Vlnová rovnice

Bohužel nemám buňky na to, abych udělal něco ke kanonickým tvarům. Tak přecházím rovnou k vlnové rovnici.

U tohoto typu rovnic jsou tři základní případy, a to bez konců, s jedním koncem a se dvěma konci. Struna obvykle více konců nemá, takže ostatními případy se zde nebudu zabývat.

Nekonečná struna

No nejdřív bych se podíval na homogenní rovnici. Jak je jednou napsáno homogenní, je tím většinou myšleno, že na pravé straně je nula. No tak dobře, i tady ta nula bude. Řešíme tedy rovnici

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0.$$

Jsme fyzici, tak to nebudeme řešit jen tak, ale pěkně s počátečními a okrajovými podmínkami. Mějme tedy podmínky

$$u(x, 0) = \phi(x),$$

$$u_t(x, 0) = \psi(x).$$

Nejprve se podíváme na obecné řešení.

Obecné řešení najdeme přes kanonický tvar.

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \Rightarrow \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right) - a^2 = 0$$

To je kanonický tvar. Očividně je to kvadratická rovnice. A ta má dva kořeny. Takže proč by i tato rovnice neměla mít dva kořeny?

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \pm a \Rightarrow x - at = c \wedge x + at = d$$

Tím máme vlastně zavedenou substituci. Původní rovnici převedeme do proměnných c a d, čímž se převede do dost zajímavého tvaru. Je už pozdě večer, takže se mi nechcou moc vypisovat mezivýpočty. Pokud by byl o ně zájem, doplním později. Jo, slíbil jsem ten zajímavej tvar. Tady je.

$$-4a^2 u_{cd} = 0 \Rightarrow u_{cd} = 0$$

No a to je už celkem snadné vyřešit. Výsledkem je

$$u(c, d) = F(c) + G(d) \Rightarrow u(x, y) = F(x - at) + G(x + at).$$

A máme obecné řešení, a ani to moc nebolelo. To F a G jsou nějaké funkce, které se dají zjistit z počátečních a okrajových podmínek.

A na ty podmínky se teď podíváme. Máme $u(x, 0) = \phi(x) = F(x) + G(x)$. Když to obecné řešení zderivujeme podle času, máme $u_t(x, 0) = -aF_t(x) + aG_t(x) = \psi(x)$.

Co kdybychom se pokusili tyto dvě rovnice sečíst nebo jinak dát dohromady? Prvně se ale musíme zbavit těch derivací. Tak tu rovnici zintegrujeme. Získáme

$$-aF(x) + aG(x) = \int_0^x \psi(z)\,\mathrm{d}z.$$

Druhá rovnice je

$$aF(x) + aG(x) = \psi(x).$$

Máme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých. Hurá, máme řešení! Celkově dostaneme vztah

$$u(x,t) = \frac{\phi(x-at)+\phi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(z)\,\mathrm{d}z.$$

A teď už jen trapně dosazovat do vzorečku. Na tohle snad ani nemá cenu ukazovat nějaký příklad.

Některé kroky asi nejsou tak moc zřejmé. Slibuju, že před zkouškou budou všechny problémy vyřešeny. Teď to ale po mě nechtějte.

Struna s jedním koncem

Vezmeme si pilku na struny a někde ji uřízneme. No dobrá, máme jeden konec. A co s ním? Upevnit ho, nebo neupevnit? Naštěstí je matematika tak dobrá, že nám poradí v obou případech. Jen tak mimochodem budeme předpokládat, že počátek je umístěn „správně“.

Budeme předpokládat pevný konec. V něm platí, že obě okrajové podmínky jsou nulové. Teď je vhodné připomenout, že struna není nekonečná, ale někde useknutá. Řekněme, že je useknutá v počátku. Když to provedeme dost šikovně, budeme moct využít dříve odvozeného vzorečku pro nekonečnou strunu. Tak pozor, kouzlo přichází. Obě počáteční podmínky upravíme tak, abychom dostali lichou funkci. Proč lichou funkci? Protože jedině tak můžeme dosáhnout okrajové podmínky nulovosti. Jestliže necháme vlnu postupovat dál a dál, tak se v počátku obě vlny, ta z kladných hodnot a ta zlišená, sčítají tak, že vždy vyjde nula. To je vlastně i definice liché funkce, že? V počátku to je vždy nula. Vlastně je to středově souměrná funkce.

No a použije se dříve odvozený vzoreček…

A když je konec volný? Pak obě počáteční podmínky zesudíme. Jedině tak lze dosáhnout toho, že v počátku se ta struna pohybuje sem a tam a nezůstane na místě. Jak už asi tušíte, zase použijeme ten vzoreček.

Tyjo, už zbývá vzít pilku jen jednou a strunu přeříznout ještě na jednom místě, abychom dostali úsečku.

Struna se dvěma konci

Toto bude hodně těžký.
Sakra těžký.
Budou problémy.
A problémy jsme my.
Dva konce.

My je ale dostanem, co vy na to? Tož to deme na férovku.

Mějme tedy vlnovou rovnici s počátečními podmínkami $u(x,0) = f(x)$, $u_t(x,0) = 0$ a okrajovými podmínkami $u(0,t) = 0$, $u(l,t) = 0$.

Můžeme na to jít rovnou hrubou silou. To ale většinou nadělá velkou paseku. Půjdeme tedy na to chytře. Zkusíme nějaké řešení uhodnout. Pokud se to povede, získáme všechna možná řešení, která vzniknou jen změnou nějakých konstant. Aplikací podmínek získáme jedno jediné přesné řešení.

Jaké řešení ale zvolit? Zkusíme řešení tvaru

$$u(x,t) = X(x)\cdot T(t).$$

Zderivujeme dvakrát podle každé proměnné, dosadíme do vlnové rovnice a máme

$$XT_{tt} - c^{-2}X_{xx}T = 0 \Rightarrow \frac{T_{tt}}{T} = c^{-2}\frac{X_{xx}}{X}.$$

Aby to bylo vždy splněno, musí být oba zlomky stejnými funkcemi. Konstanta je taky funkce.

$$\frac{T_{tt}}{T} = c^{-2}\frac{X_{xx}}{X} = -\lambda^2$$

A můžeme vesele řešit.

$$X_{xx} + c^2\lambda^2 X = 0 \Rightarrow X(x) = Ae^{ic\lambda x} + Be^{-ic\lambda x} \Rightarrow X(x) = C\cos c\lambda x + D\sin c\lambda x$$

Nastává otázka, jaké může být λ, aby to vyhovovalo počátečním podmínkám.

Nejprve si všimneme členu s kosinem. Ten musí být jednoznačně nulový. Funkce kosinus má totiž v 0 nenulovou hodnotu, což jaksi neodpovídá požadavku nulovosti.

Máme ještě podmínku na druhém konci.

$$u(l,t) = 0 \Rightarrow X(l) = 0 \Rightarrow D\sin c\lambda l = 0$$

$$\sin c\lambda l = 0 \Leftrightarrow c\lambda l = k\pi \Rightarrow \lambda = \frac{k\pi}{cl}$$

To už začíná vypadat pěkně. Boj zdaleka není u konce, ještě bude nutné pár bitev vybojovat.

Takže máme rovnici pro X. Pro připomenutí $X(x) = D\sin\frac{k\pi x}{l}$. Něco podobného uděláme i pro časovou funkci.

Podobným způsobem získáme

$$T(t) = A\cos\frac{k\pi c}{l}t + b\sin\frac{k\pi c}{l}t.$$

Paráda, vypadá to, že jsme na konci! Struna se dvěma konci má ale ještě jeden trumf v rukávu.

Zesumírujeme si prozatimní výsledky. Získali jsme rovnici

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty}\sin\frac{k\pi x}{l}(A_k\cos\frac{k\pi c}{l}t + B_k\sin\frac{k\pi c}{l}t).$$

Zbývá už jen určit koeficienty A_k a B_k. A taky jsme nevyužili jedné podmínky, a to podmínky $u_t(x,0) = 0$. Když si rovnici zderivujeme a dosadíme počáteční podmínku, zjistíme, že nám mizí člen se sinem! Už by se chtělo křičet, že je už opravdu konec, ale pořád nejsou určeny koeficienty A_k.

A na to použijeme metodu jistého pana Fouriera. Tu už vypisovat nebudu, chcu jít někdy spat a navíc se to bralo v nějaké analýze, teď už nevím v jaké. My totiž víme, jak vlna vypadala v nulovém čase. Od toho počáteční podmínky jsou. No a aplikujeme to do Fourierova rozvoje.

Děkuji za pozornost a přeju všem plný počet bodů. Dobrou noc.