Jaroslav Zůda

Fyzika plazmatu - Zápočtové příklady

1. **Pro všechny**

   Pro účinný průřez v laboratorní soustavě platí vztah

$$\sigma_L(\chi_L) = \frac{b}{\sin\chi_L}\left|\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\chi_L}\right|.$$

   Analogický vztah platí i pro těžišťovou soustavu.

   Na cvičení byl odvozen vztah pro úhel odchýlení v laboratorní soustavě:

$$\mathrm{tg}\,\chi_L = \frac{\sin\chi}{\cos\chi + \frac{m}{m_1}}.$$

   Úkolem je najít vztah mezi $\sigma_L(\chi_L)$ a $\sigma(\chi)$. Budu postupovat způsobem, který nyní nastíním.

$$\sigma_L(\chi_L) = \frac{b}{\sin\chi_L}\left|\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\chi_L}\right| = \frac{b}{\sin\chi\cdot F(\chi)}\left|\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\chi}\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}\chi_L}\right| = \sigma(\chi)\cdot\frac{1}{F(\chi)}\cdot\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}\chi_L}$$

   Je tedy nutné spočítat funkci $F(\chi)$ a také $\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}\chi_L}$.

   $F(\chi)$: Platí $\sin x = \frac{\mathrm{tg}\,x}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\,x}}$. Do tohoto vztahu dosadím výše uvedený vztah a získám

$$\sin\chi_L = \frac{\sin\chi}{\cos\chi+\frac{m}{m_1}}\frac{1}{\left(1+\frac{\sin^2\chi}{\left(\cos\chi+\frac{m}{m_1}\right)^2}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sin\chi}{\left(1+2\frac{m}{m_1}\cos\chi+\left(\frac{m}{m_1}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{F(\chi)} = \left(1+2\frac{m}{m_1}\cos\chi+\left(\frac{m}{m_1}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

   $\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}\chi_L}$: Obě strany rovnize pro úhel rozptylu v laboratorní soustavě zdiferencuji. Získám pak vztah

$$\frac{\mathrm{d}\chi_L}{\cos^2\chi_L} = \frac{1+\frac{m}{m_1}\cos\chi}{\left(\cos\chi+\frac{m}{m_1}\right)^2}\mathrm{d}\chi.$$

   Odtud už jednoduše plyne

$$\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}\chi_L} = \frac{\left(\cos\chi+\frac{m}{m_1}\right)^2}{1+\frac{m}{m_1}\cos\chi}\cdot\frac{1}{1-\frac{\sin^2\chi}{1+2\frac{m}{m_1}\cos\chi+\frac{m^2}{m_1^2}}} =$$

$$= \frac{\left(\cos\chi+\frac{m}{m_1}\right)^2}{1+\frac{m}{m_1}\cos\chi}\cdot\frac{1+2\frac{m}{m_1}\cos\chi+\frac{m^2}{m_1^2}}{1+2\frac{m}{m_1}\cos\chi+\frac{m^2}{m_1^2}-\sin^2\chi} = \frac{1+2\frac{m}{m_1}\cos\chi+\frac{m^2}{m_1^2}}{1+\frac{m}{m_1}\cos\chi}.$$

   Už tedy mám obě potřebné funkce. Je vidět, že jejich vynásobením dostanu vztah ze zadání.

2. **Místo první písemky**

Máme najít absolutní teplotu systému popsaném jistou rozdělovací funkcí (v zadání). Ta se určí ze střední hodnoty kinetické energie. Pro ni platí

$$\frac{1}{2}m\langle V_i V_i\rangle = \frac{3}{2}nkT.$$

Pro střední hodnotu navíc máme vztah

$$\langle x\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x f(v)\,\mathrm{d}v.$$

Nyní mám už vše potřebné.

$$\frac{3}{2}nkT = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}m(v_x^2+v_y^2+v_z^2)f(v)\,\mathrm{d}v_x\,\mathrm{d}v_y\,\mathrm{d}v_z = \frac{3}{2}mK \iiint_{-v_0}^{v_0} v_x^2\,\mathrm{d}v_x\,\mathrm{d}v_y\,\mathrm{d}v_z =$$

$$= \frac{3}{2}mK\left[\frac{v_x^3}{3}\right]_{-v_0}^{v_0}[v_y]_{-v_0}^{v_0}[v_z]_{-v_0}^{v_0} = 4mKv_0^5 \Rightarrow T = \frac{8mKv_0^5}{3nk}$$

Je ještě nutné spočítat hustotu částic n.

$$n = \int_{-\infty} \infty f(v)\,\mathrm{d}v \Rightarrow n = \iiint_{-v_0}^{v_0} K\,\mathrm{d}v_x\,\mathrm{d}v_y\,\mathrm{d}v_z = K[v_x]_{-v_0}^{v_0}[v_y]_{-v_0}^{v_0}[v_z]_{-v_0}^{v_0} = 8Kv_0^3$$

Tuto hustotu dosadím do předchozího vztahu a získávám

$$T = \frac{8mKv_0^5}{24kKv_0^3} = \frac{mv_0^2}{3k}.$$

Pozn.: V zadání je chyba, ve vztahu pro teplotu by měla být druhá mocnina rychlosti, ne první.