) \sin\chi d\chi. \tag{5.63}$$

Protože $\sigma(\chi)$ můžeme chápat jako úhlovou rozdělovací funkci lze ji brát jako váhovou funkci pro výpočet *střední hodnoty* jakékoliv funkce $F(\chi)$ závislé na úhlu rozptylu:

$$\langle F(\chi) \rangle = \frac{\int_\Omega F(\chi)\sigma(\chi) d\Omega}{\int_\Omega \sigma(\chi) d\Omega}, \tag{5.64}$$

což můžeme psát jako

$$\langle F(\chi) \rangle = \frac{2\pi}{\sigma_t} \int_0^\pi F(\chi)\sigma(\chi) \sin\chi d\chi \tag{5.65}$$

a podle definice střední hodnoty

$$\sigma_m = \sigma_t \langle 1 - \cos\chi \rangle. \tag{5.66}$$

5.6 Další srážkové parametry

Uvažujme tok $\Gamma = nv$ částic o hmotnosti m, hustotě n a konstantní rychlosti v dopadajících z jedné strany na terč složený z "nekonečně" hmotných částic o hustotě

n_g, které jsou v klidu. Pak $g \equiv v$. Nechť dn je počet dopadajících částic na jednotku objemu ve vzdálenosti x, které interagují s částicemi terče na vzdálenosti dx a jsou tedy odstraněny ze svazku dopadajících částic (proto znaménko mínus):

$$dn = -\sigma_\mathrm{t} n n_\mathrm{g} dx, \tag{5.67}$$

kde konstanta úměrnosti σ_t je celkový účinný průřez. Podobný vztah pro tok získáme vynásobením (5.67) rychlostí v

$$d\Gamma = -\sigma_\mathrm{t} \Gamma n_\mathrm{g} dx \tag{5.68}$$

neboli

$$\frac{d\Gamma}{\Gamma} = \frac{dn}{n} = -n_\mathrm{g}\sigma_\mathrm{t} dx \tag{5.69}$$

a po integraci

$$\Gamma(x) = \Gamma_0 \exp(-n_\mathrm{g}\sigma_\mathrm{t} x) = \Gamma_0 \exp(-x/\lambda), \tag{5.70}$$

kde

$$\lambda = \frac{1}{n_\mathrm{g}\sigma_\mathrm{t}} \tag{5.71}$$

je *střední volná dráha* úbytku částic v dopadajícím svazku. Střední doba mezi interakcemi je

$$\tau = \frac{\lambda}{v}. \tag{5.72}$$

Její převrácená hodnota je *interakční* neboli *srážková frekvence*

$$\nu \equiv \tau^{-1} = n_{\mathrm{g}} \sigma_{\mathrm{t}} v, \tag{5.73}$$

což je počet interakcí za jednu sekundu, které má dopadající částice, s částicemi terče. Můžeme také definovat srážkovou frekvenci na jednotku hustoty

$$K = \sigma_{\mathrm{t}} v, \tag{5.74}$$

což se nazývá *rychlostní konstanta*. Samozřejmě

$$\nu = K n_{\mathrm{g}}. \tag{5.75}$$

5.7 Účinné průřezy pro srážku tuhých koulí

5.7.1 Diferenciální účinný průřez pro rozptyl

Využijeme vztah (5.45) pro úhel rozptylu a $b \leq R_1 + R_2$

$$b = (R_1 + R_2) \cos(\frac{1}{2}\chi) \tag{5.76}$$

a tedy

$$|\frac{db}{d\chi}| = \frac{1}{2}(R_1 + R_2) \sin(\frac{1}{2}\chi). \tag{5.77}$$

Dosazením do vztahu (5.57)

$$\sigma = \frac{1}{4}(R_1 + R_2)^2 \tag{5.78}$$

5.7.2 Celkový účinný průřez pro rozptyl

$$\sigma_t = 2\pi \int_0^\pi \frac{1}{4}(R_1 + R_2)^2 \sin\chi d\chi = \pi(R_1 + R_2)^2 \tag{5.79}$$

Dva speciální případy: elektron s molekulou o poloměru R, $\sigma = R^2/4$ a $\sigma_\mathrm{t} = \pi R^2$; dvě stejné molekuly o průměru D, $\sigma = D^2/4$ a $\sigma_\mathrm{t} = \pi D^2$.

Uvědomme si, že pro srážku tuhých koulí existuje mezní hodnota b, nad kterou nedochází ke srážce. Právě toto způsobí, že celkový účinný průřez σ_t není nekonečná hodnota.

5.7.3 Účinný průřez pro přenos hybnosti

Ze vztahu (5.63) pro účinný průřez pro přenos hybnosti a ze vztahu (5.78)

$$\sigma_m = 2\pi \int_0^\pi \frac{1}{4}(R_1+R_2)^2(1-\cos\chi)\sin\chi d\chi = \frac{1}{2}\pi(R_1+R_2)^2\left(\int_0^\pi \sin\chi d\chi - \int_0^\pi \cos\chi \sin\chi d\chi\right). \tag{5.80}$$

Po integraci

$$\sigma_m = \pi(R_1 + R_2)^2 \tag{5.81}$$

Střední hodnota změny hybnosti na jednu částici je dána vztahem (5.65)

$$\langle \mu g(1-\cos\chi)\rangle = \frac{2\pi}{\sigma_t}\int_0^\pi \mu g(1-\cos\chi)\sigma(\chi)\sin\chi d\chi \tag{5.82}$$

a dle vztahu (5.63)

$$\langle \mu g(1-\cos\chi)\rangle = \mu g\frac{\sigma_m}{\sigma_t}, \tag{5.83}$$

což zjednodušíme za použití výrazů pro účinné průřezy (5.81) a (5.79)

$$\langle \mu g(1-\cos\chi)\rangle = \mu g \tag{5.84}$$

5.8 Účinné průřezy pro Coulombovský potenciál

5.8.1 Diferenciální účinný průřez

Derivací vztahu (5.52)

$$\left|\frac{db}{d\chi}\right| = \frac{b^2}{2b_0\cos^2(\chi/2)}, \tag{5.85}$$

takže diferenc. účinný průřez je

$$\sigma(\chi) = \frac{b^3}{2b_0\sin\chi\cos^2(\chi/2)} \tag{5.86}$$

nebo za použití $\tan \chi/2 = b_0/b$

$$\sigma(\chi) = \frac{b_0^2}{4\sin^4(\chi/2)}, \tag{5.87}$$

což je vztah pro *Rutherfordovský rozptyl*. Protože $2\sin^2(\chi/2) = (1 - cos\chi)$, máme

$$\sigma(\chi) = \frac{b_0^2}{(1 - \cos\chi)^2} \tag{5.88}$$

5.8.2 Celkový účinný průřez pro rozptyl

Protože dif. účinný průřez prudce roste pro $\chi \to 0$, bude celkový účinný průřez σ_t nekonečný. Ze vztahů (5.59) a (**??**)

$$\sigma_t = 2\pi \int_{\chi_{min}}^{\pi} \sigma(\chi) \sin\chi d\chi = 2\pi b_0^2 \int_{\chi_{min}}^{\pi} \frac{\sin\chi}{(1 - \cos\chi)^2} d\chi, \tag{5.89}$$

kde $\chi_\mathrm{min} = 0$. Integrováním

$$\sigma_t = \pi b_0^2 [\frac{1}{\sin^2(\chi_{min}/2)} - 1], \tag{5.90}$$

což jasně dává $\sigma_\mathrm{t} = \infty$ pro $\chi_\mathrm{min} = 0$. Příspěvek částic s velmi malými deflekčními úhly činí tedy celkový účinný průřez nekonečným.

5.8.3 Účinný průřez pro přenos hybnosti

Substitucí (**??**) do (5.63) dostáváme

$$\sigma_m = 2\pi \int_{\chi_{min}}^{\pi} (1 - \cos\chi)\sigma(\chi)\sin\chi d\chi = 2\pi b_0^2 \int_{\chi_{min}}^{\pi} \frac{\sin\chi}{(1-\cos\chi)} d\chi, \tag{5.91}$$

kde opět $\chi_{\mathrm{min}} = 0$ a integrací máme

$$\sigma_m = 4\pi b_0^2 \ln[\frac{1}{\sin^2(\chi_{min}/2)}], \tag{5.92}$$

což opět dává $\sigma_{\mathrm{m}} = \infty$ pro $\chi_{\mathrm{min}} = 0$.

5.9 Stínění Coulombovského potenciálu

Nekonečné hodnoty pro σ_{t} a σ_{m} pro Coulombovský potenciál jsou interpretovány jako chybějící mezní hodnota záměrné vzdálenosti b (malé $\chi \to$ velké b). Abychom tedy získali rozumné hodnoty σ_{t} a σ_{m} musíme nějak modifikovat naše úvahy a na základě rozumného důvodu zavést max. hodnotu záměrné vzdálenosti $b = b_c$.

Ze vztahu $\sigma(\chi, \varepsilon)d\Omega = b\,db\,d\varepsilon$ a definice celk. účinného průřezu (5.58):

$$\sigma_t = 2\pi \int_0^{b_c} b\; db, \tag{5.93}$$

kde jsem zavedli max. hodnotu $b = b_c$, takže

$$\sigma_t = \pi b_c^2. \tag{5.94}$$

Zavedení max. hodnoty $\Leftrightarrow$ nedochází k interakcím pro částice ve vzdálenostech $b > b_c$

Rozptyl pro úhly $\langle \pi/1, \pi rangle$, tj. $\langle 0, b_0 \rangle$ se obvykle nazývá *rozptyl pod velkými úhly* nebo *těsné srážky*. Pokud se budou brát v úvahu pouze těsné srážky, máme

$$\sigma_{t,\mathrm{velke}} = \pi b_0^2 \quad ; \quad (\pi/2 < \chi < \pi), \tag{5.95}$$

kde $b_0 = qq_1/(4\pi\varepsilon_0 \mu g^2)$.

Víme, že v případě nabitých částic v plazmatu dojde k jejich stínění oblakem částic s opačným znaménkem. Míra efektivnosti tohoto stínění je *Debyeova délka*:

$$\lambda_D = (\frac{\epsilon_0 kT}{n_0 e^2})^{\frac{1}{2}}. \tag{5.96}$$

Koule o poloměru λ_D je *Debyeova koule*. Vezmeme-li do úvahy toto stínění:

$$U(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qq_1}{r}\exp(-\frac{r}{\lambda_D}) \tag{5.97}$$

tedy pro $r \ll \lambda_D$ jde o potenciální energii velmi blízká Coulombovské, zatímco pro $r \gg \lambda_D$ je to téměř nula.

Výpočet σ_t za použití Debyovské potenciální energie je velmi komplikovaný a vyžaduje numerické řešení. Je ovšem možné použít alternativní zjednodušující přístup, který vede k dobrému souhlasu s řešením numerickým: Coulombovský potenciál pro $r < \lambda_D$ a nula pro $r > \lambda_D \Rightarrow b_c = \lambda_D$ - obecně totiž

$$\lambda_D \gg b_0. \tag{5.98}$$

Rozptyl pro $b_0 < b < \lambda_D$ vedoucí k $\chi < \pi/2$ se nazývá *rozptyl pod malými úhly* a jeho příspěvek k celk. účinnému průřezu je

$$\sigma_{t,\mathrm{male}} = 2\pi \int_{b_0}^{\lambda_D} b\, db = \pi(\lambda_D^2 - b_0^2) \quad ; \quad (\chi < \pi/2). \tag{5.99}$$

Porovnáme-li

$$\frac{\sigma_{t,\mathrm{male}}}{\sigma_{t,\mathrm{velke}}} = \frac{\lambda_D^2}{b_0^2} - 1 \simeq \frac{\lambda_D^2}{b_0^2}. \tag{5.100}$$

$\Rightarrow$ důležité jsou srážky způsobující rozptyl pod malými úhly $\Rightarrow$

$$\sigma_t = \pi\lambda_D^2 \tag{5.101}$$

Zavedeme max. hodnotu $b_c = \lambda_D$ i pro účinný průřez pro přenos hybnosti a ze vztahu (5.92) máme

$$\sigma_m = 2\pi b_0^2 \ln(1 + \frac{\lambda_D^2}{b_0^2}), \tag{5.102}$$

protože

$$\sin(\frac{1}{2}\chi_c) = (1 + \frac{b_c^2}{b_0^2})^{-1/2}. \tag{5.103}$$

Použijeme označení

$$\Lambda = \frac{\lambda_D}{b_0}, \tag{5.104}$$

přičemž $\Lambda \gg 1$, takže

$$\sigma_m = 4\pi b_0^2 \ln \Lambda \tag{5.105}$$

Funkce Λ se mění relativně pomalu, pro většinu laboratorních typů plazmatu je $\ln \Lambda = 10$–20. Abychom mohli vypočítat Λ uvažujme zjednodušeně:

- $q = -e$, $q_1 = e$
- n_0 hustota elektronů a iontů
- T teplota obou
- Maxwell. rozdělení pro oba typy částic, žádná driftová rychlost

$$\langle g^2 \rangle = \frac{1}{n_0^2} \int_v \int_{v_1} f_e f_{i1} (\mathbf{v_1} - \mathbf{v})^2 d^3v d^3v_1 = \frac{1}{n_0} \int_v f_e (\frac{3kT}{m_i} + v^2) d^3v = \frac{3kT}{\mu} \tag{5.106}$$

a tedy

$$b_0 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \mu \langle g^2 \rangle} = \frac{e^2}{12\pi\epsilon_0 kT} \tag{5.107}$$

tj.

$$\Lambda = \frac{12\pi\epsilon_0 kT}{e^2} \lambda_D = 12\pi n_0 \lambda_D^3 = 9N_D, \tag{5.108}$$

$\mathbf{T/n_2}$	10^3	10^6	10^9	10^{12}	10^{15}	10^{18}	10^{21}
10^2	12.8	9.43	5.97				
10^3	16.3	12.8	9.43	5.97			
10^4	19.7	16.3	12.8	9.43	5.97		
10^5	23.2	19.7	16.3	12.8	9.43	5.97	
10^6	26.3	22.8	19.3	15.9	12.4	8.96	5.54
10^7	28.5	25.1	21.6	18.1	14.7	11.2	7.85
10^8	30.9	27.4	24.0	20.5	17.0	13.6	10.1

kde N_D je počet částic v Debyově kouli.

Hodnoty parametru Λ pro teploty T v K a n_e v cm^{-3}:

Kapitola 6

Makroskopické transportní rovnice

6.1 Momenty Boltzmannovy rovnice

Pokud známe rozdělovací fci $\Rightarrow$ makroskopické veličiny jako hustota, střední rychlost, teplota apod. V termodynamické rovnováze $\Rightarrow$ Maxwell-Boltzmannova rozd. fce. V jiném případě musíme řešit komplikovanější BKR.
ALE rovnice pro časové a prostorové změny makroskopických proměnných mohou být odvozeny z BKR bez jejího řešení $\Rightarrow$ *makroskopické transportní rovnice*

Makroskopické veličiny souvisí s *momenty rozdělovací fce* a trasportní rovnice pro tyto proměnné získáme z *momentů Boltzmannovy rovnice*. První tři momenty: vynásobením rovnice výrazy m_α, $m_\alpha \mathbf{v}$ a $m_\alpha v^2/2$ a integrací přes rychlostní prostor $\Rightarrow$ zákon zach. hmotnosti, hybnosti a energie. Vždy se nám ale objeví nějaká neznámá makrskop. veličina navíc, takže abychom mohli soustavu vyřešit, musíme udělat nějaké vhodné předpoklady o nejvyšším momentu rozděl. fce.

Pro každý typ částic vlastní transportní rovnice.

Existuje mnoho možností vytvoření soustavy transportních rovnic podle zjednodušujících předpokladů, např. *model studeného* nebo *teplého plazmatu*.

6.2 Obecná transportní rovnice

Uvažujme fyzikální vlastnost částic v plazmatu $\chi(\mathbf{v})$ a vezměme obecnou BKR:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_\alpha + \mathbf{a} \cdot \nabla_v f_\alpha = \left(\frac{\delta f_\alpha}{\delta t}\right)_{\text{sraz}} \cdot \tag{6.1}$$

Každý člen BKR vynásobíme $\chi(\mathbf{v})$ a z analogie výpočtu střední hodnoty $\chi(\mathbf{v})$ uděláme totéž s celou BKR

$$\int_v \chi \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} d^3v + \int_v \chi \mathbf{v} \cdot \nabla f_\alpha d^3v + \int_v \chi \mathbf{a} \nabla_v f_\alpha d^3v = \int_v \chi \left(\frac{\delta f_\alpha}{\delta t}\right)_{\text{sraz}} d^3v \cdot \tag{6.2}$$

Dále upravíme každý člen rovnice zvlášť.

První člen:

$$\int_v \chi \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} d^3v = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_v \chi f_\alpha d^3v\right) - \int_v f_\alpha \frac{\partial \chi}{\partial t} d^3v \tag{6.3}$$

Poslední člen je nula a z definice střední hodnoty:

$$\int_v \chi \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} d^3v = \frac{\partial}{\partial t}(n_\alpha \langle \chi \rangle) \tag{6.4}$$

Druhý člen:

$$\int_v \chi \mathbf{v} \cdot \nabla f_\alpha d^3v = \nabla \cdot (\int_v \mathbf{v} \chi f_\alpha d^3v) - \int_v f_\alpha \mathbf{v} \nabla \chi d^3v - \int_v f_\alpha \chi \nabla \cdot \mathbf{v} d^3v \tag{6.5}$$

Člen $\nabla \cdot \mathbf{v}$ a $\nabla \chi$ jsou nula:

$$\int_v \chi \mathbf{v} \cdot \nabla v_\alpha d^3v = \nabla \cdot (n_\alpha \langle \chi \mathbf{v} \rangle_\alpha) \tag{6.6}$$

Třetí člen:

$$\int_v \chi \mathbf{a} \cdot \nabla_v f_\alpha d^3v = \int_v \nabla_v \cdot \mathbf{a} \chi f_\alpha d^3v - \int_v f_\alpha \mathbf{a} \cdot \nabla_v \chi d^3v - \int_v f_\alpha \chi \nabla_v \cdot \mathbf{a} d^3v \tag{6.7}$$

Poslední integrál vymizí pokud

$$\nabla_v \cdot \mathbf{a} = \frac{1}{m_\alpha} \nabla_v \cdot \mathbf{F} = 0, \tag{6.8}$$

složka vektoru síly F_i nezávisí na příslušné složce rychlosti v_i, kde $i = x, y\, z$. Toto omezení nevylučuje mg. sílu $\mathbf{F}_\alpha = q_\alpha \mathbf{v} \times \mathbf{B}$:

$$F_x = q_\alpha (v_y B_z - v_z B_y) \tag{6.9}$$

První integrál na pravé straně rovnice (**??**) je součtem tří trojných integrálů:

$$\int_v \nabla_v \cdot (\mathbf{a}\chi f_\alpha) d^3v = \sum_i \int\int\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial v_i}(a_i \chi f_\alpha) dv_x dv_y dv_z. \tag{6.10}$$

Pro každý z těchto tří integrálů ($i = x,\ y,\ z$) máme

$$\int\int\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial v_x}(a_x \chi f_\alpha) dv_x dv_y dv_z = \int\int_{-\infty}^{+\infty} dv_y dv_z (a_x \chi f_\alpha|_{-\infty}^{+\infty}) = 0, \tag{6.11}$$

protože $f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \to 0$ pro $v_i \to \pm\infty$. Protože první a poslední integrál vztahu (6.7) je roven nule, máme

$$\int_v \chi \mathbf{a} \cdot \nabla_v f_\alpha d^3v = -n_\alpha \langle \mathbf{a} \cdot \nabla_v \chi \rangle_\alpha \tag{6.12}$$

Kombinací předchozích výsledků dostáváme *obecnou transportní rovnici*

$$\frac{\partial}{\partial t}(n_\alpha \langle \chi \rangle_\alpha) + \nabla \cdot (n_\alpha \langle \chi \mathbf{v} \rangle_\alpha) - n_\alpha \langle \mathbf{a} \cdot \nabla_v \chi \rangle_\alpha = \left[\frac{\delta}{\delta t}(n_\alpha \langle \chi \rangle_\alpha)\right]_{\text{sraz}}, \tag{6.13}$$

kde člen na pravé straně označuje rychlost změny veličiny χ na jednotku objemu v důsledku srážek:

$$\left[\frac{\delta}{\delta t}(n_\alpha \langle \chi \rangle_\alpha)\right]_{\text{sraz}} = \int_v \chi \left(\frac{\delta f_\alpha}{\delta t}\right)_{\text{sraz}} d^3v \tag{6.14}$$

6.3 Zákon zachování hmotnosti

6.3.1 Odvození rovnice kontinuity z BKR

Rovnici (6.13) zde využijeme pro $\chi = m_\alpha$. Vyjádříme

$$\begin{aligned} \langle\chi\rangle_\alpha &= m_\alpha \\ \langle\chi\mathbf{v}\rangle_\alpha &= m_\alpha\langle\mathbf{v}\rangle_\alpha = m_\alpha\mathbf{u}_\alpha \\ \nabla_v\chi &= \nabla_v m_\alpha = 0 \end{aligned} \tag{6.15}$$

a dostaneme *rovnici kontinuity*

$$\frac{\partial\rho_{m\alpha}}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho_{m\alpha}\mathbf{u}_\alpha) = S_\alpha, \tag{6.16}$$

kde $\rho_{m\alpha} = n_\alpha m_\alpha$ a srážkový člen

$$S_\alpha = m_\alpha \int_v (\frac{\delta f_\alpha}{\delta t})_{coll} d^3v = \left(\frac{\delta\rho m_\alpha}{\delta t}\right)_{\text{sraz}} \tag{6.17}$$

vyjadřuje rychlost produkce nebo ztráty částic α na jednotku objemu v důsledku interakcí. Pokud k nim nedochází

$$\frac{\partial\rho_{m\alpha}}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho_{m\alpha}\mathbf{u}_\alpha) = 0 \tag{6.18}$$

neboli

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \nabla\cdot(n_\alpha\mathbf{u}_\alpha) = 0 \tag{6.19}$$

Rovnici *zákona zachování náboje* odtud dostaneme násobením nábojem q_α:

$$\frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_\alpha) = 0, \tag{6.20}$$

kde $\rho_\alpha = n_\alpha q_\alpha$ je hustota náboje a $\mathbf{J}_\alpha = \rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha$ je hustota el. proudu.

6.3.2 Odvození pomocí dynamiky tekutin

Uvažujme objem tekutiny V uzavřený plochou S s elementem plochy $d\mathbf{S} = \hat{\mathbf{n}} dS$. Střední počet částic opouštějící objem V skrz $d\mathbf{S}$ za jednotku času je

$$n_\alpha \mathbf{u}_\alpha \cdot d\mathbf{S} \tag{6.21}$$

$\Rightarrow$ počet částic opouštějící celý objem:

$$\oint_S n_\alpha \mathbf{u}_\alpha \cdot d\mathbf{S}. \tag{6.22}$$

Celkový počet částic v objemu:

$$\int_V n_\alpha d^3 r. \tag{6.23}$$

Pokud nedochází k produkci nebo ztrátě částic v objemu, musí platit

$$\oint_S n_\alpha \mathbf{u}_\alpha \cdot d\mathbf{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V n_\alpha d^3 r \tag{6.24}$$

a za použití Gaussova teorému divergence

$$\oint_S n_\alpha \mathbf{u}_\alpha \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla (n_\alpha \mathbf{u}_\alpha) d^3 r \tag{6.25}$$

dostaneme

$$\int_V \left[\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (n_\alpha \mathbf{u}_\alpha)\right] d^3r = 0, \tag{6.26}$$

což musí platit pro libovolný objem V, takže dostáváme rovnici kontinuity (6.19).

6.3.3 Srážkový člen

Procesy spojené se změnou počtu částic $\Rightarrow$ obvykle nepružné srážky (ionizace, rekombinace, zachycení náboje). Jak je můžeme reprezentovat v rci kontinuity:

- efekt *ionizace* - rychlostní koeficient pro ionizaci K_i, tj. počet párů elektron/iont produkovaných za jednotku času je $K_\mathrm{i} n_\mathrm{e} n_\mathrm{g}$, kde n_g je hustota neutrálního plynu. Ve slabě ionizovaném plazmatu je možné považovat n_g za konstantní a počet vzniklých párů zapsat pomocí srážkové frekvence $\nu_\mathrm{i} n_\mathrm{e}$
- efekt *rekombinace* - rychlostní koeficient pro rekombinaci K_r, tj. úbytek párů elektron/iont za jednotku času, za předpokl. jednoho druhu iontů ($n_\mathrm{i} = n_\mathrm{e}$) je $K_\mathrm{r} n_\mathrm{e}^2$
- efekt *záchytu záporného náboje* - rychlost úbytku elektronů $K_\mathrm{a} n_\mathrm{e} n_\mathrm{g}$ neboli podobně jako pro ionizaci $\nu_\mathrm{a} n_\mathrm{e}$

$\Longrightarrow$

$$S_\mathrm{e} = m_e(\nu_\mathrm{i} n_\mathrm{e} - K_\mathrm{r} n_\mathrm{e}^2 - \nu_\mathrm{a} n_\mathrm{e}) \tag{6.27}$$

6.4 Zákon zachování hybnosti

6.4.1 Odvození pohybové rovnice

Nahradíme $\chi(\mathbf{v})$ výrazem $m_\alpha \mathbf{v}$ v (6.13). Vezmeme-li v úvahu, že $\mathbf{v} = \mathbf{V}_\alpha + \mathbf{u}_\alpha$ a $\langle \mathbf{V}_\alpha \rangle = 0$, můžeme členy transportní rovnice upravit takto:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_{m\alpha}\langle \mathbf{v} \rangle_\alpha) = \rho_{m\alpha}\frac{\partial \mathbf{u}_\alpha}{\partial t} + \mathbf{u}_\alpha \frac{\partial \rho_{m\alpha}}{\partial t} \tag{6.28}$$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\rho_{m\alpha}\langle \mathbf{v}\mathbf{v} \rangle_\alpha) = \nabla \cdot [\rho_{m\alpha}(\mathbf{u}_\alpha \mathbf{u}_\alpha + \mathbf{u}_\alpha \langle \mathbf{V}_\alpha \rangle + \langle \mathbf{V}_\alpha \rangle \mathbf{u}_\alpha + \\ + \langle \mathbf{V}_\alpha \mathbf{V}_\alpha \rangle)] = \nabla \cdot (\rho_{m\alpha} \mathbf{u}_\alpha \mathbf{u}_\alpha + \rho m_\alpha \langle \mathbf{V}_\alpha \mathbf{V}_\alpha \rangle)\end{aligned} \tag{6.29}$$

$$\begin{aligned}-n_\alpha \langle \mathbf{F} \cdot \nabla_v \mathbf{v} \rangle_\alpha = -n_\alpha \langle (F_x \frac{\partial}{\partial v_x} + F_y \frac{\partial}{\partial v_y} + F_z \frac{\partial}{\partial v_z}) \mathbf{v} \rangle_\alpha = \\ -n_\alpha \langle F_x \vec{\mathbf{x}} + F_y \vec{\mathbf{y}} + F_z \vec{\mathbf{z}} \rangle_\alpha = -n_\alpha \langle \mathbf{F} \rangle_\alpha\end{aligned} \tag{6.30}$$

A dosadíme-li do (6.13), dostaneme rovnici zachování hybnosti

$$\rho_{m\alpha}\frac{\partial \mathbf{u}_\alpha}{\partial t} + \mathbf{u}_\alpha \frac{\partial \rho_{m\alpha}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_{m\alpha} \mathbf{u}_\alpha \mathbf{u}_\alpha) + \nabla \cdot (\rho_{m\alpha} \langle \mathbf{V}_\alpha \mathbf{V}_\alpha \rangle) - n_\alpha \langle \mathbf{F} \rangle_\alpha = \mathbf{A}_\alpha, \tag{6.31}$$

kde $\mathbf{A}_\alpha$ označuje srážkový člen

$$\mathbf{A}_\alpha = m_\alpha \int_v \mathbf{v}(\frac{\delta f_\alpha}{\delta t})_{\text{sraz}}\, d^3v = \left[\frac{\delta(\rho_{m\alpha}\mathbf{u}_\alpha)}{\delta t}\right]_{\text{sraz}} \tag{6.32}$$

Výraz $\rho_{m\alpha}\langle \mathbf{V}_\alpha \mathbf{V}_\alpha\rangle$ je *tenzor kinetického tlaku* $\mathcal{P}_\alpha$:

$$\nabla \cdot (\rho_{m\alpha}\langle \mathbf{V}_\alpha \mathbf{V}_\alpha\rangle) = \nabla \cdot \mathcal{P}_\alpha \tag{6.33}$$

Třetí člen na levé straně rovnice (6.31) můžeme rozepsat takto

$$\nabla \cdot (\rho_{m\alpha}\mathbf{u}_\alpha \mathbf{u}_\alpha) = \frac{\partial}{\partial x}(\rho_{m\alpha} u_{\alpha x}\mathbf{u}_\alpha) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho_{m\alpha} u_{\alpha y}\mathbf{u}_\alpha) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho_{m\alpha} u_{\alpha z} bf u_\alpha) \tag{6.34}$$

$$= \rho_{m\alpha}(u_{\alpha x}\frac{\partial \mathbf{u}_\alpha}{\partial x} + u_{\alpha y}\frac{\partial \mathbf{u}_\alpha}{\partial y} + u_{\alpha z}\frac{\partial \mathbf{u}_\alpha}{\partial z} + \mathbf{u}_\alpha[\frac{\partial(\rho_{m\alpha} u_{\alpha x})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_{m\alpha} u_{\alpha y})}{\partial y} + \frac{\partial(\rho_{m\alpha} u_{\alpha z})}{\partial z}] =$$

$$\rho_{m\alpha}(\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla)\mathbf{u}_\alpha + \mathbf{u}_\alpha[\nabla \cdot (\rho_{m\alpha}\mathbf{u}_\alpha)]$$

Dosazením (6.33) a (6.34) do (6.31) a za použití rovnice kontinuity (6.16) dostáváme

$$\rho_{m\alpha}[\frac{\partial \mathbf{u}_\alpha}{\partial t} + (\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla)\mathbf{u}_\alpha] + \nabla \cdot \mathcal{P}_\alpha - n_\alpha \langle \mathbf{F}\rangle_\alpha = \mathbf{A}_\alpha - \mathbf{u}_\alpha S_\alpha. \tag{6.35}$$

Člen v hranaté závorce můžeme zapsat pomocí totálního diferenciálu:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla, \tag{6.36}$$

což odpovídá časové změně pozorované ze souřadného systému pohybujícího se střední rychlostí $\mathbf{u}_\alpha$.

Jestliže uvažujeme elektromg. Lorentzovu sílu a gravitační sílu, je poslední člen rce (6.35)

$$-n_\alpha \langle \mathbf{F} \rangle_\alpha = -n_\alpha q_\alpha (\mathbf{E} + \mathbf{u}_\alpha \times \mathbf{B}) - n_\alpha m_\alpha \mathbf{g}, \tag{6.37}$$

kde pole $\mathbf{E}$ a $\mathbf{B}$ představují vyhlazené makroskopické pole. Pohybová rovnice je tedy

$$\rho_{m\alpha} \frac{D\mathbf{u}_\alpha}{Dt} = n_\alpha q_\alpha (\mathbf{E} + \mathbf{u}_\alpha \times \mathbf{B}) + \rho_{m\alpha} \mathbf{g} - \nabla \cdot \mathcal{P}_\alpha + \mathbf{A}_\alpha - \mathbf{u}_\alpha S_\alpha \tag{6.38}$$

Fyzikální význam: časová změna hybnosti v každém elementu kapaliny je způsobena externími silami, třením (viskozitou) a tlakovými silami samotné kapaliny a dále vnitřními silami, které odpovídají interakcím $\Rightarrow$ z.z. hybnosti

Často můžeme viskozitu zanedbat, tj. neuvažujeme nediagonální členy $\mathcal{P}_\alpha$. Pokud je navíc rozdělovací funkce izotropní, jsou diagonální členy $\mathcal{P}_\alpha$ stejné a rovné skalárnímu kinetickému tlaku p_α. Zanedbáme-li dále člen vedoucí k tvorbě nebo zániku částic, máme

$$\rho_{m\alpha} \frac{D\mathbf{u}_\alpha}{Dt} = n_\alpha q_\alpha (\mathbf{E} + \mathbf{u}_\alpha \times \mathbf{B}) + \rho_{m\alpha} \mathbf{g} - \nabla p_\alpha + \mathbf{A}_\alpha \tag{6.39}$$

6.4.2 Srážkový člen

Člen $\mathbf{A}_\alpha$ označuje rychlost změny střední hodnoty hybnosti na jednotku objemu způsobenou srážkami. Důsledek zachování celkové hybnosti při elastických srážkách stejných částic $\Rightarrow$ $\mathbf{A}_\alpha = \mathbf{0}$. ALE pro kapalinu složenou z různých částic $\mathbf{A}_\alpha \neq \mathbf{0}$.

Často používaný vztah pro přenos hybnosti srážkami (nemusí platit vždy, předp. Maxwell. r. fce a relatině malý rozdíl středních rychlostí částic):

$$\mathbf{A}_\alpha = -\rho_{m\alpha} \sum_\beta \nu_{\alpha\beta}(\mathbf{u}_\alpha - \mathbf{u}_\beta), \tag{6.40}$$

kde konstanta úměrnosti $\nu_{\alpha\beta}$ je *srážková frekvence pro přenos hybnosti* mezi částicemi α a β. Protože během srážky se musí zachovávat celková hybnost

$$\rho_{m\alpha}\nu_{\alpha\beta}(\mathbf{u}_\alpha - \mathbf{u}_\beta) + \rho_{m\beta}\nu_{\beta\alpha}(\mathbf{u}_\beta - \mathbf{u}_\alpha) = 0. \tag{6.41}$$

$\Rightarrow$

$$\rho_{m\alpha}\nu_{\alpha\beta} = \rho_{m\beta}\nu_{\beta\alpha} \tag{6.42}$$

6.5 Zákon zachování energie

6.5.1 Odvození rovnice pro transport energie

Nahradíme $\chi(\mathbf{v})$ výrazem $m_\alpha v^2/2$ v (6.13). Platí

$$n_\alpha \langle \chi \rangle_\alpha = \frac{1}{2}\rho_{m\alpha}\langle V_\alpha^2 \rangle + \frac{1}{2}\rho_{m\alpha}u_\alpha^2 = \frac{1}{2}(3p_\alpha + \rho_{m\alpha}u_\alpha^2) \tag{6.43}$$

$$\nabla_v \chi = \frac{1}{2}m_\alpha \nabla_v(\mathbf{v}.\mathbf{v}) = m_\alpha(\mathbf{v}\cdot\nabla_v)\mathbf{v} = m_\alpha \mathbf{v} \tag{6.44}$$

Členy na pravé straně obecné transportní rovnice (6.13) jsou tedy

$$\frac{\partial}{\partial t}(n_\alpha\langle\chi\rangle_\alpha) = \frac{3}{2}\frac{\partial p_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{2}\rho_{m\alpha}u_\alpha^2) \tag{6.45}$$

$$\nabla\cdot(n_\alpha\langle\chi\mathbf{v}\rangle_\alpha) = \nabla\cdot[\frac{1}{2}\rho_{m\alpha}\langle(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})\mathbf{v}\rangle_\alpha] \tag{6.46}$$

$$-n_\alpha\langle(\mathbf{F}/m_\alpha)\cdot\nabla_v\chi\rangle_\alpha = -n_\alpha\langle\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}\rangle_\alpha \tag{6.47}$$

Součtem těchto členů získáme *rovnici zachování energie*

$$\frac{3}{2}\frac{\partial p_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{2}\rho_{m\alpha}u_\alpha^2) + \nabla\cdot[\frac{1}{2}\rho_{m\alpha}\langle(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})\mathbf{v}\rangle_\alpha] - n_\alpha\langle\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}\rangle_\alpha = \mathbf{M}_\alpha, \tag{6.48}$$

kde M_α je rychlost změny hustoty energie v důsledku srážek

$$M_\alpha = \frac{1}{2} m_\alpha \int_v v^2 (\frac{\delta f_\alpha}{\delta t})_{\text{sraz}} \, d^3 v = \left[\frac{\delta(\frac{1}{2}\rho_{m\alpha}\langle v^2 \rangle_\alpha)}{\delta t} \right]_{\text{sraz}} \tag{6.49}$$

Alternativně se může rovnice také zapsat jinak, viz dále. Vezměme nejprve třetí člen (6.48) a $\mathbf{v} = \mathbf{V}_\alpha + \mathbf{u}_\alpha$:

$$\begin{aligned} \langle [(\mathbf{u}_\alpha + \mathbf{V}_\alpha) \cdot (\mathbf{u}_\alpha + \mathbf{V}_\alpha)](\mathbf{u}_\alpha + \mathbf{V}_\alpha) \rangle = \\ = \langle (u_\alpha^2 + 2\mathbf{u}_\alpha \cdot \mathbf{V}_\alpha + V_\alpha^2)(\mathbf{u}_\alpha + \mathbf{V}_\alpha) \rangle = \\ = u_\alpha^2 \mathbf{u}_\alpha + \langle V_\alpha^2 \rangle \mathbf{u}_\alpha + 2\langle \mathbf{V}_\alpha \mathbf{V}_\alpha \rangle \cdot \mathbf{u}_\alpha + \langle V_\alpha^2 \mathbf{V}_\alpha \rangle. \end{aligned} \tag{6.50}$$

Člen $\rho_{m\alpha}\langle \mathbf{V}_\alpha \otimes \mathbf{V}_\alpha \rangle$ představuje *tenzor kinetického tlaku* $\mathcal{P}_\alpha$ a $\frac{1}{2}\rho_{m\alpha}\langle V_\alpha^2 \mathbf{V}_\alpha \rangle$ je *vektor toku tepla* $\mathbf{q}_\alpha$. Ukázali jsme, že $\frac{1}{2}\rho_{m\alpha}\langle V_\alpha^2 \rangle = 3p_\alpha/2$. Proto

$$\begin{aligned} \nabla \cdot [\frac{1}{2}\rho_{m\alpha}\langle (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v} \rangle_\alpha] = \\ \nabla \cdot [\frac{1}{2}\rho_{m\alpha} u_\alpha^2 \mathbf{u}_\alpha + \frac{1}{2}(3p_\alpha)\mathbf{u}_\alpha + P_\alpha \cdot \mathbf{u}_\alpha + \mathbf{q}_\alpha] = \\ \nabla \cdot (\frac{1}{2}\rho_{m\alpha} u_\alpha^2 \mathbf{u}_\alpha) + \\ \frac{1}{2}(3p_\alpha)(\nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha) + \frac{1}{2}(\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla)(3p_\alpha) + \nabla \cdot (P_\alpha \cdot \mathbf{u}_\alpha) + \nabla \cdot \mathbf{q}_\alpha \end{aligned} \tag{6.51}$$

Dosazením do (6.48) a za použití označení D/Dt pro úplný diferenciál, máme

$$\frac{D}{Dt}(\frac{3p_\alpha}{2}) + (\frac{3p_\alpha}{2})\nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha + \frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{2}\rho_{m\alpha}u_\alpha^2) + \nabla \cdot (\frac{1}{2}\rho_{m\alpha}u_\alpha^2\mathbf{u}_\alpha) + \\ \nabla \cdot (P_\alpha \cdot \mathbf{u}_\alpha) + \nabla \cdot \mathbf{q}_\alpha - n_\alpha\langle \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}\rangle_\alpha = M_\alpha \tag{6.52}$$

Třetí a čtvrtý člen na levé straně můžeme psát jako

$$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{2}\rho_{m\alpha}\mathbf{u}_\alpha \cdot \mathbf{u}_\alpha) + \nabla \cdot [(\frac{1}{2}\rho_{m\alpha}(\mathbf{u}_\alpha \cdot \mathbf{u}_\alpha)\mathbf{u}_\alpha] = \tag{6.53}$$

$$\frac{1}{2}u_\alpha^2\frac{\partial\rho_{m\alpha}}{\partial t} + \rho_{m\alpha}\mathbf{u}_{alpha} \cdot \frac{\partial\mathbf{u}_\alpha}{\partial t} + \frac{1}{2}u_\alpha^2\nabla \cdot (\rho_{m\alpha}\mathbf{u}_\alpha + \rho_{m\alpha}\mathbf{u}_\alpha \cdot [(\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla)\mathbf{u}_\alpha] = \\ \frac{1}{2}u_\alpha^2[\frac{\partial\rho_{m\alpha}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_{m\alpha}\mathbf{u}_\alpha)] + \rho_{m\alpha}\mathbf{u}_\alpha \cdot \frac{D\mathbf{u}_\alpha}{Dt}$$

Za použití rovnice kontinuity (6.16) a pohybové rovnice (6.36) můžeme poslední vztah přepsat jako

$$\frac{1}{2}u_\alpha^2S_\alpha + n_\alpha\mathbf{u}_\alpha \cdot \langle\mathbf{F}\rangle_\alpha - \mathbf{u}_\alpha \cdot (\nabla \cdot \mathcal{P}_\alpha) + \mathbf{u}_\alpha \cdot \mathbf{A}_\alpha - \mathbf{u}_\alpha^\mathbf{2}\mathbf{S}_\alpha. \tag{6.54}$$

Dosazením zpět do (6.52)

$$\begin{aligned}\frac{D}{Dt}(\frac{3p_\alpha}{2}) + \frac{3p_\alpha}{2}\nabla\cdot\mathbf{u}_\alpha + \nabla\cdot(P_\alpha\cdot\mathbf{u}_\alpha) - \mathbf{u}_\alpha\cdot(\nabla\cdot\mathcal{P}_\alpha) - \\ n_\alpha\langle\mathbf{F}\cdot\mathbf{v})_\alpha\rangle + n_\alpha\mathbf{u}_\alpha\cdot\langle\mathbf{F}\rangle_\alpha + \nabla\cdot\mathbf{q}_\alpha = \\ = M_\alpha - \mathbf{u}_\alpha\cdot\mathbf{A}_\alpha + \frac{1}{2}u_\alpha^2 S_\alpha.\end{aligned} \tag{6.55}$$

Třetí a čtvrtý člen můžeme kombinovat jako

$$\nabla\cdot(\mathcal{P}_\alpha\cdot\mathbf{u}_\alpha) - \mathbf{u}_\alpha\cdot(\nabla\cdot\mathcal{P}_\alpha) = (\mathcal{P}_\alpha\cdot\nabla)\cdot\mathbf{u}_\alpha \tag{6.56}$$

a podobně pátý a šestý:

$$-n_\alpha\langle\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}\rangle_\alpha + n_\alpha\mathbf{u}_\alpha\cdot\langle\mathbf{F}\rangle_\alpha = -n_\alpha\langle\mathbf{F}\cdot\mathbf{V}_\alpha\rangle, \tag{6.57}$$

protože

$$\langle\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}\rangle_\alpha = \langle\mathbf{F}\cdot(\mathbf{u}_\alpha + \mathbf{V}_\alpha)\rangle = \langle\mathbf{F}\rangle_\alpha\cdot\mathbf{u}_\alpha + \langle\mathbf{F}\cdot\mathbf{V}_\alpha\rangle. \tag{6.58}$$

V případě síly nezávislé na rychlosti je výraz (6.57) roven nule:

$$\langle\mathbf{F}\cdot\mathbf{V}_\alpha\rangle = \mathbf{F}\cdot\langle\mathbf{V}_\alpha\rangle = 0 \tag{6.59}$$

V případě mg. síly zjistíme totéž:

$$\begin{aligned}\langle\mathbf{F}\cdot\mathbf{V}_\alpha\rangle = q_\alpha\langle(\mathbf{v}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{V}_\alpha\rangle = \\ = q_\alpha(\mathbf{u}_\alpha\times\mathbf{B})\cdot\langle V_\alpha\rangle + q_\alpha\langle(\mathbf{V}_\alpha\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{V}_\alpha\rangle = 0,\end{aligned} \tag{6.60}$$

kde oba členy jsou rovny nule, protože $\langle \mathbf{V}_\alpha \rangle = \mathbf{0}$ a $(\mathbf{V}_\alpha \times \mathbf{B})$ je kolmé na $\mathbf{V}_\alpha$. Dostáváme tedy tu *alternativní formu* rovnice *zachování energie*

$$\frac{D}{Dt}(\frac{3p_\alpha}{2}) + \frac{3p_\alpha}{2}\nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha + (P_\alpha \cdot \nabla) \cdot \mathbf{u}_\alpha + \nabla \cdot q_\alpha = \tag{6.61}$$
$$= M_\alpha - \mathbf{u}_\alpha - \mathbf{A}_\alpha + \frac{1}{2}u_\alpha^2 S_\alpha$$

6.5.2 Fyzikální interpretace

- První člen - celková změna hustoty tepelné energie v objemovém elementu pohybujícím se driftovou rychlostí $\mathbf{u}_\alpha$ $(3p_\alpha/2 = \rho_{m\alpha}\langle V_\alpha^2 \rangle/2)$.
- Druhý člen (6.61) - změna hustoty tep. energie díky vstupu částic o střední rychlosti $\mathbf{u}_\alpha$ do objemového elementu.
- Třetí člen - práce vykonaná na jednotkovém objemu díky tenzoru tlaku, který působí na povrch tohoto objemu
- Čtvrtý člen - změna hustoty tepelné energie díky srážkám (pro pouze jeden druh částic je člen roven nule)

První dva členy můžeme ještě zkombinovat pomocí rce kontinuity (6.16), kde rozepíšeme člen $\nabla \cdot (\rho_{m\alpha}\mathbf{u}_\alpha)$

$$(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla)\rho_{m\alpha} + \rho_{m\alpha}\nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha = S_\alpha, \tag{6.62}$$

takže

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha = -\frac{1}{\rho_{m\alpha}}(\frac{D\rho_{m\alpha}}{Dt} - S_\alpha). \tag{6.63}$$

Dosazením (6.63) do (6.61) a použitím rovností $\rho_{m\alpha} = n_\alpha m_\alpha$, $p_\alpha = n_\alpha k T_\alpha$, dostaneme další alternativní tvar rovnice energie vyjádřené pomocí teploty T_α

$$\frac{3}{2}n_\alpha k\frac{DT_\alpha}{Dt} + (P_\alpha \cdot \nabla) \cdot \mathbf{u}_\alpha + \nabla \cdot q_\alpha = M_\alpha - \mathbf{u}_\alpha.\mathbf{A}_\alpha + (\frac{1}{2}u_\alpha^2 - \frac{3}{2}\frac{kT_\alpha}{m_\alpha})S_\alpha \tag{6.64}$$

6.5.3 Zjednodušující předpoklady

Podle okolností můžeme uplatnit různé zjednodušující předpoklady

- srážkový člen je nula nebo zanedbatelný; driftová rychlost $\mathbf{u}_\alpha$ je nula; vezmeme vektoru toku tepla

$$\mathbf{q}_\alpha = -K\nabla T_\alpha \tag{6.65}$$

  $\Rightarrow$ rce (6.64) se redukuje na *difuzní* rovnici pro T_α

$$\frac{3}{2}n_\alpha k\frac{DT_\alpha}{Dt} = \nabla \cdot (K\nabla T_\alpha), \tag{6.66}$$

kde K je koeficient tepelné vodivosti (souvisí s koeficientem viskozity)

- srážkový člen je nula nebo zanedbatelný; neviskózní kapalina; tenzor tlaku se redukuje na skalární tlak; neuvažujeme tepelnou vodivost ($\mathbf{q}_\alpha = 0$); vztah (6.61) $\Rightarrow$

$$\frac{D}{Dt}(\frac{3p_\alpha}{2}) + \frac{3p_\alpha}{2}(\nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha) + p_\alpha(\nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha) = 0. \tag{6.67}$$

Dosazením (6.63) za $\nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha$ pro $S_\alpha = 0$ dává

$$\frac{D}{Dt}(\frac{3p_\alpha}{2}) - \frac{5p_\alpha}{2\rho_{m\alpha}} \frac{D\rho_{m\alpha}}{Dt} = 0 \tag{6.68}$$

tedy

$$\frac{Dp_\alpha}{p_\alpha} = \frac{5}{3} \frac{D\rho_{m\alpha}}{Dt} = 0 \tag{6.69}$$

a po integraci

$$\frac{p_\alpha}{p_0} = (\frac{\rho_{m\alpha}}{\rho_{m0}})^{\frac{5}{3}}, \tag{6.70}$$

kde p_0 a ρ_{m0} jsou konstanty, takže

$$p_\alpha \rho_{m\alpha}^{-5/3} = \text{ konst.} \tag{6.71}$$

Toto je *adiabatická rovnice energie* pro plyn, v němž je specifické teplo při konst. tlaku a konst. objemu $\gamma = 5/3$.

Parametr γ fcí počtu stupňů volnosti N

$$\gamma = (2 + N)/N. \tag{6.72}$$

Pro částice, které nemají vnitřní stupně volnosti (jednoatomový plyn), je $N = 3$. *Adiabatická rovnice energie* používaná v termodynamice je obecně ve tvaru

$$p\rho_m^{-\gamma} = \text{ konst.} \tag{6.73}$$

Derivováním

$$\rho_m^{-\gamma} dp - \gamma p \rho_m^{-(\gamma+1)}\, d\rho_m = 0 \tag{6.74}$$

nebo

$$dp = (\frac{\gamma p}{\rho_m})\, d\rho_m = V_s^2\, d\rho_m, \tag{6.75}$$

kde jsme definovali $\mathcal{P}_\alpha$

$$V_s = (\gamma p/\rho_m)^{1/2} = (\gamma kT/m)^{1/2}, \tag{6.76}$$

což je *adiabatická rychlost zvuku* kapaliny.

- ideální plyn; konstantní teplota kapalin $\Rightarrow$ *izotermální rovnice energie*. Vezmeme stavovou rovnici pro ideální plyn $p = nkT$ a pro $T =$ konst

$$dp = kT\, dn = (p/\rho_m)\, d\rho_m = V_T^2\, d\rho_m, \tag{6.77}$$

kde *izotermální rychlost zvuku* je

$$V_T = (p/\rho_m)^{1/2} = (kT/m)^{1/2} \tag{6.78}$$

6.5.4 Model studeného plazmatu

- 1. moment BKR $\Rightarrow$ *rce kontinuity* $\Rightarrow$ hustota částic n_α (nebo hustota hmotnosti ρ_α) ve vztahu s driftovou rychlostí $\mathbf{u}_\alpha$ $\Rightarrow$ 2 makroskopické veličiny $\Rightarrow$ potřebujeme 2 makroskopické transportní rce
- 2. moment BKR $\Rightarrow$ *pohybová rce* (rce zachování hybnosti) $\Rightarrow$ driftová rychlost $\mathbf{u}_\alpha$ ve vztahu s hustotou částic n_α a tenzorem kinetického tlaku $\mathcal{P}_\alpha$ $\Rightarrow$ 3 makroskopické veličiny $\Rightarrow$ potřebujeme 3 makroskopické transportní rce
- 3. moment BKR $\Rightarrow$ *rce energie* $\Rightarrow$ neznámé veličiny n_α, $\mathbf{u}_\alpha$, $\mathcal{P}_\alpha$ a vektoru toku tepla $\mathbf{q}_\alpha$

$\Longrightarrow$ Žádný konečný systém transportních rovnic nemůže tvořit uzavřený systém, takže musíme zavést nějaké aproximace. Nejjednodušší model je *model studeného plazmatu*. Model používá pouze rovnici kontinuity a hybnosti. Tenzor tlaku se položí roven nule, tj. zanedbává se vliv tepelného pohybu částic a síla způsobená změnou tlaku. Máme tedy dvě transportní rce:

$$\frac{\partial \rho_{m\alpha}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_{m\alpha}\mathbf{u}_\alpha) = S_\alpha \tag{6.79}$$

$$\rho_{m\alpha}\frac{D\mathbf{u}_\alpha}{Dt} = n_\alpha q_\alpha(\mathbf{E} + \mathbf{u}_\alpha \times \mathbf{B}) + \rho_{m\alpha}\mathbf{g} + \mathbf{A}_\alpha - \mathbf{u}_\alpha S_\alpha \tag{6.80}$$

Pokud můžeme navíc zanedbat vznik a ztrátu částic $\alpha \Rightarrow S_\alpha = 0$. Vztah používaný pro srážkový člen pro přenos hybnosti $\mathbf{A}_\alpha$ je dán vztahem (6.40).

Model vlastně předpokládá, že teplota plazmatu je nulová, takže rozdělovací fce je *Diracova delta fce* $f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \delta|\mathbf{v} - \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)|$.

6.5.5 Model teplého plazmatu

Zde se uvažují tři transportní rovnice a ve třetí rci se zanedbává člen s vektorem toku tepla $\nabla \cdot \mathbf{q}_\alpha = 0$. Tato aproximace se nazývá *adiabatická aproximace*. Protože tepelná vodivost je nula, není plazma viskózní a nediagonální členy tenzoru tlaku jsou nula. Dále s předpokládá, že $\nabla \cdot \mathcal{P}_\alpha = \nabla \cdot p_\alpha$.
V *modelu teplého plazmatu* tedy máme tyto tři transportní rce

$$\frac{\partial \rho_{m\alpha}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_{m\alpha}\mathbf{u}_\alpha) = S_\alpha \tag{6.81}$$

$$\rho_{m\alpha}\frac{D\mathbf{u}_\alpha}{Dt} = n_\alpha q_\alpha(\mathbf{E} + \mathbf{u}_\alpha \times \mathbf{B}) + \rho_{m\alpha}\mathbf{g} - \nabla P_\alpha + \mathbf{A}_\alpha - \mathbf{u}_\alpha S_\alpha \tag{6.82}$$

$$\frac{D}{Dt}(\frac{3p_\alpha}{2}) + \frac{5p_\alpha}{2}(\nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha) = M_\alpha - \mathbf{u}_\alpha - \mathbf{A}_\alpha + \frac{1}{2}u_\alpha^2 S_\alpha. \tag{6.83}$$

Pokud navíc předpokládáme, že změna energie v důsledku srážek je zanedbatelná, redukuje se rovnice (6.83) na *adiabatickou rovnici*

$$p_\alpha \rho_{m\alpha}^{-\gamma} = \text{konst.} \tag{6.84}$$

Kapitola 7

Makroskopické rovnice pro vodivou kapalinu

7.1 Makroskopické proměnné pro plazma jako vodivou kapalinu

Uvažujme plazma jako *celek* a *celkové* makroskopické veličiny. Hustota hmotnosti:

$$\rho_m = \sum_\alpha \rho_{m\alpha} = \sum_\alpha n_\alpha m_\alpha, \tag{7.1}$$

hustota náboje:

$$\rho = \sum_\alpha n_\alpha q_\alpha, \tag{7.2}$$

střední rychlost kapaliny $\mathbf{u}$:

$$\rho_m \mathbf{u} = \sum_\alpha \rho_{m\alpha} \mathbf{u}_\alpha. \tag{7.3}$$

Střední rychlost každého typu částic uvažovaná vzhledem k celkové střední rychlosti plazmatu $\mathbf{u}$ je *difuzní rychlost* $\mathbf{w}_\alpha$

$$\mathbf{w}_\alpha = \mathbf{u}_\alpha - \mathbf{u} = \mathbf{u}_\alpha - \frac{1}{\rho_m} \sum_\alpha \rho_{m\alpha} \mathbf{u}_\alpha \tag{7.4}$$

Hustota toku hmotnosti neboli hmotnostní tok

$$\mathbf{J_m} = \sum_\alpha n_\alpha m_\alpha \mathbf{u}_\alpha = \rho_m \mathbf{u} \tag{7.5}$$

a hustota el. proudu neboli tok náboje

$$\mathbf{J} = \sum_\alpha n_\alpha q_\alpha \mathbf{u}_\alpha = (7.27) \rho \mathbf{u} + \sum_\alpha n_\alpha q_\alpha \mathbf{w}_\alpha \tag{7.6}$$

Tenzor kinetického tlaku jednotlivých komponent plazmatu jsme definovali jako

$$\mathcal{P}_\alpha = \rho_{m\alpha} \langle \mathbf{V}_\alpha \mathbf{V}_\alpha \rangle, \tag{7.7}$$

kde $\mathbf{V}_\alpha = \mathbf{v} - \mathbf{u}_\alpha$ je náhodná rychlost. Jde vlastně o přenos hybnosti částicemi skrze povrchový element pohybující se driftovou rychlostí. Pro celé plazma definujeme alternativní náhodnou rychlost $\mathbf{V}_{\alpha\mathbf{0}}$ pro částice α vzhledem k celkové střední rychlosti plazmatu $\mathbf{u}$

$$\mathbf{V}_{\alpha\mathbf{0}} = \mathbf{v} - \mathbf{u}. \tag{7.8}$$

Celkový tlak je tedy definován jako rychlost přenosu hybnosti všemi částicemi plazmatu skrze element povrchu pohybující se celkovou střední rychlostí $\mathbf{u}$. Tenzor celkového kineticého tlaku $\mathcal{P}$ je tedy

$$\mathcal{P} = \sum_\alpha \rho_{m\alpha} \langle \mathbf{V}_{\alpha\mathbf{0}} \mathbf{V}_{\alpha\mathbf{0}} \rangle. \tag{7.9}$$

Platí

$$\mathbf{V}_{\alpha\mathbf{0}} = \mathbf{V}_\alpha + \mathbf{w}_\alpha \tag{7.10}$$

a tedy

$$\mathcal{P} = \sum_\alpha \rho_{m\alpha} \langle (\mathbf{V}_\alpha + \mathbf{w}_\alpha)(\mathbf{V}_\alpha + \mathbf{w}_\alpha) \rangle, \tag{7.11}$$

což roznásobíme jako

$$\mathcal{P} = \sum_\alpha \rho_{m\alpha} (\langle \mathbf{V}_\alpha \mathbf{V}_\alpha \rangle + \langle \mathbf{V}_\alpha \mathbf{w}_\alpha \rangle + \langle \mathbf{w}_\alpha \mathbf{V}_\alpha \rangle + \langle \mathbf{w}_\alpha \mathbf{w}_\alpha \rangle). \tag{7.12}$$

Z definice $\mathbf{w}_\alpha$ vidíme, že $\langle \mathbf{w}_\alpha \rangle = \mathbf{w}_\alpha$, a proto

$$\mathcal{P} = \sum_\alpha \mathcal{P}_\alpha + \sum_\alpha \rho_{m\alpha} \mathbf{w}_\alpha \mathbf{w}_\alpha. \tag{7.13}$$

Celkový skalární kinetický tlak p je

$$p = \frac{1}{3} \sum_i P_{ii} = \frac{1}{3} \sum_i \sum_\alpha \rho_{m\alpha} \langle V_{\alpha 0 i} V_{\alpha 0 i} \rangle = \frac{1}{3} \sum_\alpha \rho_{m\alpha} \langle V_{\alpha 0}^2 \rangle \tag{7.14}$$

Pomocí (7.13)

$$p = \sum_\alpha p_\alpha + \frac{1}{3} \sum_\alpha \rho_{m\alpha} w_\alpha^2 \tag{7.15}$$

Definujeme vektor celkového toku tepla (7.27)$\mathbf{q}$

$$\mathbf{q} = \frac{1}{2} \sum_\alpha \rho_{m\alpha} \langle c_{\alpha 0}^2 \mathbf{V}_{\alpha \mathbf{0}} \rangle \tag{7.16}$$

a hustotu tepelné energie

$$\frac{3p}{2} = \frac{1}{2} \sum_\alpha \rho_{m\alpha} \langle V_{\alpha 0}^2 \rangle \tag{7.17}$$

Je užitečné najít vztah mezi

$$\mathbf{q}_\alpha = \frac{1}{2}\rho_{m\alpha}\langle V_\alpha^2 \mathbf{V}_\alpha \rangle \tag{7.18}$$

a $\mathbf{q}$. Takže pomocí $\mathbf{V}_{\alpha\mathbf{0}} = \mathbf{V}_\alpha + \mathbf{w}_\alpha$ dostaneme

$$\begin{aligned}\mathbf{q} = \frac{1}{2}\sum_\alpha \rho_{m\alpha}[\langle V_\alpha^2 \mathbf{V}_\alpha\rangle + w_\alpha^2\langle \mathbf{V}_\alpha\rangle + 2\langle(\mathbf{w}_\alpha \cdot \mathbf{V}_\alpha)\mathbf{V}_\alpha\rangle + \\ +\langle V_\alpha^2\rangle \mathbf{w}_\alpha + w_\alpha^2 \mathbf{w}_\alpha + 2(\langle \mathbf{V}_\alpha\rangle \cdot \mathbf{w}_\alpha)\mathbf{w}_\alpha],\end{aligned} \tag{7.19}$$

přičemž $\langle \mathbf{V}_\alpha \rangle = \mathbf{0}$, takže

$$\mathbf{q} = \frac{1}{2}\sum_\alpha \rho_{m\alpha}[\langle V_\alpha^2 \mathbf{V}_\alpha\rangle + 2\mathbf{w}_\alpha \cdot \langle \mathbf{V}_\alpha)\mathbf{V}_\alpha\rangle + \langle V_\alpha^2\rangle \mathbf{w}_\alpha + w_\alpha^2 \mathbf{w}_\alpha] \tag{7.20}$$

Ze vztahu (7.18), (7.7) a $p_\alpha = \rho_{m\alpha}\langle V_\alpha^2\rangle/3$ přepíšeme předchozí vztah jako

$$\mathbf{q} = \sum_\alpha (\mathbf{q}_\alpha + \mathbf{w}_\alpha \cdot \mathcal{P}_\alpha + \frac{3}{2}p_\alpha \mathbf{w}_\alpha + \frac{1}{2}\rho_{m\alpha} w_\alpha^2 \mathbf{w}_\alpha). \tag{7.21}$$

Pro izotropní případ

$$\mathbf{q} = \sum_\alpha (\mathbf{q}_\alpha + \frac{5}{2}p_\alpha \mathbf{w}_\alpha + \frac{1}{2}\rho_{m\alpha} w_\alpha^2 \mathbf{w}_\alpha). \tag{7.22}$$

7.2 Rovnice kontinuity

Rovnici kontinuity pro jednotlivé částice sumujeme

$$\sum_\alpha \frac{\partial \rho_{m\alpha}}{\partial t} + \sum_\alpha \nabla \cdot (\rho_{m\alpha} \mathbf{u}_\alpha) = \sum_\alpha S_\alpha, \tag{7.23}$$

což dává

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{u}) = 0, \tag{7.24}$$

neboť suma S_alpha je nula díky zachování celkové hmostnosti v systému. Rovnici můžeme také přepsat pomocí $D/Dt = \partial/\partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla$ jako

$$\frac{D\rho_m}{Dt} + \rho_m \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{7.25}$$

7.3 Pohybová rovnice

Podobně postupuje i v případě rovnice z.z. hybnosti:

$$\sum_\alpha \rho_{m\alpha}[\frac{\partial \mathbf{u}_\alpha}{\partial t} + (\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla)\mathbf{u}_\alpha] = \sum_\alpha n_\alpha q_\alpha \mathbf{E} + \sum_\alpha n_\alpha q_\alpha (\mathbf{u}_\alpha \times \mathbf{B}) + \\ + \sum \alpha \rho_{m\alpha} \mathbf{g} - \sum_\alpha \nabla \cdot \mathcal{P}_\alpha + \sum_\alpha \mathbf{A}_\alpha - \sum_\alpha \mathbf{u}_\alpha S_\alpha \tag{7.26}$$

Protože celk. hybnost všech částic se zachovává je srážk. člen nula.

$$\sum_\alpha \rho_{m\alpha}[\frac{\partial \mathbf{u}_\alpha}{\partial t} + (\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla)\mathbf{u}_\alpha] = \rho\mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \rho_m \mathbf{g} - \nabla \cdot \mathcal{P} + \\ + \sum_\alpha \nabla \cdot (\rho_{m\alpha}\mathbf{w}_\alpha \mathbf{w}_\alpha) - \sum_\alpha \mathbf{u}_\alpha S_\alpha \tag{7.27}$$

Člen obsahující S_α můžeme eliminovat pomocí rovnice kontinuity. Zapíšeme rovnost

$$\sum_\alpha \mathbf{u}_\alpha S_\alpha = \sum_\alpha \mathbf{u}_\alpha[\frac{\partial \rho_{m\alpha}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_{m\alpha}\mathbf{u}_\alpha)], \tag{7.28}$$

což kombinujeme se členy na levé straně rovnice (7.27) a členem $\Sigma_\alpha \mathbf{u}_\alpha S_\alpha$ na její pravé straně. Dostáváme výraz

$$\sum_\alpha [\frac{\partial(\rho_{m\alpha}\mathbf{u}_\alpha)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_{m\alpha}\mathbf{u}_\alpha\mathbf{u}_\alpha)], \tag{7.29}$$

kde využijeme vztah pro celkovou střední rychlost (7.3), druh7 4len expandujeme nahrazením $\mathbf{u}_\alpha = \mathbf{w}_\alpha + \mathbf{u}$. Vidíme, že

$$\sum_\alpha \rho_{m\alpha}\mathbf{w}_\alpha = \sum_\alpha \rho_{m\alpha}(\mathbf{u}_\alpha - \mathbf{u}) = \rho_m\mathbf{u} - \rho_m\mathbf{u} = 0. \tag{7.30}$$

Vztah (7.29) upravíme tedy jako

$$\sum_\alpha [\frac{\partial(\rho_{m\alpha}\mathbf{u}_\alpha)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_{m\alpha}\mathbf{u}_\alpha\mathbf{u}_\alpha)] = \frac{\partial(\rho_m\mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m\mathbf{u}\mathbf{u}) + \tag{7.31}$$

$$+\sum_\alpha \nabla\cdot(\rho_{m\alpha}\mathbf{w}_\alpha\mathbf{w}_\alpha) = \rho_m[\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}] + \mathbf{u}[\frac{\partial\rho_m}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho_m\mathbf{u})] +$$

$$+\sum_\alpha \nabla\cdot(\rho_{m\alpha}\mathbf{w}_\alpha\mathbf{w}_\alpha) = \rho_m\frac{D\mathbf{u}}{Dt} + \sum_\alpha \nabla\cdot(\rho_{m\alpha}\mathbf{w}_\alpha\mathbf{w}_\alpha),$$

kde jsme využili rci kontinuity. Potom pohybová rovnice je

$$\rho_m\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \rho\mathbf{E} + \mathbf{J}\times\mathbf{B} + \rho_m\mathbf{g} - \nabla\cdot\mathcal{P}. \tag{7.32}$$

7.4 Rovnice energie

Opět sumujeme rovnici energie pro jednotlivé typy částic:

$$\sum_\alpha \frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{2}\rho_{m\alpha}\langle v^2\rangle_\alpha) + \sum_\alpha \nabla\cdot(\frac{1}{2}\rho_{m\alpha}\langle v^2\mathbf{v}\rangle_\alpha) - \sum_\alpha n_\alpha\langle\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}\rangle_\alpha = 0, \tag{7.33}$$

kde srážkový člen M_α sumovaný přes všechny částice je nula. Nahradíme $\mathbf{v} = \mathbf{V}_{\alpha 0} + \mathbf{u}$ a expandujeme každý člen rovnice. Pro *první člen* máme

$$\frac{\partial}{\partial t}(\sum_\alpha \frac{1}{2}\rho_{m\alpha}\langle\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\rangle_\alpha) = \frac{\partial}{\partial t}[\sum_\alpha \frac{1}{2}\rho_{m\alpha}(\langle V_{\alpha 0}^2\rangle + u^2 + 2\mathbf{w}_\alpha\cdot\mathbf{u})] \tag{7.34}$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}(\sum_\alpha \frac{1}{2}\rho_{m\alpha}(\langle V_{\alpha 0}^2\rangle) + \frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{2}\rho_{m\alpha}u^2) = \frac{\partial}{\partial t}(\frac{3p}{2}) + \frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{2}\rho_m u^2),$$

kde jsme použili vztah (7.17) a fakt, že $\sum_\alpha \rho_{m\alpha}\mathbf{w}_\alpha = 0$
Před úpravou *druhého členu* si uvědomíme, že

$$\begin{aligned}\langle v^2\mathbf{v}\rangle_\alpha &= \langle (V_{\alpha 0}^2 + u^2 + 2\mathbf{V}_{\alpha 0}\cdot\mathbf{u})\rangle \\ = \langle V_{\alpha 0}^2\mathbf{V}_{\alpha)}\rangle &+ u^2\mathbf{w}_\alpha + 2\langle \mathbf{V}_{\alpha\mathbf{0}}\mathbf{V}_{\alpha\mathbf{0}}\rangle\cdot\mathbf{u} + \\ &\langle V_{\alpha 0}^2\rangle\mathbf{u} + u^2\mathbf{u} + 2(\mathbf{w}_\alpha\cdot\mathbf{u})\mathbf{u},\end{aligned} \tag{7.35}$$

protože $\mathbf{V}_{\alpha 0} = \mathbf{V}_\alpha + \mathbf{w}_\alpha$ a $\langle \mathbf{V}_\alpha\rangle = 0$. Proto

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\sum_\alpha \frac{1}{2}\rho_{m\alpha}\langle v^2\mathbf{v}\rangle_\alpha) &= \nabla\cdot(\sum_\alpha \frac{1}{2}\rho_{m\alpha}\langle V_{\alpha 0}^2\mathbf{V}_{\alpha\mathbf{0}}\rangle) + \\ +\nabla\cdot(\sum_\alpha \rho_{m\alpha}\langle \mathbf{V}_{\alpha\mathbf{0}}\mathbf{V}_{\alpha\mathbf{0}}\rangle\cdot\mathbf{u}) &+ \nabla\cdot(\sum_\alpha \frac{1}{2}\rho_{m\alpha}\langle V_{\alpha 0}^2\rangle\mathbf{u}) + \\ &\nabla\cdot(\sum_\alpha \frac{1}{2}\rho_{m\alpha}u^2\mathbf{u})\end{aligned} \tag{7.36}$$

Když použijeme definici celkového toku tepla $\mathbf{q}$ a tenzoru celkového kinetického tlaku $\mathcal{P}$, můžeme toto dále upravit jako

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\sum_\alpha \frac{1}{2}\rho_{m\alpha}\langle v^2\mathbf{v}\rangle_\alpha) &= \nabla\cdot\mathbf{q} + \nabla\cdot(\mathcal{P}\cdot\mathbf{u}+) \\ &+\nabla.(\frac{3p}{2}\mathbf{u}) + \nabla.(\frac{1}{2}\rho_{m\alpha}u^2\mathbf{u})\end{aligned} \tag{7.37}$$

Pro *třetí člen* máme

$$\sum_\alpha n_\alpha \langle \mathbf{F}\cdot\mathbf{v}\rangle_\alpha = \sum_\alpha n_\alpha [q_\alpha \langle \mathbf{E}\cdot\mathbf{v}\rangle_\alpha + q_\alpha\rangle(\mathbf{v}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{v}\rangle_\alpha + m_\alpha\langle \mathbf{g}\cdot\mathbf{v}\rangle_\alpha], \tag{7.38}$$

kde jsme uvažovali elmag sílu a sílu gravitační. Protože $\langle \mathbf{v}_\alpha\rangle = \mathbf{u}_\alpha$ a pro lib. vektor $\mathbf{v}$ platí $(\mathbf{v}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{v} = 0$, máme

$$\sum_\alpha n_\alpha \langle \mathbf{F}\cdot\mathbf{v}\rangle_\alpha = \mathbf{J}\cdot\mathbf{E} + \mathbf{J_m}\cdot\mathbf{g}, \tag{7.39}$$

kde $\mathbf{E}$ a $\mathbf{g}$ jsou vystředovaná makroskopická pole.
Kombinováním předchozích výsledků dostaneme

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}(\frac{3p}{2}) + \nabla\cdot(\frac{3p}{2}\mathbf{u}) + \frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{2}\rho_m u^2) + \nabla\cdot(\frac{1}{2}\rho_m u^2\mathbf{u}) + \\ \nabla\cdot\mathbf{q} + \nabla\cdot(\mathcal{P}\cdot\mathbf{u}) - \mathbf{J}\cdot\mathbf{E} - \mathbf{J_m}\cdot\mathbf{g} = 0.\end{gathered} \tag{7.40}$$

Třetí a čtvrtý člen zkombinujeme jako

$$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{2}\rho_m u^2) + \nabla\cdot(\frac{1}{2}\rho_m u^2\mathbf{u}) = \frac{1}{2}u^2[\frac{\partial\rho_m}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho_m\mathbf{u})] + \mathbf{u}\cdot(\rho_m\frac{D\mathbf{u}}{Dt}), \tag{7.41}$$

což dále upravíme za použití rce kontinuity a pohybové rovnice:

$$\rho\mathbf{u}\cdot\mathbf{E} + \mathbf{u}\cdot(\mathbf{J}\times\mathbf{B}) + \mathbf{J_m}\cdot\mathbf{g} - \mathbf{u}\cdot(\nabla\cdot\mathcal{P}). \tag{7.42}$$

Tento výsledek použijeme opět v rci energie a dostaneme tvar

$$\frac{D}{Dt}(\frac{3p}{2}) + \frac{3p}{2}\nabla\cdot\mathbf{u} + \nabla\cdot\mathbf{q} + (\mathcal{P}\cdot\nabla)\cdot\mathbf{u} = \mathbf{J}\cdot\mathbf{E} - \mathbf{u}.(\mathbf{J}\times\mathbf{B}) - \rho\mathbf{u}\cdot\mathbf{E}. \tag{7.43}$$

- 1. člen - časová změna celk. hustoty tepelné energie vzhledem k referenčnímu systému pohybujícím se celkovou střední rychlostí $\mathbf{u}$
- 2. člen - přispívá ke změně celk. hustoty tepelné energie díky přenosu tepelné energie v objem. elementu v důsledku pohybu částic
- 3. člen - tok tepla
- 4. člen - práce vykonaná na objem. elementu tlakovými silami (normálovými i tečnými)
- členy na pravé straně - práce vykonaná na objem. elementu el. silami existujícími v referenčním systému pohybujícím se celkovou střední rychlostí $\mathbf{u}$. Tyto členy mohou být dále zkombinovány (viz níže).

Před další úpravou si uvědomme, že hustota el. proudu se skládá ze dvou částí

$$\mathbf{J} = \sum_\alpha n_\alpha q_\alpha \mathbf{u}_\alpha = \sum_\alpha n_\alpha q_\alpha \mathbf{w}_\alpha + \sum_\alpha n_\alpha q_\alpha \mathbf{u} = \mathbf{J}' + \rho\mathbf{u}, \tag{7.44}$$

kde $\rho\mathbf{u}$ je hustota el. proudu *konvekční*, tj. tok prostorového náboje s rychlostí $\mathbf{u}$ a $\mathbf{J}'$ je hustota el. proudu *vodivostní*, tj. hustota el. proudu v systému pohybujícím se rychlostí $\mathbf{u}$. Na druhé straně můžeme psát

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) = -\mathbf{J} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) = -\mathbf{J}' \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{B}). \tag{7.45}$$

Dosazením obou horních výrazů do rce energie dostaneme

$$\frac{D}{Dt}(\frac{3p}{2}) + \frac{3p}{2}\nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot \mathbf{q} + (\mathcal{P} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{J}' \cdot \mathbf{E}', \tag{7.46}$$

kde $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}$ je el. pole existující v souř. systému pohybujícím se rychlostí $\mathbf{u}$. Člen $\mathbf{J}' \cdot \mathbf{E}'$ představuje tedy rychlost změny hustoty energie díky Joulovskému ohřevu.

7.5 Elektrodynamické rovnice pro vodivou kapalinu

Makroskopické transportní rovnice pro vodivou kapalinu netvoří uzavřený systém (podobně jako u transportních rovnic pro jednotlivé typy částic). Navíc obsahují elektrodynamické veličiny $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{J}$ a $\rho \Rightarrow$ kromě hydrodynamických transportních rovnic potřebujeme elektrodynamické rovnice.

7.5.1 Maxwellovské rovnice rotace

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{7.47}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}) \tag{7.48}$$

7.5.2 Zákon zachování el. náboje

získáme z rovnice kontinuity pro jednotlivé typy částic vynásobení rovnice výrazem q_α/m_α a sumací přes všechny částice:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\sum_\alpha n_\alpha q_\alpha) + \nabla \cdot (\sum_\alpha n_\alpha q_\alpha \mathbf{u}_\alpha) = \sum_\alpha (\frac{q_\alpha}{m_\alpha}) S_\alpha, \tag{7.49}$$

z čehož

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \tag{7.50}$$

Musíme si uvědomit, že tato rovnice se dá odvodit i z Maxwell. rce (7.47) a z Maxwell. rovnice pro divergenci $\mathbf{E}$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \tag{7.51}$$

Vezmeme divergenci (7.48)

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{E}) = 0, \tag{7.52}$$

zkombinujeme s (7.51) a dostáváme (7.50). $\Rightarrow$ rovnice (7.51) tedy není nezávislá na rovnici (7.50).

Dále si uvědomíme, že uděláme-li divergenci vztahu (7.47), dostaneme

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{B}) = 0 \tag{7.53}$$

neboli

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = konst. \tag{7.54}$$

Takže Maxwellova rovnice

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{7.55}$$

je vlastně počáteční podmínkou rovnice (7.47).

7.5.3 Zobecněný Ohmův zákon

Postupujeme stejně jako u zákona zach. el. náboje - vezmeme pohybovou rovnici (zákon zach. hybnosti) pro jednotlivé typy částic, vynásobíme q_α/m_α a sumujeme přes všechny částice:

$$\sum_\alpha n_\alpha q_\alpha (\frac{\partial \mathbf{u}_\alpha}{\partial t}) + \sum_\alpha n_\alpha q_\alpha (\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla)\mathbf{u}_\alpha = \sum_\alpha n_\alpha (\frac{q_\alpha}{m_\alpha})\langle \mathbf{F} \rangle_\alpha - \tag{7.56}$$

$$-\nabla \cdot [\sum_\alpha (\frac{q_\alpha}{m_\alpha})\mathcal{P}_\alpha] + \sum_\alpha (\frac{q_\alpha}{m_\alpha})\mathbf{A}_\alpha - \sum_\alpha (\frac{q_\alpha}{m_\alpha})\mathbf{u}_\alpha S_\alpha \tag{7.57}$$

Úprava *druhého členu na pravé straně* rovnice (7.56):
Definujeme *tenzor elektrokinetického tlaku* $\mathcal{P}_\alpha^E$ pro částice α

$$\mathcal{P}_\alpha^E = (\frac{q_\alpha}{m_\alpha})\mathcal{P}_\alpha = n_\alpha q_\alpha \langle \mathbf{V}_\alpha \mathbf{V}_\alpha \rangle \tag{7.58}$$

a pro plazma jako vodivou kapalinu máme analogicky

$$\mathcal{P}^E = \sum_\alpha \mathcal{P}_\alpha^E + \sum_\alpha n_\alpha q_\alpha \mathbf{w}_\alpha \mathbf{w}_\alpha. \tag{7.59}$$

Tedy

$$-\nabla \cdot [\sum_\alpha (\frac{q_\alpha}{m_\alpha})\mathcal{P}_\alpha] = -\nabla \cdot \mathcal{P}^E + \nabla \cdot (\sum_\alpha n_\alpha q_\alpha \mathbf{w}_\alpha \mathbf{w}_\alpha) \tag{7.60}$$

Úprava *čtvrtého členu na pravé straně* rovnice (7.56):
Použijeme rovnici kontinuity a $\mathbf{u}_\alpha = \mathbf{w}_\alpha + \mathbf{u}$

$$-\sum_\alpha (\frac{q_\alpha}{m_\alpha})\mathbf{u}_\alpha S_\alpha = -\sum_\alpha \mathbf{w}_\alpha \frac{\partial}{\partial t}(n_\alpha q_\alpha) - \sum_\alpha \mathbf{w}_\alpha[\nabla \cdot (n_\alpha q_\alpha \mathbf{w}_\alpha)] - \tag{7.61}$$

$$-\sum_\alpha \mathbf{w}_\alpha[\nabla \cdot (n_\alpha q_\alpha \mathbf{u})] - \mathbf{u}\frac{\partial \rho}{\partial t} - \mathbf{u}(\nabla \cdot \mathbf{J}) \tag{7.62}$$

Podobně *první a druhý členu na levé straně* rovnice (7.56) upravíme jako:

$$\sum_\alpha n_\alpha q_\alpha \frac{\partial \mathbf{w}_\alpha}{\partial} + \sum_\alpha (n_\alpha q_\alpha \mathbf{w}_\alpha \cdot \nabla)\mathbf{w}_\alpha + \sum_\alpha (n_\alpha q_\alpha \mathbf{u} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{w}_\alpha + \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{J}.\nabla)\mathbf{u} \tag{7.63}$$

Zjednodušení *celé rovnice* (7.56):
Použijeme následující vztah pro dva vektory:

$$\nabla \cdot (\mathbf{ab}) = \mathbf{b}(\nabla \cdot \mathbf{a}) + (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b}, \tag{7.64}$$

využijeme vyjádření hustoty el. proudu (7.44) a předchozí zjednodušené výrazy:

$$\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{uJ}' + \mathbf{Ju}) + \nabla \cdot \mathcal{P}_E = \sum_\alpha n_\alpha (\frac{q_\alpha}{m_\alpha})\langle \mathbf{F} \rangle_\alpha + \sum_\alpha (\frac{q_\alpha}{m_\alpha})\mathbf{A}_\alpha. \tag{7.65}$$

Rovnice (7.47), (7.48), (7.50) a (7.65) tvoří soustavu deseti rovnic, které doplňují rovnici zachování hmotnosti, hybnosi a energie pro vodivou kapalinu.

Rovnice (7.65) je ale stále v obecném, pro praxi nepoužitelném tvaru. Jednoduchý a používaný tvar této rovnice můžeme získat pro plně ionizované plazma s jedním druhem iontů:
Vyjádříme hustotu el. proudu a náboje jako

$$\mathbf{J} = \sum_{\alpha} n_{\alpha} q_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha} = e(n_i \mathbf{u_i} - n_e \mathbf{u_e}) \tag{7.66}$$

$$\rho = \sum_{\alpha} n_{\alpha} q_{\alpha} = e(n_i - n_e). \tag{7.67}$$

Globální střední rychlost je

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\rho_m}(\rho_{me}\mathbf{u_e} + \rho_{mi}\mathbf{u_i}, \tag{7.68}$$

kde $\rho_m = \rho_{me} + \rho_{mi}$. Zkombinováním této rovnice s (7.66) dává

$$\mathbf{u_i} = \frac{\mu}{\rho_{mi}}(\frac{\rho_m \mathbf{u}}{m_e} + \frac{\mathbf{J}}{e}) \tag{7.69}$$

$$\mathbf{u_e} = \frac{\mu}{\rho_{me}}(\frac{\rho_m \mathbf{u}}{m_i} + \frac{\mathbf{J}}{e}), \tag{7.70}$$

kde $\mu = m_e m_i/(m_{emi})$ označuje redukovanou hmotnost.
Dále předpokládáme, že střední rychlosti elektronů a iontů vztažené ke globální střední rychlosti $\mathbf{u}$, tj. difuzní rychlosti $\mathbf{w}_e$ a $\mathbf{w}_i$, jsou malé ve srovnání s tepelnými.

Pak zjednodušíme vztah (7.59) takto

$$\mathcal{P}^E = \mathcal{P}_i^E + \mathcal{P}_e^E = e(\frac{\mathcal{P}_i}{m_i} - \frac{\mathcal{P}_e}{m_e}) \tag{7.71}$$

Silový člen v rovnici (7.65) nahradíme elekromagnetickým polem

$$\sum_\alpha n_\alpha(\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\langle\mathbf{F}\rangle_\alpha = \sum_\alpha n_\alpha(\frac{q_\alpha}{m_\alpha})[q_\alpha(\mathbf{E} + \mathbf{u}_\alpha \times \mathbf{B})] = \tag{7.72}$$

$$= e^2(\frac{n_i}{m_i} + \frac{n_e}{m_e})\mathbf{E} + e^2(\frac{n_i}{m_i}\mathbf{u_i} + \frac{n_e}{m_e}\mathbf{u_e}) \times \mathbf{B}.$$

V něm nahradíme $\mathbf{u}_e$ a $\mathbf{u}_i$ ze vztahů (7.70) a (7.69) a zjednodušíme

$$\sum_\alpha n_\alpha(\frac{q_\alpha}{m_\alpha})\langle\mathbf{F}\rangle_\alpha = e^2(\frac{n_i}{m_i} + \frac{n_e}{m_e})\mathbf{E} + e^2(\frac{n_i}{m_e} + \frac{n_e}{m_i})\mathbf{u} \times \mathbf{B} + e(\frac{1}{m_i} - \frac{1}{m_e})\mathbf{J} \times \mathbf{B}. \tag{7.73}$$

Tento vztah dále zjednodušíme za použití následujících aproximací ($m_i \gg m_e$, $n_e = n_i = n$):

$$\frac{1}{m_i} - \frac{1}{m_e} \simeq -\frac{1}{m_e} \tag{7.74}$$

$$\frac{n_i}{m_i} + \frac{n_e}{m_e} \simeq \frac{n}{m_e} \tag{7.75}$$

$$\frac{n_i}{m_e} + \frac{n_e}{m_i} \simeq \frac{n}{m_e}, \tag{7.76}$$

takže máme $\mathcal{P}^E = -(e/m_e)\mathcal{P}_e$ a z (7.73)

$$\sum_\alpha n_\alpha(\frac{q_\alpha}{m_\alpha})\langle\mathbf{F}\rangle_\alpha = \frac{ne^2}{m_e}(\mathbf{E}+\mathbf{u}\times\mathbf{B}) - \frac{e}{m_e}\mathbf{J}\times\mathbf{B} \tag{7.77}$$

Srážkový člen v (7.65) napíšeme ve dříve uvedeném tvaru

$$A_e = -\rho_{me}\nu_{ei}(\mathbf{u_e}-\mathbf{u_i}) \tag{7.78}$$
$$A_i = -\rho_{mi}\nu_{ie}(\mathbf{u_i}-\mathbf{u_e}), \tag{7.79}$$

přičemž platí $\rho_{mi}\nu_{ie} = \rho_{me}\nu_{ei}$, takže

$$\sum_\alpha(\frac{q_\alpha}{m_\alpha})\mathbf{A}_\alpha = e\rho_{me}\nu_{ei}(\mathbf{u_e}-\mathbf{u_i})(\frac{1}{m_i}+\frac{1}{m_e}) = -\nu_{ei}\mathbf{J}, \tag{7.80}$$

kde jsem použili (7.66) pro $\mathbf{J}$, $n_e = n_i = n$ a aproximaci $m_i \gg m_e$.
Nyní můžeme použít výsledky z (7.71), (7.77) a (7.80) a dosadit je do (7.65)

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathbf{J}}{\partial t} + \nabla\cdot(\mathbf{u}\mathbf{J}'+\mathbf{J}\mathbf{U}) - \frac{e}{m_e}\nabla\cdot\mathcal{P} = \\ = \frac{ne^2}{m_e}(\mathbf{E}+\mathbf{u}\times\mathbf{B}) - \frac{e}{m_e}\mathbf{J}\times\mathbf{B} - \nu_{ei}\mathbf{J}.\end{aligned} \tag{7.81}$$

Protože jsme předpokládali $n_e = n_i$, musí $\rho = 0$ a $\mathbf{J} = \mathbf{J}'$. V určitých situacích se dá předpokládat, že $\mathbf{J}$ a $\mathbf{u}$ jsou malé perturbace, a proto je jejich součin zanedbatelný.

Dále zavedeme označení

$$\sigma_0 = \frac{ne^2}{m_e \nu_{ei}}, \tag{7.82}$$

což představuje *podélnou el. vodivost*. Pak dostáváme z (7.81)

$$\frac{m_e}{ne^2}\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} - \frac{1}{ne}\nabla \cdot \mathcal{P}_e = \mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} - \frac{1}{ne}\mathbf{J} \times \mathbf{B} - \frac{1}{\sigma_0}\mathbf{J}. \tag{7.83}$$

Tato rovnice se nazývá *zobecněný Ohmův zákon*. V magnetohydrodynamice se obvykle členy na levé straně zanedbávají, což ovšem není vždy dost dobře zdůvodnitelné. Pokud se $\mathbf{J}$ nemění v čase, tj. za ustálených podmínek, máme $\partial \mathbf{J}/\partial t = 0$. Pokud dále předpokládáme, že jsou zanedbatelné prostorové změny tlaku, tj. $\nabla \cdot \mathcal{P}_e = 0$, pak dostáváme zjednodušení

$$\mathbf{J} = \sigma_0(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \frac{\sigma_0}{ne}\mathbf{J} \times \mathbf{B}. \tag{7.84}$$

Poslední člen v této rovnici vyjadřuje *Hallův jev*. Tento člen je malý pokud $\sigma_0|\mathbf{B}| \ll ne$. Pak

$$\mathbf{J} = \sigma_0(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \tag{7.85}$$

a bez přítomnosti mg. pole

$$\mathbf{J} = \sigma_0\mathbf{E}, \tag{7.86}$$

což je obecně známý *Ohmův zákon*.

7.6 Zjednodušené magnetohydrodynamické rovnice

Rovnice kontinuity, zjednodušená pohybová rovnice, adiabatická rovnice energie, Maxwellovy rovnice pro el. intenzitu a mg. indukci (zde zenadbáváme čas. změnu el. intenzity) a zjednodušený Ohmův zákon:

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{u}) = 0 \tag{7.87}$$

$$\rho_m \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla p \tag{7.88}$$

$$dp = V_s^2 d\rho_m \tag{7.89}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{7.90}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \tag{7.91}$$

$$\mathbf{J} = \sigma_0(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \frac{\sigma_0}{ne} \mathbf{J} \times \mathbf{B} \tag{7.92}$$

Kapitola 8

Vodivost plazmatu a difuze

8.1 Langevin rovnice

Předtím než budeme diskutovat dva důležité jevy v plazmatu, vodivost a difuzi, uvedeme si velmi jednoduchou pohybovou rovnici pro slabě ionizované ($n_e \ll n_g$) studené plazma - *Langevinovu rovnici*. Předpokládáme, že co se týče interakcí, bude dominantní interakce nabitých částic s neutrály. Dále uvažujeme pouze el. a mg. sílu (zanedbáváme gravitační pole a sílu způsobené gradienty tlaku). Dříve uvedená pohybová rovnice

$$\rho_{m\alpha}\frac{D\mathbf{u}_\alpha}{Dt} = n_\alpha q_\alpha(\mathbf{E} + \mathbf{u}_\alpha \times \mathbf{B}) + \rho_{m\alpha}\mathbf{g} - \nabla p_\alpha + \mathbf{A}_\alpha \tag{8.1}$$

se tedy zjednodušuje jako

$$m_e\frac{D\mathbf{u_e}}{Dt} = -e(\mathbf{E} + \mathbf{u_e} \times \mathbf{B}) + \frac{\mathbf{A_e}}{\mathbf{n_e}}.(8.2)$$

Makroskopický srážkový člen $\mathbf{A}_e/n_e$ můžeme vyjádřit

$$\frac{\mathbf{A}_e}{n_e} = -\nu_c m_e \mathbf{u_e}, \tag{8.3}$$

kde ν_c je srážková frekvence pro přenos hybnosti mezi elektrony a těžkými neutrálními částicemi. V tomto vztahu jsme zanedbali střední rychlosti neutrálních částic, protože tyto částice jsou mnohem hmotnější než elektrony (ALE nezanedbáváme jejich tepelnou rychlost). Dosadíme srážkový člen a dostáváme *Langevinovu rovnici*

$$m_e \frac{D\mathbf{u_e}}{Dt} = -e(\mathbf{E} + \mathbf{u_e} \times \mathbf{B}) - \nu_c m_e \mathbf{u_e} \tag{8.4}$$

Fyzikální smysl srážkového členu? Pokud nepůsobí el. a mg. síla

$$\frac{D\mathbf{u_e}}{Dt} = -\nu_c \mathbf{u_e}, \tag{8.5}$$

což můžeme vyřešit

$$\mathbf{u_e}(t) = \mathbf{u_e}(0) exp(-\nu_c t). \tag{8.6}$$

Tedy srážky elektronů s neutrály snižují střední rychlost elektronů exponencielně rychlostí odpovídající srážkové frekvenci.

Rovnici analogickou k (**??**) můžeme napsat pro ionty

$$m_i \frac{D\mathbf{u_i}}{Dt} = Ze(\mathbf{E} + \mathbf{u_i} \times \mathbf{B}) - \nu_{\mathbf{in}} \mathbf{m_i} \mathbf{u_i}, (8.7)$$

kde Ze je náboj iontu. V mnoha případech jako je např. vysokofrekvenční plazma, můžeme zanedbat pohyb iontů, tj. $\mathbf{u}_i = 0$. Plazma, v nemž je důležitý pouze pohyb elektronů se obvykle nazývá *Lorentzův plyn.*

8.2 Linearizace Langevinovy rovnice

Langevinova rovnice ve tvaru (8.4) obsahuje nelineární členy - součin dvou proměnných. V mnoha případech můžeme situaci zjednodušit linearizací těchto členů, která je použitelná v případě změn o malých amplitudách.

- Totální diferenciál $\mathbf{u}_e$ obsahuje člen $(\mathbf{u}_e \cdot \nabla)\mathbf{u}_e$. Zanedbání tohoto členu je možné pokud jsou střední rychlost a její prostorové změny malé nebo pokud je střední rychlost kolmá na svůj gradient (transverzální vlny)
- V nelineární členu $\mathbf{u}_e \times \mathbf{B}$ budeme separovat mg. indukci $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ na dva členy

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B_0} + \mathbf{B}'(\mathbf{r}, t), \tag{8.8}$$

  takže

$$q(\mathbf{E} + \mathbf{u_e} \times \mathbf{B}) = q(\mathbf{E} + \mathbf{u_e} \times \mathbf{B_0} + \mathbf{u_e} \times \mathbf{B}'). \tag{8.9}$$

Pokud můžeme předpokládat, že

$$|\mathbf{u_e} \times \mathbf{B}'| \ll |\mathbf{E}| \tag{8.10}$$

můžeme člen $|\mathbf{u_e} \times \mathbf{B}'|$ v (8.9) zanedbat.

S využitím dvou výše uvedených linearizačních zjednodušení získáváme následující Langevinovu rci

$$m_e \frac{\partial \mathbf{u_e}}{\partial t} = -e(\mathbf{E} + \mathbf{u_e} \times \mathbf{B_0}) - \nu_c m_e \mathbf{u_e} \tag{8.11}$$

V mnoha praktických problémech se proměnné $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}'$ a $\mathbf{u_e}$ mění harmonicky v čase i prostoru. Využijeme rovinných vln, protože jde o jednoduchý případ a jakákoliv fyzikálně realizovatelná vlna se dá vyjádřit jako superpozice rovinných vln.

$$\mathbf{E}, \mathbf{B}', \mathbf{u_e} \propto \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega \mathbf{t})], \tag{8.12}$$

kde ω je kruhová frekvence, $\mathbf{k}$ vlnový vektor ve směru šíření vlny. Diferenciální operátory ∇ a $\partial/\partial t$ se pak transformují na $i\mathbf{k}$ a $-i\omega$. Dosazením (8.8) do Maxwell. rce $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B}/\partial t$ dostaneme

$$i\mathbf{k} \times \mathbf{E} = i\omega \mathbf{B}', \tag{8.13}$$

takže

$$\mathbf{B}' = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{E}}{\omega}. \tag{8.14}$$

Nyní můžeme ověřit nerovnost (8.10)

$$|\mathbf{u_e} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E})/\omega| \ll |\mathbf{E}|. \tag{8.15}$$

Velikost nelineárního členu $|\mathbf{u_e} \times \mathbf{B}'|$ může být tedy rovna nebo menší než $|(u_e k E)/\omega|$. Nelineární člen můžeme zanedbat pokud

$$|u_e(k/\omega)| \ll 1 \tag{8.16}$$

nebo ekvivalentně

$$|u_e| \ll |\omega/k|, \tag{8.17}$$

kde ω/k představuje fázovou rychlost rovinné vlny. Protože tento člen obvykle dosahuje rychlosti světla, zatímco amplituda střední rychlosti elektronů u_e je mnohem menší, můžeme skutečně nelineární člen zanedbávat. Pokud ale dojde k rezonanci, je ω/k velmi malé, zatímco u_e se stává velké. V tomto případě se pak nelineární člen zanedbat nedá.

8.3 Stejnosměrná vodivost a pohyblivost elektronů

Použijeme Langevinovu rovnici pro ustálený stav, abychom odvodili stejnosměrnou vodivost plazmatu. V této kapitole předpokládáme slabě ionizované homogenní plazma, ve kterém můžeme použít model Lorentzova plynu. Předpokládáme, že aplikované el. pole je konstantní a homogenní.

8.3.1 Izotropní plazma

Pokud nepůsobí mg. síla, můžeme Langevinovu rci pro ustálený stav zapsat jako

$$-e\mathbf{E} - m_e\nu_c\mathbf{u_e} = 0. \tag{8.18}$$

Hustota el. proudu

$$\mathbf{J} = -en_e\mathbf{u_e}. \tag{8.19}$$

Kombinací předchozích dvou rovnic

$$\mathbf{J} = \frac{n_e e^2}{m_e\nu_e}\mathbf{E}. \tag{8.20}$$

Z Ohmova zákona $\mathbf{J} = \sigma_0\mathbf{E}$ můžeme pak vyjádřit *stejnosměrnou vodivost* pro izotropní elektronový plyn

$$\sigma_0 = \frac{n_e e^2}{m_e\nu_c}. \tag{8.21}$$

Pohyblivost elektronů μ_e je definovaná jako

$$\mu_e = \frac{u_e}{E}, \tag{8.22}$$

takže dostáváme

$$\mathcal{M}_e = -\frac{e}{m_e\nu_c} = -\frac{\sigma_0}{n_e e} \tag{8.23}$$

8.3.2 Anizotropní magnetoplazma

V případě přítomnosti mg. pole se plazma stává anizotropní. Langevinova rce pro ustálený stav je

$$-e(E + u_e \times B_0) - m_e \nu_c \mathbf{u_e} = 0, \tag{8.24}$$

kde $\mathbf{B}_0$ je konstantní a homogenní mg. pole. Použijeme (8.19)

$$\frac{m_e \nu_c}{n_e e}\mathbf{J} = e(\mathbf{E} + \mathbf{u_e} \times \mathbf{B_0}), \tag{8.25}$$

takže

$$\mathbf{J} = \sigma_0(\mathbf{E} + \mathbf{u_e} \times \mathbf{B_0}), \tag{8.26}$$

což je zjednodušená podoba Ohmova zákona.
Chtěli bychom přepsat tento zákon tak, aby hustota el. proudu byla přímo úměrná aplikovanému el. poli. Definujeme tedy *tenzor stejnosměrné vodivosti* $\mathcal{S}$

$$\mathbf{J} = \mathcal{S} \cdot \mathbf{E}. \tag{8.27}$$

Abychom získali jeho vyjádření, uvažujme kartézské souřadnice a mg. pole rovnoběžné s osou z, tj. $\mathbf{B}_0 = B_0\hat{\mathbf{z}}$. Nahradíme $\mathbf{u}_e = -\mathbf{J}/(en_e)$ v (8.26)

$$\mathbf{J} = \sigma_0\mathbf{E} - \frac{\sigma_0 B_0}{en_e}(\mathbf{J} \times \hat{\mathbf{z}}). \tag{8.28}$$

Uvědomíme si, že

$$\mathbf{J} \times \hat{\mathbf{z}} = J_y \hat{\mathbf{x}} - J_x \hat{\mathbf{y}} \tag{8.29}$$

a dostáváme tuto soustavu rovnic

$$\hat{\mathbf{x}} \ : \qquad J_x = \sigma_0 E_x - \frac{\Omega_{ce}}{\nu_e} J_y \tag{8.30}$$

$$\hat{\mathbf{y}} \ : \qquad J_y = \sigma_0 E_y + \frac{\Omega_{ce}}{\nu_e} J_x \tag{8.31}$$

$$\hat{\mathbf{z}} \ : \qquad J_z = \sigma_0 E_z, \tag{8.32}$$

kde $\Omega_{ce} = eB_0/m_e$ označuje elektronovou cyklotronovou frekvenci. Z prních dvou rovnic dostáváme

$$J_x = \frac{\nu_c^2}{(\nu_c^2 + \Omega_{ce}^2)} \sigma_0 E_x - \frac{\nu_c^2 \Omega_{ce}}{(\nu_c^2 + \Omega_{ce}^2)} \sigma_0 E_y \tag{8.33}$$

$$J_y = \frac{\nu_c^2 \Omega_{ce}}{(\nu_c^2 + \Omega_{ce}^2)} \sigma_0 E_x + \frac{\nu_c^2}{(\nu_c^2 + \Omega_{ce}^2)} \sigma_0 E_y. \tag{8.34}$$

V maticové podobě tedy

$$\begin{pmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{pmatrix} = \sigma_0 \begin{pmatrix} \frac{\nu_c^2}{(\nu_c^2+\Omega_{ce}^2)} & -\frac{\nu_c^2\Omega_{ce}}{(\nu_c^2+\Omega_{ce}^2)} & 0 \\ \frac{\nu_c^2\Omega_{ce}}{(\nu_c^2+\Omega_{ce}^2)} & \frac{\nu_c^2}{(\nu_c^2+\Omega_{ce}^2)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \tag{8.35}$$

Tenzor ss vodivosti je tedy

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} \sigma_\perp & -\sigma_H & 0 \\ \sigma_H & \sigma_\perp & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\parallel \end{pmatrix}, \tag{8.36}$$

kde

$$\sigma_\perp = \frac{\nu_c^2}{(\nu_c^2 + \Omega_{ce}^2)}\sigma_0 \tag{8.37}$$

$$\sigma_H = \frac{\nu_c^2 \Omega_{ce}}{(\nu_c^2 + \Omega_{ce}^2)}\sigma_0 \tag{8.38}$$

$$\sigma_\parallel \equiv \sigma_0 = \frac{n_e e^2}{m_e \nu_e}. \tag{8.39}$$

Abychom pochopili fyzikální smysl komponent tenzoru $\mathcal{S}$ je vhodné rozložit el. intenzitu do směru rovnoběžného s $\mathbf{B_0}$ a kolmého. Element $\sigma_\perp$ se nazývá *kolmá* nebo *transverzální* vodivost (rovněž *Pedersonova vodivost*), protože řídí tok el. proudu ve směru rovnoběžném s $\mathbf{E}_\perp$ a kolmém na $\mathbf{B_0}$, zatímco σ_H (*Hallova vodivost*) řídí tok. el. proudu ve směru kolmém na el. i mg. pole. Element σ_0 je *podélná vodivost*, protože určuje tok el. proudu ve směru rovnoběžném s mg. polem.

Dále odvodíme vztah pro pohyblivost elektronů. Díky anizotropii půjde o tenzor

$$\mathbf{u_e} = \mathcal{M}_e \cdot \mathbf{E}. \tag{8.40}$$

Protože $\mathbf{J} = -en_e\mathbf{u}_e = \mathcal{S}\mathbf{E}$, máme

$$\mathcal{M}_e = -\frac{1}{n_e e}\mathcal{S}. \tag{8.41}$$

8.4 Střídavá vodivost a elektronová pohyblivost

Předpokládejme nyní, že el. pole $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ a střední rychlost elektronů $\mathbf{u}_e(\mathbf{r}, t)$ se harmonicky mění s časem jako $\exp(-i\omega t)$. Linearizovanou Langevinovu rovnici (8.11)

$$-i\omega m_e\mathbf{u_e} = -e(\mathbf{E} + \mathbf{u_e} \times \mathbf{B_0}) - m_e\nu_c\mathbf{u_e} \tag{8.42}$$

můžeme tedy přepsat jako

$$-e(\mathbf{E} + \mathbf{u_e} \times \mathbf{B_0}) - m_e(\nu_c - i\omega)\mathbf{u_e} = 0 \tag{8.43}$$

Tato rovnice je analogická k rovnici (8.24) až na změnu členu srážkové frekvence, tj. místo ν_c na $\nu_c - i\omega$. Takže podobně dostáváme tenzor tlaku, kde frekvenčně závislá kolmá vodivost, Hallova vodivost a podélná vodivost jsou

$$\sigma_\perp \;=\; \frac{(\nu_c - i\omega)^2}{(\nu_c - i\omega)^2 + \Omega_{ce}^2}\sigma_0 \tag{8.44}$$

$$\sigma_H = \frac{(\nu_c - i\omega)\Omega_{ce}}{(\nu_c - i\omega)^2 + \Omega_{ce}^2}\sigma_0 \tag{8.45}$$

$$\sigma_0 = \frac{n_e e^2}{m_e(\nu_c - i\omega)} = \frac{n_e e^2(\nu_c - i\omega)}{m_e(\nu_c^2 + \omega^2)} \tag{8.46}$$

Pohyblivost dostáváme opět analogicky podle vztahu (8.41).

Pokud můžeme zanedbat elektron-neutrál srážkovou frekvenci ($\nu_c = 0$), dostáváme

$$\sigma_\perp = \frac{\omega^2}{(\omega^2 - \Omega_{ce}^2)}\sigma_0 \tag{8.47}$$

$$\sigma_H = \frac{i\omega\Omega_{ce}}{(\omega^2 - \Omega_{ce}^2)}\sigma_0 \tag{8.48}$$

$$\sigma_0 = i\frac{n_e e^2}{m_e\omega} \tag{8.49}$$

8.5 Vodivost při uvažování pohybu iontů

Vezmeme v úvahu pohyb iontů. Linearizovaná Langevinova rovnice pro částice typu α

$$m_\alpha \frac{\partial \mathbf{u}_\alpha}{\partial t} = q_\alpha(\mathbf{E} + \mathbf{u}_\alpha \times \mathbf{B_0}) - m_\alpha \nu_{c\alpha} \mathbf{u}_\alpha, \tag{8.50}$$

kde $\nu_{c\alpha}$ je efektivní srážková frekvence neboli tlumící člen, jenž je výsledkem srážek částic α s *neutrály*. Langevinova rovnice pro jednotlivé typy nabitých částic jsou nezávislé. Celkový proud je tedy dán jako

$$\mathbf{J} = \sum_\alpha n_\alpha q_\alpha \mathbf{u}_\alpha = \sum_\alpha \mathbf{J}_\alpha = (\sum_\alpha \mathcal{S}_\alpha) \cdot \mathbf{E} \tag{8.51}$$

a celkový tenzor vodivosti je jednoduše

$$\mathcal{S} = \sum_\alpha S_\alpha. \tag{8.52}$$

Pro plazma obsahující elektrony a několik typů iontů (index j) dostáváme ze vztahů (8.44), (8.45) a (8.46) pomocí plazmové frekvence $\omega_{p\alpha}$ a ε_0

$$\sigma_\perp = \epsilon_0 [\frac{\omega_{pe}^2(\nu_{ce} - i\omega)}{(\nu_{ce} - i\omega)^2 + \Omega_{ce}^2} + \sum_j \frac{\omega_{pj}^2(\nu_{cj} - i\omega)}{(\nu_{cj} - i\omega)^2 + \Omega_{cj}^2}] \tag{8.53}$$

$$\sigma_H = \epsilon_0 [\frac{\omega_{pe}^2 \Omega_{ce}}{(\nu_{ce} - i\omega)^2 + \Omega_{ce}^2} - \sum_j \frac{\omega_{pj}^2 \Omega_{cj}}{(\nu_{cj} - i\omega)^2 + \Omega_{cj}^2}] \tag{8.54}$$

$$\sigma_\parallel = \epsilon_0 [\frac{\omega_{pe}^2}{(\nu_{ce} - i\omega)} + \sum_j \frac{\omega_{pj}^2}{(\nu_{cj} - i\omega)}] \tag{8.55}$$

8.6 Plazma jako dielektrikum

Až doposud jsme ale uvažovali o nabitých částicích pohybujících se ve vlastních vnitřních polích, takže jsme brali v úvahu tyto rovnice

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} \tag{8.56}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}, \tag{8.57}$$

které jsou používané pro volný prostor bez nábojů. Efekt existence plazmatu se pak projevoval pohybem a interakcí nabitých částic uvnitř plazmatu.

Pokud neuvažujeme vnitřní pohyb částic, můžeme plazma popisovat jako dielektrikum charakterizované *dielektrickým tenzorem*. Pak nás zajímají pouze obecné makroskopické vlastnosti a nikoliv elementární pohyb částic. Místo Langevinovy rovnice vezměme Maxwellovu rovnici

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}) \tag{8.58}$$

a zde zahrňme efekt plazmatu pomocí tenzoru vodivosti $\mathcal{S}$ definovaném vztahem

$$\mathbf{J} = \mathcal{S} \cdot \mathbf{E}. \tag{8.59}$$

Dosadíme do Maxwellovy rovnice a předpokládáme časově proměnné harmonické variace el. pole:

$$\nabla \times \mathbf{B} = mu_0 \mathcal{S} \cdot \mathbf{E} - i\omega\mu_0\epsilon_0 \mathbf{E}. \tag{8.60}$$

Pokud **1** označíme jednotkový tenzor

$$\nabla \times \mathbf{B} = -i\omega\mu_0\epsilon_0(\mathbf{1} + \frac{i\mathcal{S}}{\omega\epsilon_0}) \cdot \mathbf{E} \tag{8.61}$$

nebo ekvivaletně

$$\nabla \times \mathbf{B} = -i\omega\mu_0\mathcal{E} \cdot \mathbf{E}, \tag{8.62}$$

kde

$$\mathcal{E} = \epsilon_0(1 + \frac{i\mathcal{S}}{\omega\epsilon_0}) \tag{8.63}$$

se nazývá *dielektrický tenzor* plazmatu. Používání tohoto tenzoru představuje jiný přístup pro popisování plazmatu než jsme používali doposud:

$$\mathbf{D} = \mathcal{E} \cdot \mathbf{E}. \tag{8.64}$$

Poznamenejme, že $\mathcal{E}$ závisí na frekvenci ω a můžeme ho zapsat v maticové podobě

$$\mathcal{E} = \epsilon_0 \begin{pmatrix} \epsilon_1 & \epsilon_2 & 0 \\ \epsilon_2 & \epsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{pmatrix}, \tag{8.65}$$

kde

$$\epsilon_1 \;=\; 1 + \frac{i}{\omega\epsilon_0}\sigma_\perp \tag{8.66}$$

$$\epsilon_2 = \frac{i}{\omega\epsilon_0}\sigma_H \tag{8.67}$$

$$\epsilon_3 = 1 + \frac{i}{\omega\epsilon_0}\omega_0 \tag{8.68}$$

8.7 Difuze volných elektronů

Přítomnost gradientů tlaku v transportní rovnici hybnosti představuje sílu, která vyrovnává jakékoliv nehomogenity hustoty plazmatu. Difuze částic je výsledkem této síly.

Zde dovodíme difuzní koeficient pro elektrony v "teplém" slabě ionizavaném plazmatu.

- trasportní pohybová rovnice pro elektrony s konstantní elektron-neutrál srážkovou frekvencí
- odchylky od rovnováhy způsobené nehomogenitami v hustotě jsou velmi malé

$$n_e(\mathbf{r}, t) = n_0 + n_e'(\mathbf{r}, t), \tag{8.69}$$

  kde $|n_e'| \ll n_0$ je veličina prvního řádu "malosti", takže tyto odchylky můžeme ve druhém řádu zanedbat

- tenzor tlaku $\mathcal{P}_e$ nahradíme skalárním tlakem p_e

$$p_e(\mathbf{r},t) = n_e(\mathbf{r},t)kT_e = (n_0 + n_e')kT_e \tag{8.70}$$

- $\mathbf{E}$ a $\mathbf{B}$ jsou nula, T_e =konst

Protože $\mathbf{u}_e$ je veličina prvnho řádu "malosti", můžeme rovnici kontinuity zapsat

$$\frac{\partial n_e'}{\partial t} + n_0 \nabla \cdot \mathbf{u_e} = 0, \tag{8.71}$$

kde jsme zanedbali součin $n_e' \mathbf{u}_e$. Podobně pro transportní rovnici hybnosti

$$n_e m_e [\frac{\partial \mathbf{u_e}}{\partial t} + (\mathbf{u_e} \cdot \nabla)\mathbf{u_e}] = -\nabla p_e - n_e M - e\nu_c \mathbf{u_e} \tag{8.72}$$

dostaneme po linearizaci

$$n_0 \frac{\partial \mathbf{u_e}}{\partial t} = -\frac{kT_e}{m_e} \nabla n_e' - n_0 \nu_c \mathbf{u_e}. \tag{8.73}$$

Vezmeme divergenci této rovnice

$$n_0 \frac{\partial (\nabla \cdot \mathbf{u_e})}{\partial t} = -\frac{kT_e}{m_e} \nabla^2 n_e' - n_0 \nu_c \nabla \cdot \mathbf{u_e} \tag{8.74}$$

a dosadíme za $n_0 \nabla \cdot \mathbf{u_e}$ z (8.71)

$$\frac{\partial^2 n_e'}{\partial t^2} = \frac{kT_e}{m_e} \nabla^2 n_e' - \nu_c \frac{\partial n_e'}{\partial t}, \tag{8.75}$$

což můžeme přepsat i jako

$$\frac{\partial n_e'}{\partial t} = D_e \nabla^2 n_e' - \frac{1}{\nu_c}\frac{\partial^2 n_e'}{\partial t^2}, \tag{8.76}$$

kde jsme definovali *koeficient difuze volných elektronů*

$$D_e = \frac{kTe}{m_e \nu_c} \tag{8.77}$$

Chceme získat odhad velikosti jednotlivých členů v rovnici (8.76). Nechť τ a L představují charakteristický čas a délku, na které se významně mění $n_e' \Longrightarrow$ prostorová derivace je velikosti řádu L^{-1} a časová derivace velikosti řádu τ^{-1}:

$$\frac{\partial n_e'}{\partial t} \sim \frac{n_e'}{\tau} \tag{8.78}$$

$$D_e \nabla^2 n_e' \sim D_e \frac{n_e'}{L^2} \tag{8.79}$$

$$\frac{1}{\nu_c}\frac{\partial^2 n_e'}{\partial t^2} \sim \frac{n_e'}{\nu_c \tau^2}. \tag{8.80}$$

Porovnáme-li (8.78) a (8.80) vidíme, že je-li $\nu_v \tau \gg 1$, tj. průměrný počet srážek elektronů s neutrály během časového intervalu τ je dosti velký, můžeme poslední člen v (8.76) zanedbat a dostáváme *difuzní rovnici*

$$\frac{\partial n_e'}{\partial t} = D_e \nabla^2 n_e'. \tag{8.81}$$

Takže pokud je rychlost změny hustoty pomalá ve srovnání se srážkovou frekvencí, je hustota elektronů řízena difuzní rovnicí, v níž je difuzní koeficient dán vztahem (8.77).

Podmínka $\nu_v \tau \gg 1$ znamená zanedbání členu zrychlení v transportní pohybové rovnici, tj. zanedbání $\partial \mathbf{u}_e / \partial t$. Pokud zanedbáváme časové změny $\mathbf{u}_e$ dostáváme z linearizované pohybové rovnice (8.73)

$$n_0 \nu_c \mathbf{u_e} = -\frac{kT_e}{m_e} \nabla n_e', \tag{8.82}$$

což můžeme napsat jako

$$\mathbf{\Gamma_e} = -D_e \nabla n_e', \tag{8.83}$$

kde $\mathbf{\Gamma}_e = n_0 \mathbf{u}_e$ je linearizovaný tok elektronů. Vztah (8.83) je analogický k jednoduchému Ohmovu zákonu $\mathbf{J} = \sigma_0 \mathbf{E}$, takže tok elektronů způsobený gradientem hustoty je analogický k el. proudu způsobenému el. polem, pokud uvažujeme ustálený stav pro $\mathbf{u}_e$.

8.8 Difuze elektronů v mg. poli

Uvažujme nyní konst. a homogenní pole B_0. Uděláme podobné zjednodušení jako v předchozím a zanedbáme $\partial \mathbf{u}_e/\partial t$. Z linearizované pohybové rovnice dostáváme

$$\mathbf{\Gamma_e} = -D_e \nabla n_e' - \frac{e}{m_e \nu_e}(\mathbf{\Gamma_e} \times \mathbf{B_0}). \tag{8.84}$$

Uvažujeme kartézskou soustavu souřadnic, osa z ve směru $\mathbf{B}_0$, tj. $\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{\mathbf{z}}$:

$$\mathbf{\Gamma_e} = -D_e \nabla n_e' - \frac{\Omega_{ce}}{\nu_e}(\mathbf{\Gamma_e} \times \hat{\mathbf{z}}). \tag{8.85}$$

Tato rovnice je analogická k (8.28), kde $\mathbf{\Gamma}_e$ nahradíme $\mathbf{J}$, D_e nahradíme σ_e a $-\nabla n_e'$ nahradíme $\mathbf{E}$. Dále $\Omega_{ce}/\nu_c = \sigma_0 B_0/(e n_e)$. Takže analogicky s výrazem $\mathbf{J} = \mathcal{S} \cdot \mathbf{E}$ můžeme psát

$$\mathbf{\Gamma_e} = -\mathcal{D} \cdot \nabla n_e', \tag{8.86}$$

kde $\mathcal{D}$ je *tenzor difuze v mg. poli*

$$\begin{pmatrix} & D_\perp & D_H & 0 \\ \mathcal{D} = & -D_H & D_\perp & 0 \\ & 0 & 0 & D_\parallel \end{pmatrix}, \tag{8.87}$$

přičemž

$$D_\perp \; = \; \frac{\nu_c^2}{\nu_c^2 + \Omega_{ce}^2} D_e \tag{8.88}$$

$$D_H \;=\; \frac{\nu_c \Omega_{ce}}{\nu_c^2 + \Omega_{ce}^2} D_e \tag{8.89}$$

$$D_\parallel \;\equiv\; D_e = \frac{kT_e}{m_e \nu_c} (8.90)$$

Podobně jako v předchozí kapitole můžeme odvodit difuzní rovnici pro n'_e. Nejprve zapíšeme rovnici kontinuity (8.71) jako

$$\frac{\partial n'_e}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{\Gamma_e} = 0. \tag{8.91}$$

Dosadíme (8.86) za $\mathbf{\Gamma}_e$

$$\frac{\partial n'_e}{\partial t} = \nabla \cdot (\mathcal{D} \cdot \nabla n'_e). \tag{8.92}$$

Za použití matice (8.87) a výpočtu v kartézských souřadnicích dostaneme

$$\mathcal{D} \cdot \nabla n'_e = \hat{\mathbf{x}}(D_\perp \frac{\partial n'_e}{\partial x} + D_H \frac{\partial n'_e}{\partial y}) + \tag{8.93}$$

$$\hat{\mathbf{y}}(-D_H \frac{\partial n'_e}{\partial x} + D_\perp \frac{\partial n'_e}{\partial y}) + \hat{\mathbf{z}} D_e \frac{\partial n'_e}{\partial z}. \tag{8.94}$$

Tento výsledek dosadíme do (8.92)

$$\frac{\partial n'_e}{\partial t} = D_\perp (\frac{\partial^2 n'_e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 n'_e}{\partial y^2}) + D_e \frac{\partial^2 n'_e}{\partial z^2}. \tag{8.95}$$

Protože $D_\perp < D_e$ a protože $D_\perp$ klesá s rostoucím Ω_{ce}/ν_c (podobně jako $\sigma_\perp$), je difuze částic ve směru kolmém na mg. pole vždy menší než ve směru rovnoběžném.

Transportní pohybová rovnice pro elektronový plyn, pokud zanedbáme člen zrychlení ale vezmeme v úvahu elmag sílu, je obecně (konst. teplota)

$$\mathbf{\Gamma}_e \mathcal{M}_e (n_e \mathbf{E} + \mathbf{\Gamma_e} \times \mathbf{B}) - D_e \nabla n_e. \tag{8.96}$$

Vidíme, že tok elektronů je výsledkem obojího, elmag síly i gradientu tlaku. Podíl skalární pohyblivosti $\mathcal{M}_e$ a difuzního koeficientu je znám jako *Einsteinova relace*

$$\frac{\mathcal{M}_e}{D_e} = -\frac{e}{kT_e} \tag{8.97}$$

8.9 Ambipolarní difuze

Ukázali jsme si, že časově ustálená transportní rovnice hybnosti v případě nepřítomnosti elmag sil a konst. teplotě dává tuto difuzní rovnici pro elektrony:

$$\mathbf{\Gamma_e} = -D_e \nabla n'_e, \tag{8.98}$$

kde *difuzní koeficient volných elektronů* je definován

$$D_e = \frac{kT_e}{m_e \nu_{ce}}. \tag{8.99}$$

Pokud budeme uvažovat podobnou rovnici pro ionty ve slabě ionizovaném plazmatu máme

$$\mathbf{\Gamma_i} = -D_e \nabla n'_i, \tag{8.100}$$

kde

$$D_i = \frac{kT_i}{m_i \nu_{ci}} \tag{8.101}$$

označuje *difuzní koeficient volných iontů.*
$\Longrightarrow$ neuvažovali jsme interakci mezi elektrony a ionty ALE elektrony difundují rychleji a zanechávají za sebou kladný náboj. Difuze, při které neuvažujeme prostorový náboj, se nazývá *volná difuze.*

V mnoha případech ovšem *nemůžeme* zanedbat prostorový náboj, vzniklé el. pole ja dáno Maxwellovou rovnicí

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = \frac{e(n_i - n_e)}{\epsilon_0}. \tag{8.102}$$

Odhadneme důležitost prostorového náboje pro difuzi $\Rightarrow$ použijeme bezrozměrnou analýzu: L je char. délka, na které se podstatně mění hustota náboje. Ze vztahu (8.102)

$$E \sim \frac{enL}{\epsilon_0}, \tag{8.103}$$

takže el. síla na jednotk. hmotnost

$$f_E = \frac{eE}{m} \sim \frac{e^2 nL}{m\epsilon_0}. \tag{8.104}$$

"Difuzní síla" na jednotk. hmotnost z (8.98)

$$f_D = \frac{kT}{mn_0}|\nabla n| \sim \frac{kTn}{mn_0 L}. \tag{8.105}$$

$\Rightarrow$ El. pole prostorového náboje může být zanedbáno pokud $f_E \ll f_D$, tj.

$$L^2 \ll \frac{\epsilon_0 kT}{n_0 e^2} = \lambda_D^2, \tag{8.106}$$

kde λ_D je *Debyeova délka*. To je splněno zřídka a musíme uvažovat tzv. *ambipolární difuzi*.

Předp., že změny hustoty elektronů i iontů jsou prvního řádu "malosti"

$$n_\alpha(\mathbf{r}, t) = n_0 + n'_\alpha(\mathbf{r}, t), \tag{8.107}$$

kde $\alpha = e$, i a $n'_\alpha \ll n_0$, a že $\mathbf{u}_\alpha$ mají velmi malou amplitudu. Použijeme linearizovanou rovnici kontinuity

$$\frac{\partial n'_\alpha}{\partial t} + n_0 \nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha = 0 \tag{8.108}$$

a linearizovanou rovnici hybnosti za předp. konstantních teplot a bez mg. pole

$$\frac{\partial \mathbf{u}_\alpha}{\partial t} = \frac{q_\alpha}{m_\alpha}\mathbf{E} - \frac{kT_\alpha}{m_\alpha n_0}\nabla n'_\alpha - \nu_{c\alpha}\mathbf{u}_\alpha, \tag{8.109}$$

kde pole prostorového náboje splňuje rci (8.102). Rovněž předp. že střední rychlost neutrálů je nulová a zanedbáváme srážky elektron-iont. Vezmeme divergenci (8.109) a použijeme rovnici kontinuity:

$$\frac{\partial^2 n'_\alpha}{\partial t^2} = -\frac{q_\alpha n_0}{m_\alpha}(\nabla \cdot \mathbf{E}) + \frac{kT_\alpha}{m_\alpha}\nabla^2 n'_\alpha - nu_{c\alpha}\frac{\partial n'_\alpha}{\partial t}. \tag{8.110}$$

Nahradíme $\nabla \cdot \mathbf{E}$ z (8.102) a dostáváme soustavu rovnic

$$\frac{\partial^2 n'_e}{\partial t^2} = \omega_{pe}^2(n'_i - n'_e) + \frac{kT_e}{m_e}\nabla^2 n'_e - \nu_{ce}\frac{\partial n'_e}{\partial t} \tag{8.111}$$

$$\frac{\partial^2 n_i'}{\partial t^2} = -\omega_{pi}^2(n_i' - n_e') + \frac{kT_i}{m_i}\nabla^2 n_i' - \nu_{ce}\frac{\partial n_i'}{\partial t}. \tag{8.112}$$

Musíme provést další zjednodušení. Podobně jako dříve jestliže $\nu_c\tau \gg 1$, kde τ je charakteristická doba difuze, můžeme členy na levé straně rovnic zanedbat. Jejich zkombinováním tedy dostáváme

$$kT_e\nabla^2 n_e' + kT_i\nabla^2 n_i' - m_e\nu_{ce}\frac{\partial n_e'}{\partial t} - m_i\nu_{ci}\frac{\partial n_i'}{\partial t} = 0. \tag{8.113}$$

Pomocí další aproximace $n_e' = n_i' = n'$

$$k(T_e + T_i)\nabla^2 n' - (m_e\nu_{ce} + m_i\nu_{ci})\frac{\partial n'}{\partial t} = 0, \tag{8.114}$$

což můžeme přepsat jako

$$\frac{\partial n'}{\partial t} = D_a\nabla^2 n', \tag{8.115}$$

kde

$$D_a = \frac{k(T_e + T_i)}{m_e\nu_{ce} + m_i\nu_{ci}} \tag{8.116}$$

je *koeficient ambipolární difuze.*

Kapitola 9

Boltzmannův a Fokker-Planckův srážkový člen

Odvodíme Boltzmannův srážkový člen pro *binární srážky*. Srážkový člen obsahuje integrály přes rychlosti částic, takže BKR je vlastně integro-diferenciální rovnice. Platnost omezená na slabě ionizované plazma. Coulombovské interakce můžeme ale započítat jako sérii po sobě následujících slabých binárních srážek a dostáváme Fokker-Planckův srážkový člen.

9.1 Boltzmannova rovnice

9.1.1 Odvození Boltzmannova srážkového integrálu

Srážk. člen $(\delta f_\alpha/\delta t)_{\mathrm{srazk}}$ představuje změnu rozděl. fce v důsledku srážek. Jde o bilanci částic ΔN_α uvnitř objemového elementu $d^3r\, d^3v$ kolem $(\mathbf{r},\, \mathbf{v})$ za čas dt

$$\Delta N_\alpha = \left(\frac{\delta f_\alpha}{\delta t}\right)_{\mathrm{srazk}} d^3r d^3v dt. \tag{9.1}$$

Je výhodné separovat ΔN_α do dvou částí

$$\Delta N_\alpha = \Delta N_\alpha^+ - \Delta N_\alpha^-, \tag{9.2}$$

kde ΔN_α^+ označuje přírůstek částic ležících v d^3r, které mají *po srážce* rychlost ležící v objemu d^3v a ΔN_α^- označuje úbytek částic ležících v d^3r, které mají *před srážkou* rychlost ležící v intervalu d^3v.

Vyjádříme ΔN_α^-. Uvažujme částice ležící v d^3r kolem $\mathbf{r}$, které mají rychlost ležící v d^3v kolem $\mathbf{v}$. Tyto jsou rozptýleny srážkami s jinými částicemi (nemusí jít o částice α) ležícími ve stejném prostorovém elementu a majícími rychlost z d^3v_1 kolem $\mathbf{v_1}$. Uvažujme, že jde o částice β a jejich tok dopadající na částice α je

$$\Gamma_\beta = f_\beta(\mathbf{r}, \mathbf{v_1}, t) d^3v_1 |\mathbf{v_1} - \mathbf{v}| = f_\beta(\mathbf{r}, \mathbf{v_1}, t) d^3v_1 g. \tag{9.3}$$

Průměrný počet interakcí jedné částice α v čas. intervalu dt je

$$\Gamma_\beta b\, db\, d\epsilon\, dt = f_\beta(\mathbf{r}, \mathbf{v_1}, t) d^3v_1 g\, b\, db\, d\epsilon\, dt, \tag{9.4}$$

kde záměrná vzdálenost leží v intervalu b a $b+db$ a rovina srážky mezi úhly ϵ a $\epsilon+d\epsilon$. Předpokládáme, že čas dt je velký ve srovnání s interakční dobou částic. Počet srážek částic β se všemi částicemi α ležící v d^3rd^3v kolem $(\mathbf{r},\ \mathbf{v})$ za čas dt je dán součinem

$$f_\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v},t)d^3rd^3v f_\beta(\mathbf{r},\mathbf{v_1},t)d^3v_1 g\, b\, db\, d\epsilon\, dt. \tag{9.5}$$

Zde jsme předpokládali, že počet srážek počet srážek těchto dvou druhů srážek je úměrný součinu $_\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v},t)\ f_\beta(\mathbf{r},\mathbf{v_1},t)$. Takže zanedbáváme jakoukoliv korelaci $\Rightarrow$ *molekulární chaos*. Celkový počet částic, které jsou rozptýleny dostaneme integrací a sumací

$$\Delta N_\alpha^- = f_\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v},t)d^3rd^3vdt \sum_\beta \int_{v1} \int_b \int_\epsilon f_\beta(\mathbf{r},\mathbf{v_1},t)d^3v_1 g\, b\, db\, d\epsilon \tag{9.6}$$

Podobně vyjádříme ΔN_α^+. Uvažujeme *inverzní srážku* v prostorovém elementu d^3r kolem $\mathbf{r}$, v níž se částice α s původní rychlostí v d^3v' kolem $\mathbf{v}'$ sráží s částicemi β majícími původní rychlost z d^3v_1'. Výsledek je rozptyl částic α do d^3v kolem $\mathbf{v}$. Průměrný počet srážek mezi jednou částicí α a částicemi β je

$$f_\beta(\mathbf{r},\mathbf{v_1'},t)d^3v_1' g'\, b\, db\, d\epsilon\, dt. \tag{9.7}$$

Potom

$$\Delta N_\alpha^+ = f_\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v}',t)d^3rd^3v'dt \sum_\beta \int_{v_1'} \int_b \int_\epsilon f_\beta(\mathbf{r},\mathbf{v_1'},t)d^3v_1' g'\, b\, db\, d\epsilon. \tag{9.8}$$

Víme, že $g' = g = |\mathbf{v_1} - \mathbf{v}|$ a z teorie Jakobiánu

$$d^3v'd^3v_1' = |J|d^3vd^3v_1. \tag{9.9}$$

V následující podkapitole ukážeme, že $|J| = 1$, takže

$$d^3v'd^3v_1' = d^3vd^3v_1. \tag{9.10}$$

Vztah (9.11) můžeme tedy zapsat jako

$$\Delta N_\alpha^+ = f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}', t)d^3rd^3vdt \sum_\beta \int_{v_1} \int_b \int_\epsilon f_\beta(\mathbf{r}, \mathbf{v_1'}, t)d^3v_1 g\, b\, db\, d\epsilon. \tag{9.11}$$

Nyní zkombinujeme výrazy pro ΔN_α^- a ΔN_α^+ a výraz $b\, db\, d\epsilon$ nahradíme výrazem $\sigma(\Omega)d\Omega$, takže dostáváme výraz pro Boltzmannův srážkový integrál

$$\begin{aligned} \left(\frac{\delta f_\alpha}{\delta t}\right)_{\text{srazk}} &= \left(\frac{\Delta N_\alpha^+ - \Delta N_\alpha^-}{d^3rd^3vdt}\right) = \\ &= \sum_\beta \int_{v_1} \int_\Omega (f_\alpha' f_{\beta 1}' - f_\alpha f_{\beta 1})d^3v_1 g\sigma(\Omega)d\Omega, \end{aligned} \tag{9.12}$$

kde jsme použili označení

$$\begin{aligned} f_\alpha' &= f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}', t) && (9.13)\\ f_{\beta 1}' &= f_\beta(\mathbf{r}, \mathbf{v_1}', t) && (9.14)\\ f_\alpha &= f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) && (9.15)\\ f_{\beta 1} &= f_\beta(\mathbf{r}, \mathbf{v_1}, t) && (9.16)\\ & && (9.17) \end{aligned}$$

Explicitně tedy můžeme BKR zapsat jako

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_\alpha + \mathbf{a} \cdot \nabla_v f_\alpha = \sum_\beta \int_{v_1} \int_\Omega (f'_\alpha f'_{\beta 1} - f_\alpha f_{\beta 1}) d^3 v_1 g \sigma(\Omega) d\Omega, \tag{9.18}$$

takže jde o *integro-diferenciální rovnici*

9.1.2 Jakobián transformace

Transformace použitá v předchozí podkapitole je

$$d^3 v' \, d^3 v'_1 = |J| \, d^3 v \, dv_1, \tag{9.19}$$

kde

$$J = \frac{\partial(\mathbf{v}', \mathbf{v}'_1)}{\partial(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1)} = \frac{\partial(v'_x, v'_y, v'_z, v'_{1x}, v'_{1y}, v'_{1z})}{\partial(v_x, v_y, v_z, v_{1x}, v_{1y}, v_{1z})}, \tag{9.20}$$

což můžeme vyjádřit jako

$$(J) = \begin{pmatrix} \frac{\partial v'_x}{\partial v_x} & \frac{\partial v'_y}{\partial v_x} & \dots & \frac{\partial v'_{1z}}{\partial v_x} \\ \frac{\partial v'_x}{\partial v_y} & \frac{\partial v'_y}{\partial v_y} & \dots & \frac{\partial v'_{1z}}{\partial v_y} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial v'_x}{\partial v_{1z}} & \frac{\partial v'_y}{\partial v_{1z}} & \dots & \frac{\partial v'_{1z}}{\partial v_{1z}} \end{pmatrix}. \tag{9.21}$$

Pomocí vztahů zavedených v kapitole o interakcích částic můžeme $d^3v\, d^3v_1$ vyjádřit pomocí tepelné V_0 a vzájemné g rychlosti před srážkou

$$d^3v\, d^3v_1 = |J_c| d^3V_0\, d^3g, \tag{9.22}$$

kde J_c je Jakobián transformace. Uvažujme nejprve pouze x-komponentu v (9.22):

$$dv_x\, dv_{1x} = |\frac{\partial(v_x, v_{1x})}{\partial(V_{0x}, g_x)}| dc_{0x}\, dg_x. \tag{9.23}$$

Vypočítáme determinant naznačené matice 2x2

$$dv_x\, dv_{1x} = (\frac{\mu}{m_1} + \frac{\mu}{m})\, dV_{0x}\, dg_x = dV_{0x}\, dg_x. \tag{9.24}$$

Součin všech tří komponent odpovídajících x, y a z složkám dává

$$d^3v\, d^3v_1 = d^3V_0\, d^3g. \tag{9.25}$$

Podobně

$$d^3v'\, d^3v_1' = d^3V_0'\, d^3g'. \tag{9.26}$$

Viděli jsme, že $V_0 = V_0'$. Vektory $\mathbf{g}$ a $\mathbf{g}'$ se liší pouze směrem, ale mají stejnou velikost, takže $d^3g = d^3g'$. V důsledku tedy

$$d^3v\, d^3v_1 = d^3v'\, d^3v_1' \tag{9.27}$$

9.1.3 Rychlost změny fyzikální veličiny v důsledku srážek

Rychlost změny fyzikální veličiny $\chi(\mathbf{v})$ na jednotkový objem v důsledku srážek vyjádříme jako

$$\left[\frac{\delta(n_\alpha\langle\chi\rangle_\alpha)}{\delta t}\right]_{\text{srazk}} = \int_v \chi(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t})_{\text{srazk}}\, d^3v. \tag{9.28}$$

Za použití Boltzmannova srážk. integrálu dostáváme

$$\left[\frac{\delta(n_\alpha\langle\chi\rangle_\alpha)}{\delta t}\right]_{\text{srazk}} = \sum_\beta \int_\Omega \int_{v_1} \int_v (f'_\alpha f'_{\beta 1} - f_\alpha f_{\beta 1})\chi\, g\sigma(\Omega)\, d\Omega\, d^3v_1\, d^3v. \tag{9.29}$$

Uvědomíme si, že ke každé srážce existuje srážka inverzní se stejným účinným průřezem. Takže

$$\begin{aligned}\sum_\beta \int_\Omega \int_{v_1} \int_v f'_\alpha f'_{\beta 1}\chi\, g\sigma(\Omega)\, d\Omega\, d^3v_1\, d^3v = \\ = \sum_\beta \int_\Omega \int_{v_1} \int_v f_\alpha f_{\beta 1}\chi'\, g\sigma(\Omega)\, d\Omega\, d^3v_1\, d^3v,\end{aligned} \tag{9.30}$$

kde jsme použili $d^3v'_1\, d^3v' = d^3v_1\, d^3v$ a $\chi' = \chi(\mathbf{v}')$. Použijeme-li vztah (9.30) dostáváme alternativní vyjádření pro změnu veličiny χ v důsledku srážek.

$$\left[\frac{\delta(n_\alpha\langle\chi\rangle_\alpha)}{\delta t}\right]_{\text{srazk}} = \sum_\beta \int_\Omega \int_{v_1} \int_v f_\alpha f_{\beta 1}(\chi' - \chi) g\sigma(\Omega)\, d\Omega\, d^3v_1\, d^3v. \tag{9.31}$$

9.2 Boltzmannův srážkový člen ve slabě ionizovaném plazmatu

Předp., že

- rozděl. fce neutrálních částic je homogenní a izotropní
- vnější síly působící na elektrony jsou malé, takže elektrony nejsou příliš vzdáleny od rovnovážného stavu $\Rightarrow$ jejich rozděl. fce není příliš prostorově nehomogenní a anizotropní
- za rovnovážného stavu elektrony nevykazují žádnou driftovou rychlost a jejich rozděl. fce je homogenní a izotropní

9.2.1 Rozvoj rozdělovací funkce ve sférickou harmonickou řadu

Označíme (v, ϕ, θ) sférické souřadnice v rychlostním prostoru. Podle předpokladů je závislost $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ na ϕ a θ velmi malá, takže je možné rozvinout $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ v řadu podle úhlových rychlostních souřadnic ϕ a θ a vzít pouze prvních pár členů tohoto rozvoje. Provedeme tedy rovoj do *sférické harmonické řady* pomocí *Fourierovského rozvoje* v ϕ a *asociovaných Legendrových polynomů* $P_n^m(\cos\theta)$ v θ:

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} P_n^m(\cos\theta) \cdot [f_{mn}(\mathbf{r}, v, t)\cos(m\phi) + g_{mn}(\mathbf{r}, v, t)\sin(m\phi)], \quad (9.32)$$

kde funkce f_{mn} a g_{mn} jsou koeficienty rozvoje.

- První člen v (9.32) odpovídá $m = 0$ a $n = 0$, a protože $P_0^0(\cos\theta) = 1$, je roven $f_{00}(\mathbf{r}, v, t)$. Toto je izotropní rozdělovací fce odpovídající rovnovážnému stavu.
- Člen s $m = 1$ a $n = 0$ se rovná nule, protože $P_0^1(\cos\theta) = 0$
- Další vyšší člen je pro $m = 0$ a $n = 1$, přičemž $P_1^0(\cos\theta) = \cos\theta$, takže je to $f_{01}(\mathbf{r}, v, t)\cos\theta$

Vezmeme-li tedy do úvahy pouze první dva nenulové členy rozvoje

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = f_{00}(\mathbf{r}, v, t) + \frac{\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{v}}_\mathbf{z}}{v} f_{01}(\mathbf{r}, v, t), \tag{9.33}$$

kde jsme $\cos\theta$ nahradili výrazem $(\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{v}}_\mathbf{z})/v$

9.2.2 Aproximativní vyjádření Boltzmannova srážkového členu

Boltzmannův srážkový člen je dán vztahem (9.12) a pro binární srážky elektronů s neutrály jej můžeme zapsat jako

$$\left(\frac{\delta f_e}{\delta t}\right)_{\mathrm{srazk}} = \int_b \int_\epsilon \int_{v1} (f_e' f_{n1}' - f_e f_{n1})\, g\, b\, db\, d\epsilon\, d^3 v_1, \tag{9.34}$$

kde jsme $\sigma(\Omega) d\Omega$ nahradili $b\, db\, d\epsilon$. Zde f_e reprezentuje nerovnovážnou rozděl. fci elektronů a f_n je izotropní rovnovážná rozděl. fce neutrálních částic. V první aproximaci předp., že neutrální částice jsou v klidu a nejsou ovlivněny srážkami s elektrony.

Tedy

$$\mathbf{v_1} = \mathbf{v_1'} = 0 \tag{9.35}$$

$$f_{n1} = f'_{n1} \tag{9.36}$$

a rovnici (9.34) přepíšeme jako

$$(\frac{\delta f_e}{\delta t})_{\text{srazk}} = \int_{v1} f_{n1} d^3 v_1 \int_0^{2\pi} d\epsilon \int_0^{\infty} (f'_e - f_e)\, g\, b\, db. \tag{9.37}$$

Protože hustota neutrálních částic je

$$n_n = \int_{v1} f_{n1}\, d^3 v_1 \tag{9.38}$$

dále upravíme

$$(\frac{\delta f_e}{\delta t})_{\text{srazk}} = n_n \int_0^{2\pi} d\epsilon \int_0^{\infty} (f'_e - f_e)\, g\, b\, db. \tag{9.39}$$

Rozdělovací fce pro elektrony před srážkou je

$$f_e = f_e(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = f_{00}(\mathbf{r}, v, t) + \frac{\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{v}}_\mathbf{z}}{v} f_{01}(\mathbf{r}, v, t) \tag{9.40}$$

a po srážce

$$f'_e = f_e(\mathbf{r}, \mathbf{v}', t) = f_{00}(\mathbf{r}, v', t) + \frac{\mathbf{v}' \cdot \hat{\mathbf{v}}_\mathbf{z}}{v'} f_{01}(\mathbf{r}, v', t) = \tag{9.41}$$

$$= f_{00}(\mathbf{r}, v, t) + \frac{\mathbf{v}' \cdot \hat{\mathbf{v}}_\mathbf{z}}{v} f_{01}(\mathbf{r}, v, t).$$

V posledním vztahu jsme předpokládali, že $v' = v$, neboť elektrony neztrácejí energii, protože neutrály jsou mnohem těžší a jsou v klidu. Výsledně tedy píšeme

$$f_e' - f_e = \frac{(\mathbf{v}' - \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{v}}_\mathbf{z}}{v} f_{01}(\mathbf{r}, v, t). \tag{9.42}$$

Beze ztráty na obecnosti můžeme zvolit osu v_z paralelně s původní vzájemnou rychlostí g elektronu, takže

$$(\mathbf{v}' - \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{v}}_\mathbf{z} = (\mathbf{g}' - \mathbf{g}) \cdot \hat{\mathbf{v}}_z = g(\cos\chi - 1) = v(\cos\chi - 1), \tag{9.43}$$

kde χ je rozptylový úhel (úhel mezi $\mathbf{g}$ a $\mathbf{g}'$). Dosazením (9.43) do (9.42) dostáváme

$$f_e' - f_e = -(1 - \cos\chi) f_{01}(\mathbf{r}, v, t), \tag{9.44}$$

takže srážkový člen můžeme zapsat jako

$$(\frac{\delta f_e}{\delta t})_{\mathrm{srazk}} = -n_n\, g\, f_{01}(\mathbf{r}, v, t) \int_0^{2\pi} d\epsilon \int_0^{\infty} (1 - \cos\chi)\, b\, db. \tag{9.45}$$

Protože účinný průřez pro přenos hybnosti mezi elektrony a neutrály je definován jako

$$\sigma_m = \int_\Omega (1 - \cos\chi) \sigma(\Omega)\, d\Omega = \int_0^{2\pi} d\epsilon \int_0^{\infty} (1 - \cos\chi)\, b\, db \tag{9.46}$$

můžeme () psát takto

$$(\frac{\delta f_e}{\delta t})_{coll} = -n_n\, g\, \sigma_m f_{01}(\mathbf{r}, v, t). \tag{9.47}$$

Pokud substituujeme $f_{01}(\mathbf{r}, v, t)$ v () pomocí () a uvědomíme si, že v použité aproximaci stacionárních iontů $(\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{v}}_\mathbf{z})/v = (\mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{v}}_\mathbf{z})/g = 1$, pak

$$(\frac{\delta f_e}{\delta t})_{coll} = -n_n\, v\, \sigma_m(f_e - f_{e0}) = -\nu_r(v)(f_e - f_{e0}), \tag{9.48}$$

kde jsme zavedli rychlostně závislou srážkovou frekvenci pro přenos hybnosti $\nu_r(v) = n_n v \sigma_m$ a f_{00} byla nahrazena symbolem f_{e0}, tak jak jsme to používali dříve. Vyjádření srážkového členu (9.48) je podobné relaxačnímu Krookovu modelu až na fakt, že srážková frekvence je závislá na rychlosti.

9.2.3 Rychlost změny hybnosti v důsledku srážek

Podle definice srážkového členu $\mathbf{A}_e$ v transportní pohybové rovnici máme

$$\mathbf{A_e} = [\frac{\delta(\rho_{me}\mathbf{u_e})}{\delta t}]_{coll} = m_e \int_v \mathbf{v}(\frac{\delta f_e}{\delta t})_{coll}\, d^3v. \tag{9.49}$$

Dosadíme (9.48) a dostáváme

$$\mathbf{A_e} = -m_e \int_v \nu_r(v)\mathbf{v} f_e d^3v + m_e \int_v \nu_r(v)\mathbf{v} f_{e0} d^3v. \tag{9.50}$$

Pokud bychom předpokládali, že srážková frekvence ν_r nezávisí a rychlosti a pokud el. plyn nemá žádnou driftovou rychlost v rovnovážném stavu, tj.

$$\mathbf{u_{e0}} = \frac{1}{n_e} \int_v \mathbf{v} f_{e0}\, d^3v = 0, \tag{9.51}$$

máme

$$A_e = -n_e m_e \nu_r \mathbf{u_e} = -\rho_{me} \nu_r \mathbf{u_e}, \tag{9.52}$$

kde $\mathbf{u}_e$ je průměrná rychlost elektronů v nerovnovážném stavu. Tato rovnice odpovídá vztahu, který jsme použili v Langevinově rovnici.

9.3 Fokker-Planckova rovnice

Uvažujeme Coloumbovské interakce. Vychýlení nabitých částic s velkým deflekčním úhlem v důsledku Coulombovských interakcí nahradíme řadou po sobě následujících slabých binárních srážek, tj. srážek s malým úhlem rozptylu. Fokker-Planckův srážkový člen může být tedy přímo odvozen z Boltzmannova srážk. členu. Uvažujeme srážky mezi částicemi α a β.

9.3.1 Odvození Fokker-Planckova srážkového členu

Veličina $\chi(\mathbf{v})$ je libovolná funkce rychlosti asociovaná s částicemi α. Změna této veličiny na jednotkový objem v důsledku srážek je

$$\begin{aligned} \int_v \chi(\mathbf{v}) (\frac{\partial f_\alpha}{\partial t})_{\text{srazk}} \, d^3v = \int_\Omega \int_{v_1} \int_v (f'_\alpha f'_{\beta 1} - f_\alpha f_{\beta 1}) \chi g \sigma(\Omega) \, d\Omega \, d^3 v_1 \, d^3 v = \\ \int_\Omega \int_{v_1} \int_v f_\alpha f_{\beta 1} (\chi' - \chi) g \sigma(\Omega) \, d\Omega \, d^3 v_1 \, d^3 v \end{aligned} \tag{9.53}$$

, kde $\chi' = \chi(\mathbf{v}')$ je jediná funkce rychlosti po srážce. Pro slabé srážky můžeme psát

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}, \tag{9.54}$$

kde $\Delta\mathbf{v}$ je malá veličina. Protože

$$\chi' = \chi(\mathbf{v}') = \chi(\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}), \tag{9.55}$$

můžeme rozvinout χ' do Taylorovy řady

$$\chi(\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}) = \chi(\mathbf{v}) + \sum_i \frac{\partial\chi}{\partial v_i}\Delta v_i + \frac{1}{2}\sum_{ij}\frac{\partial^2\chi}{\partial v_i \partial v_j}\Delta v_i \Delta v_j + \cdots \tag{9.56}$$

Dosazením (9.56) do (9.53) dostáváme

$$\int_v \chi(\frac{\delta f_\alpha}{\partial t})_{\mathrm{srazk}}\, d^3v = \int_\Omega \int_{v_1} \int_v f_\alpha f_{\beta 1}(\sum_i \frac{\partial\chi}{\partial v_i}\Delta v_i + \tag{9.57}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{ij}\frac{\partial^2\chi}{\partial v_i \partial v_j}\Delta v_i \Delta v_j) g\, \sigma(\Omega)\, d\Omega\, d^3v_1\, d^3v,$$

kde jsme zanedbali vyšší členy rozvoje. Nyní se musíme snažit vyloučit libovolnou fci χ. Integrujeme jedenkrát per partes první skupinu integrálů obsahující $\partial\chi/\partial v_i$ a dvakrát per partes druhou skupinu obsahující $\partial^2\chi/(\partial v_i \partial v_j)$. Pro x-komponentu první skupiny integrálů obsahujících $\partial\chi/\partial v_i$ máme

$$\int_\Omega \int_{v_1} \int_v \frac{\partial\chi(\mathbf{v})}{\partial v_x}\Delta v_x f_\alpha(\mathbf{v}) f_{\beta 1}(\mathbf{v_1})\, g\, \sigma(\Omega)\, d\Omega\, d^3v_1\, d^3v = \tag{9.58}$$

$$\int_\Omega \int_{v_1} [\int_v dv_y dv_z \frac{\partial \chi(\mathbf{v})}{\partial v_x} dv_x (v'_x - v_x) . f_\alpha(\mathbf{v}) g \sigma(\Omega)\, d\Omega] f_\beta(\mathbf{v_1})\, d^3 v_1 .$$

Ve členu v hranaté závorce můžeme substituovat

$$dV = \frac{\partial \chi(\mathbf{v})}{\partial v_x} dv_x \tag{9.59}$$

a

$$U = (v'_x - v_x) f_\alpha(\mathbf{v}) g \sigma(\Omega)\, d\Omega \tag{9.60}$$

a integrovat přes v_x per partes, takže dostáváme

$$\int_{v_x} \frac{\partial \chi(\mathbf{v})}{\partial v_x} dv_x (v'_x - v_x) f_\alpha(\mathbf{v}) g \sigma(\Omega)\, d\Omega = \tag{9.61}$$

$$= - \int_{v_x} \chi(\mathbf{v}) \frac{\partial}{\partial v_x} [(v'_x - v_x) f_\alpha(\mathbf{v}) g \sigma(\Omega)\, d\Omega]\, dv_x ,$$

kde integrovaný člen je roven nule, protože f musí jít k nule pro $\pm\infty$. Takže integrál (9.58) je

$$\int_\Omega \int_{v_1} \int_v \frac{\partial \chi(\mathbf{v})}{\partial v_x} \Delta v_x f_\alpha(\mathbf{v}) f_{\beta 1}(\mathbf{v_1}) g \sigma(\Omega)\, d\Omega\, d^3 v_1\, d^3 v = \tag{9.62}$$

$$= - \int_\Omega \int_{v_1} \int_v \chi(\mathbf{v}) \frac{\partial}{\partial v_x} [\Delta v_x f_\alpha(\mathbf{v}) g \sigma(\Omega)\, d\Omega] f_\beta(\mathbf{v_1})\, d^3 v_1\, d^3 v .$$

Podobným způsobem integrujeme per partes ostatní integrály v (9.57) a dostaneme srážkový člen v tomto tvaru

$$\int_v \chi(\frac{\delta f_\alpha}{\partial t})_{\rm srazk}\, d^3v == -\int_\Omega \int_{v_1} \int_v \chi \sum_i \frac{\partial}{\partial v_i}[\Delta v_i f_\alpha g\sigma(\Omega)\, d\Omega] f_{\beta 1}\, d^3v_1\, d^3v + \tag{9.63}$$

$$+\int_\Omega \int_{v_1} \int_v \frac{1}{2}\chi \sum_{ij} \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j}[\Delta v_i \Delta v_j f_\alpha g\sigma(\Omega)\, d\Omega] f_{\beta 1}\, d^3v_1 d^3v =$$

$$= \int_v \chi[\sum_i \frac{\partial}{\partial v_i}(f_\alpha \int_\Omega \int_{v_1} \Delta v_i g\sigma(\Omega)\, d\Omega f_{\beta 1}\, d^3v_1] d^3v +$$

$$+\int_v \chi[\frac{1}{2}\sum_{ij} \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j}(f_\alpha \int_\Omega \int_{v_1} \Delta v_i \Delta v_j f_\alpha g\sigma(\Omega)\, d\Omega f_{\beta 1}\, d^3v_1)] d^3v.$$

Definujeme veličiny

$$\langle \Delta v_i \rangle_{av} = \int_\Omega \int_{v_1} \Delta v_i g\sigma(\Omega)\, d\Omega f_{\beta 1}\, d^3v_1 \tag{9.64}$$

a

$$\langle \Delta v_i \Delta v_j \rangle_{av} = \int_\Omega \int_{v_1} \Delta v_i \Delta v_j g\sigma(\Omega)\, d\Omega f_{\beta 1}\, d^3v_1, \tag{9.65}$$

což jsou vlastně modifikované střední hodnoty přes úhel rozptylu a rozděl. fce narážejících částic. Pomocí těchto veličin dostáváme

$$\int_v \chi(\frac{\delta f_\alpha}{\delta t})_{\rm srazk}\, d^3v = -\int_v \chi[\sum_i \frac{\partial}{\partial v_i}(f_\alpha \langle \Delta v_i \rangle_{av}) + \tag{9.66}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{ij}\frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j}(f_\alpha \langle \Delta v_i \Delta v_j \rangle_{av})]d^3v.$$

Protože tato rovnice platí pro libovolnou fci χ, pro $\chi = 1$ platí

$$(\frac{\delta f_\alpha}{\delta t})_{\text{srazk}} = -\sum_i \frac{\partial}{\partial v_i}(f_\alpha \langle \Delta v_i \rangle_{av}) + \frac{1}{2}\sum_{ij}\frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j}(f_\alpha \langle \Delta v_i \Delta v_j \rangle_{av}). \qquad (9.67)$$

Toto je srážkový člen *Fokker-Planckovy rovnice*. Střední hodnoty $\langle \Delta v_i \rangle_{av}$ a $\langle \Delta v_i \Delta v_j \rangle_{av}$ jsou tzv. Fokker-Planckovy koeficienty *dynamického tření* a *difuze v rychlostním prostoru*. Vyjadřují střední rychlost změny Δv_i a $\Delta v_i \Delta v_j$ v důsledku mnoha po sobě následujících Coulombovských srážek.